数理解析研究所講究録
377巻 1980年 61-75

Operators の norm ideal perturbation について

北海道教育大　大久保 和義

1. $\mathcal{H}$ を separable Hilbert space とする。又 $B(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素環を表わすものとし、C_p ($p>0$) で Schatten の p-class. $T \in C_p$ のときに $\|T\|_p$ で T の p-norm を表わすこととする。以下で A, B, C, ... は $B(\mathcal{H})$ の元とする。1909年に H. Weyl は H が selfadjoint operator のときに、任意の $\varepsilon>0$ に対して

(*) $\begin{cases} \text{diagonal operator } D \text{ と compact operator } K \\ \text{が存在して } H = D + K \text{ かつ } \|K\| < \varepsilon \end{cases}$

とできることを示した。ついで von Neumann が 1935年に (*) での K は $K \in C_2$, $\|K\|_2 < \varepsilon$ とできることを示し、T. Kuroda により 1958年に $p>1$ で $K \in C_p$, $\|K\|_p < \varepsilon$ とできることが示された。一方、I.D Berg により T が normal operator のとき

$p>2$とすると

$$(**)\left\{\begin{array}{l}\text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対して. diagonal operator } D \\ \text{と } K\in C_p \text{ が存在して } T=D+K \text{ かつ } \|K\|_p<\varepsilon \\ \text{とできる。}\end{array}\right.$$

が示された。さらに T の spectrum が十分にうすいとき ($\sigma(T)$ が finite length の curve 上にあるとき) には $p=2$ のときでもよいことが証明された。最近 D. Voiculescu により、一般の normal operator で $p=2$ のときに ($**$) が成立することが示されたので、このことを紹介したい。次に、Fuglede-Putnam の定理、即ち N_1 N_2 を normal operator, X を任意の operator とするとき

$$N_1X=XN_2 \implies N_1^*X=XN_2^*$$

が成立するということを、$\mathcal{I}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal とするとき

$$N_1X-XN_2\in\mathcal{I} \overset{?}{\implies} N_1^*X-XN_2^*\in\mathcal{I}$$

ということを問題としたときに、知られている結果を述べる。ここでの結果は主に G. Weiss によるものである。

2. まず用いられる記号、用語の定義を述べる。
$\hat{c}$ を実数の finitely non-zero sequences の全体の集合として、Φ を $\hat{c}$ から $\mathbb{R}$ への symmetric gage function,

即ち Φ は
i) $\Phi(x) > 0 \quad (x \neq 0)$

ii) $\Phi(\alpha x) = |\alpha| \Phi(x)$

iii) $\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$

iv) $\Phi((1, 0, 0, \cdots)) = 1$

v) $\Phi((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = \Phi((|\xi_{\pi(j)}|))$

$(\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: automorphism$)$

を満たすとする。

$\mathcal{P}$、$\mathcal{R}$、$\mathcal{R}_1^+$ でそれぞれ finite rank projection 全体の集合、finite rank operators 全体の集合、finite rank positive contractions 全体の集合を表わすものとする。$T \in \mathcal{R}$ のとき $|T|_\Phi := \Phi((\lambda_j))$ $(\lambda_j \in \sigma_p(T^*T)^{1/2})$ として、$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\sup_{P \in \mathcal{P}} |TP|_\Phi < \infty$ のとき $T \in \mathfrak{S}_\Phi$ と定義して、このときも $|T|_\Phi := \sup_{P \in \mathcal{P}} |TP|_\Phi$ と表わす。実際 $\mathfrak{S}_\Phi$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal で $|\cdot|_\Phi$ に関して Banach space になることが知られている。$\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ で $\mathcal{R}$ の $|\cdot|_\Phi$ による closure を表わす。$\tau = (T_1, \cdots, T_n) \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^n$ とするとき

$$K_\Phi(\tau) := \liminf_{A \in \mathcal{R}_1^+} |[A, \tau]|_\Phi \quad \text{とする.}$$

（ここで $|[A, \tau]|_\Phi := \max_{1 \leq i \leq n} |[A, T_i]|_\Phi$ とする）

$\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を高々可算な基をもつ vector subspace とするとき $\mathcal{K}$ が Φ-well-behaved とは任意の $n \in \mathbb{N}$

任意の$\mathfrak{X}$の元．$T_1, \cdots, T_n$ に対して $K_\Phi(T_1, \cdots, T_n) = 0$ を満たすことをいう。

3．D. Voiculescu の結果

［補題 1］ $\mathfrak{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を Φ-well-behaved とする。このとき．任意の $\varepsilon > 0$，任意の $T_1, \cdots, T_n \in \mathfrak{X}$ に対して次の条件をみたす $\{B_m\}_{m=1}^{\infty} \subset R_1^+$ が存在する。

i） $\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 = I$

ii） $\sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T_j]|_\Phi \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n)$

iii） $\sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T]|_\Phi < \infty \quad (\forall T \in \mathfrak{X})$

（証明） $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathfrak{X}$ を張る operators とする。$\mathfrak{X}$ が Φ-well-behaved より $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset R_1^+$ が存在して $A_m \nearrow I$，$A_m A_{m+1} = A_m$，$\underbrace{|[A_m, T_j]|_\Phi}_{1 \leq j \leq m+n \text{ で}} \leq \varepsilon_m = (\varepsilon \times 2^{-11m})$ とできる。このとき $B_m = ((1-\frac{1}{m+1}) A_{m+1}^2 - (1-\frac{1}{m}) A_m^2)^{1/2}$ とおくと $A_{m+1} A_m = A_m$ を用いて

$B_m = ((1-\frac{1}{m+1}) I - (1-\frac{1}{m}) A_m^2)^{1/2} - (1-\frac{1}{m+1})^2 (1-A_{m+1})$

がいえる。ここで $X_m = (1-\frac{1}{m+1}) I - (1-\frac{1}{m}) A_m^2$ とおくと $1 