

Joint spectrum と *joint numerical range* について.

弘前大 理 長 宗雄
高口 真

1. 序. 1955年, *Arens and Calderon* は多変数関数論の研究に *joint spectrum* を導入した. その後, *Taylor* は新しい *joint spectrum* の定義を与え研究を進めた. これに対し, 作用素論でも *Bunce, Dekker, Dash, Zelazko, etc.* らによって *joint spectrum* の研究が進められている. 一方 *Halmos* は *numerical range* の一つの拡張として, *joint numerical range* を考え, それが凸性をもつかという問題を1967年の著書で提起している. 1969年に, それぞれの学位論文で *Dash* と *Dekker* は, *joint numerical range* についてのいくつかの結果を発表した. それ以来いく人かの人達によって *joint numerical range* の研究が進められている. ここでは, *joint numerical range* と *joint spectrum* との関連について, また, *joint numerical range* の *boundary* についてのいくつかの結果を報告する. 先ず, 有限個の作用素族に対して,

joint operator norm, *joint numerical radius*, *joint spectral radius* を定義し、*single operator* のときと同様に *joint operator norm* と *joint numerical radius* の等しい作用素族として *joint normaloid* を定義する。可換な正規作用素族、Toeplitz 作用素族、可換な正規拡大をもつ *subnormal* 作用素族は *joint normaloid* の例である。*joint normaloid* に属する作用素族の *joint numerical range* の closure の extreme point は *joint approximate eigenvalue* であり、さらに、それが *joint numerical range* の bare point であるならば *joint eigenvalue* である。また、特別な型のテンソル積で与えられた作用素族の場合には、Dash, Dash and Schechter は、その *joint spectrum* および *joint numerical range* が非常に *simple* なものになることを示したが、*joint operator norm* も同様に *simple* なものであり、*joint normaloid*, *joint convex* になるための条件も *simple* に述べることができる。

最後に *single operator* の場合と同様にして、有限個の作用素族についても *joint essential numerical range* を定義し、Lancaster の定理が作用素族の場合にも一般化できることを示す。

2. 定義と既知の結果.

H を複素ヒルベルト空間とし、その上の有界線形写象全体を $B(H)$ とする。 n 個の対 $A = (A_1, \dots, A_n) \subset B(H)$ に対し A の joint numerical range $W(A)$ とは

$$W(A) = \left\{ (A_1 x, x), \dots, (A_n x, x) ; x \in H, \|x\| = 1 \right\}$$

なる \mathbb{C}^n の subset である。これは一般には convex にはならない。

また、 \mathbb{C}^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ が A の joint approximate point spectrum $\sigma_{\pi}(A)$ に属するとは、次を満すときである。

$$\exists \{x_k\}; \text{unit vectors} \mid \|(A_i - z_i)x_k\| \rightarrow 0, \quad i=1, \dots, n.$$

\mathbb{C}^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ が A の joint point spectrum $\sigma_p(A)$ に属すとは、次を満すときである。

$$\exists x \neq 0 \mid (A_i - z_i)x = 0, \quad i=1, \dots, n.$$

\mathbb{C}^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ が A の joint approximate compression spectrum $\sigma_c(A)$ に属するとは、次を満すときである。

$$\exists \{x_k\}; \text{unit vectors} \mid \|(A_i - z_i)^* x_k\| \rightarrow 0, \quad i=1, \dots, n.$$

\mathbb{C}^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ が A の joint residual spectrum $\sigma_r(A)$ に属するとは、次を満たすときである。

$$\exists x \neq 0 \mid (A_i - z_i)^* x = 0, \quad i=1, \dots, n.$$

次に n 個の対 $A = (A_1, \dots, A_n)$ が互いに可換な場合に A の joint spectrum $\sigma(A)$ を次のように定義する。

subset $\{A_1, \dots, A_n\}$ の $B(H)$ での second commutant を A'' とする。このとき

$$\sigma(A) = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n B_i (A_i - z_i) \neq I, \forall B_i, B_n \in A'' \right\}$$

であり、 I は identity operator である。

joint spectrum と joint numerical range についての次の関係が成立する。

(Theorem 1) (Dekker [5], Th. 2.5.4).

$A = (A_1, \dots, A_n) \subset B(H)$ を可換な作用素族とする。このとき

$$\sigma(A) \subset \overline{\text{co } W(A)}$$

が成り立つ。ここで $\overline{\text{co } W(A)}$ は $W(A)$ の convex hull である。

joint numerical range が convex となる例は次の場合が知られている。

(Theorem 2). (Dash, [1], Prop. 2.4).

$\dim H = 2$ かつ $A = (A_1, \dots, A_n) \in B(H)$: 可換な作用素族
 ならば $W(A)$ は convex.

2以外の有限次元の場合でも convex になるかどうか現在のところ
 不明.

(Theorem 3). (Dash, [1], Th. 2.5 と Th. 2.8)

$A = (A_1, \dots, A_n) \in B(H)$: 可換な正規作用素族
 ならば $W(A)$ は convex

かつ $\text{co} \sigma(A) = \overline{W(A)}$.

さらにこのときは $\sigma(A) = \sigma_{\mathbb{C}}(A)$ である.

(Theorem 4). (Dash, [1], Th. 2.6 と Th. 2.10)

$T_g = (T_{g_1}, \dots, T_{g_n})$: Toeplitz 作用素族
 ならば $W(T_g)$ は convex

かつ $\text{co} \sigma_{\mathbb{C}}(T_g) = \overline{W(T_g)}$.

(Corollary 1) (Dash. [1], Lemma 2.9)

$T_\varphi = (T_{\varphi_1}, \dots, T_{\varphi_n})$ が analytic Toeplitz 作用素族

ならば

$W(T_\varphi)$ は convex

かつ

$$\text{co } \sigma(T_\varphi) = \overline{W(T_\varphi)}.$$

さらにこのときは $\sigma(T_\varphi) = \overline{\sigma_r(T_\varphi)}$ である.

3. Joint normaloid 作用素族.

[Def.]. $A = (A_1, \dots, A_n) \subset B(H)$ に対し、次の非負数

$$\|A\| = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|A_i x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid x \in H, \|x\|=1 \right\}$$

$$w(A) = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |(A_i x, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid x \in H, \|x\|=1 \right\}$$

$$r(A) = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid (z_1, \dots, z_n) \in \sigma(A) \right\}$$

$$r_{\pi}(A) = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid (z_1, \dots, z_n) \in \sigma_{\pi}(A) \right\}$$

をそれぞれ A の joint operator norm, joint numerical radius, joint spectral radius, joint approximate spectral radius という。

[Def.]. $A = (A_1, \dots, A_n) \subset B(H)$ に対し、

$$A: \text{joint normaloid} \iff \|A\| = w(A).$$

ここで $\phi_1, \dots, \phi_n \in L^\infty(X; \mu)$ に対し $A_i f = \phi_i f$, ($f \in L^2(X; \mu)$)
 となる作用素族 $A = (A_1, \dots, A_n)$ を考える.

このとき次の lemma が成立する.

(Lemma 1) (Dash. [2], Th. 5.2).

上の $A = (A_1, \dots, A_n)$ に対し.

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \sigma(A) \iff \forall \varepsilon > 0; \mu\left(\left\{t \in X \mid \sum_{i=1}^n |\phi_i(t) - z_i| < \varepsilon\right\}\right) > 0.$$

右の条件を満す点全体を A の *joint essential range* といふ.

(Theorem 5) $A = (A_1, \dots, A_n)$; 可換な正規作用素族とする.

このとき

$$\|A\| = w(A) = r(A)$$

が成り立つ. 即ち A は *joint normaloid* である.

$$\text{(証明)} \quad \|A\|^2 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int |\phi_i(t)|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) \mid \|f\| = 1 \right\}$$

$$r(A)^2 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \mid \mu\left(\left\{t \in X; \sum_{i=1}^n |\phi_i(t) - z_i| < \varepsilon\right\}\right) > 0, \forall \varepsilon > 0 \right\}$$

$$\text{となるから} \quad \mu\left(\left\{t \in X \mid \sum_{i=1}^n |\phi_i(t)|^2 > r(A)^2\right\}\right) = 0.$$

$$\text{従って} \quad \sum_{i=1}^n \int |\phi_i(t)|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) \leq r(A)^2 \int |f(t)|^2 d\mu(t) = r(A)^2 \|f\|^2$$

となることより $\|A\| = w(A) = r(A)$ をうる。

次に、Toeplitz 作用素族が joint normaloid であることを示すために、 $T_\phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とする。このとき

$$T_{\phi_i} f = P L_{\phi_i} f, \quad f \in H^2,$$

ここで P は L^2 から H^2 への projection であり L_{ϕ_i} は Laurent 作用素である。

このとき次の lemma が成立する。

(Lemma 2) (Dash. [2], Th. 6.1)

$T_\phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とし、それによる Laurent 作用素族 $L_\phi = (L_{\phi_1}, \dots, L_{\phi_n})$ に対し、

$$\sigma(L_\phi) \subset \sigma_\pi(T_\phi)$$

が成り立つ。

(Theorem 6) $T_\phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ を Toeplitz 作用素族とする。このとき $\|T_\phi\| = w(T_\phi) = r_\pi(T_\phi)$ であり、さらに T_ϕ が analytic Toeplitz 作用素族ならば

$$\|T_\phi\| = w(T_\phi) = r(T_\phi).$$

従って, *joint normaloid* である。

証明は *lemma 2* により簡単に示されるので省略する。

joint normaloid となる例として可換な正規拡大をもつ *subnormal* 作用素族がある。

次に特別な型のテンソル積で与えられる作用素族について考える。

H_1, \dots, H_n を複素ヒルベルト空間とする。 I_j を H_j 上の *identity* 作用素、 A_j を $B(H_j)$ の任意の元とする。

$H_1 \otimes \dots \otimes H_n$ 上の作用素 T_j を次のように定義する。

$$(*) \quad T_j = I_1 \otimes \dots \otimes I_{j-1} \otimes A_j \otimes I_{j+1} \otimes \dots \otimes I_n$$

このとき *joint spectrum* については次の定理が成立する。

(Theorem 7) (Dash and Schechter, [4])

$T = (T_1, \dots, T_n)$ を (*) で与えられる作用素族とする。

このとき

$$\sigma(T) = \prod_{j=1}^n \sigma(T_j) = \prod_{j=1}^n \sigma(A_j)$$

が成立する。

次に *joint numerical range* については次の定理が成立する。

(Theorem 8) (Dash, [3])

$T = (T_1, \dots, T_n)$ を (*) で与えられた作用素族とする。

このとき

$$W(T) = \prod_{j=1}^n W(T_j) = \prod_{j=1}^n W(A_j)$$

が成立する。

(Theorem 9) $T = (T_1, \dots, T_n)$ を (*) で与えられた作用素族

とする。各 A_j が *normaloid* であるならば

$$\|T\| = w(T) = r(T)$$

が成立する。従って *joint normaloid* である。

さらに $\|T\| = (\|T_1\|^2 + \dots + \|T_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$ が成立する。

証明は *theorem 7* と *theorem 8* と $\|T_j\| = \|A_j\|$ であることにより簡単に得られるので省略する。

4. *Joint normaloid* 作用素族の *bare point* と *extreme point*

K を \mathbb{C}^n における *compact connected set* とする。

K の *bare point* 全体を $B_a(K)$, K の *extreme point* 全体を $E_x(K)$ と記す。

このとき $B_a(\kappa) \subset E_x(\kappa)$ から $E_x(\kappa) \subset \overline{B_a(\kappa)}$ が成立する。

(Theorem 10). $A = (A_1, \dots, A_n)$ に対して, 任意の $z = (z_1, \dots, z_n)$ において $A - z = (A_1 - z_1, \dots, A_n - z_n)$ が joint normaloid であるとする。このとき,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_x(\overline{W(A)}) \text{ ならば } \alpha \in \sigma_{\pi}(A).$$

さらに $\alpha \in B_a(\overline{W(A)}) \cap W(A)$ ならば $\alpha \in \sigma_p(A)$.

(証明) $\sigma_{\pi}(A)$ は closed set であることから,

$\alpha \in B_a(\overline{W(A)})$ ならば $\alpha \in \sigma_{\pi}(A)$ を示せばよい。

$\alpha \in B_a(\overline{W(A)})$ より $z = (z_1, \dots, z_n)$ を中心とする spherical surface S が存在して,

$$\|A - z\| = w(A - z) = \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k - z_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

であり, さらに unit vector の sequence $\{x_i\}$ が存在して,

$$\left((A_k - z_k)x_i, x_i \right) \longrightarrow \alpha_k - z_k, \quad k=1, \dots, n.$$

以上のことから

$$\sum_{k=1}^n \left\| (A_k - z_k)x_i \right\|^2 \longrightarrow 0.$$

により $\alpha \in \sigma_{\pi}(A)$ をうる. 定理の後半部は明らかであるので省略する.

以上のことから, Th.3, Th.4, Cor.1 の後半部は *corollary* として得られる.

また *single* の場合と同様に *joint* でも

$$\|A\| = w(A) \iff \|A\| = r_{\pi}(A)$$

が成立する.

また次の結果も知られている.

(Theorem 11) (Dekker, [5], Cor.1.3.6 と Juneja [7])

$A = (A_1, \dots, A_n)$ を互いに可換な正規作用素族とする.

このとき

$$E_x(\overline{W(A)}) \cap W(A) \subset \sigma_p(A).$$

5. Joint essential numerical range.

ここでは H は *separable infinite dimensional* であるとする.

[Def.] $A = (A_1, \dots, A_n)$ に対して, A の *joint essential numerical range* $W_e(A)$ とは

$$W_e(A) = \bigcap \left\{ \overline{W(A_1 + K_1, \dots, A_n + K_n)} \mid K_1, \dots, K_n \text{ compact} \right\}$$

である。

(Lemma 3) $A = (A_1, \dots, A_n)$ と $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し、unit vector の sequence $\{x_i\}$ で、 $x_i \rightarrow 0$ かつ $(A_k x_i, x_i) \rightarrow z_k$, $k=1, \dots, n$, なるものが存在するならば、 $z \in W_e(A)$ である。

この lemma より、Lancaster の定理を joint の場合に拡張する。証明は、Garske [6] による。

(Theorem 12) $A = (A_1, \dots, A_n)$ に対して、

$$E_x(\overline{W(A)}) \subset W_e(A) \cup W(A)$$

(証明) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E_x(\overline{W(A)})$ とする。unit vector の sequence $\{x_i\}$ で、 $(A_k x_i, x_i) \rightarrow \lambda_k$ なるものが存在する。 $x_i \rightarrow x$ と仮定してよい。 $y_i = x_i - x$ とおくと $y_i \rightarrow 0$, さらに $\|y_i\| \rightarrow \varepsilon$ としてよい。従って

$$1 = \|x_i\|^2 = \|y_i\|^2 + 2 \operatorname{Re}(y_i, x) + \|x\|^2 \rightarrow \varepsilon^2 + \|x\|^2$$

より、
$$\varepsilon^2 + \|x\|^2 = 1$$

$$(T_k x_i, x_i) = (T_k (y_i + x), (y_i + x)) = (T_k y_i, y_i) + (T_k y_i, x) \\ + (T_k x, y_i) + (T_k x, x)$$

$$\therefore (T_k y_i, y_i) + (T_k x, x) \longrightarrow \lambda_k \quad \therefore (T_k y_i, y_i) \longrightarrow \lambda_k - (T_k x, x)$$

① $\varepsilon = 0$ ならば $\lambda \in W(A)$.

② $\varepsilon \neq 0$ ならば

① $x = 0$ ならば *Sto lemma* より $\lambda \in W_e(A)$.

② $x \neq 0$ ならば $\alpha_k = \left(\frac{A_k x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right)$, $z_k^i = \left(\frac{A_k y_i}{\|y_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|} \right)$

とおく. このとき

$$(z_1^i, \dots, z_n^i) \longrightarrow z = (z_1, \dots, z_n)$$

としてよい. 従って

$$\|y_i\|^2 \left(\frac{A_k y_i}{\|y_i\|}, \frac{y_i}{\|y_i\|} \right) + \|x\|^2 \left(\frac{A_k x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \longrightarrow \lambda_k$$

により

$$\varepsilon^2 z + \|x\|^2 \alpha = \lambda, \quad \text{そこで } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ である.}$$

λ が *extreme point* であることより $\lambda = \alpha$ 或 z .

(i) $\lambda = \alpha$ ならば $\lambda \in W(A)$.

(ii) $\lambda = z$ ならば $\lambda = \alpha$ をうるのだから $\lambda \in W(A)$.

以上により 定理は証明された.

References

1. A.T. Dash, Joint numerical range, *Glasnik Mat.*, 7 (1972), 75~81.
2. ———, Joint spectra, *Studia Math.*, 45 (1973), 225~237.
3. ———, Tensor products and joint numerical range, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40 (1973), 521~526.
4. ——— and M. Schechter, Tensor products and joint spectra, *Israel J. Math.*, 8 (1970), 191~193.
5. N.P. Deleker, Joint numerical range and joint spectrum of Hilbert space operators, Ph. D. thesis, Amsterdam, 1969.
6. G. Garske, The boundary of the numerical range of an operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 68 (1979), 605~607.
7. P. Juneja, On extreme points of the joint numerical range of commuting normal operators, *Pacific J. Math.*, 67 (1976), 473~476.
8. J.S. Lancaster, The boundary of the numerical range, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 49 (1975), 393~398.
9. M. Takaguchi and M. Chō, Boundary points of joint numerical range, preprint.
10. P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 1967.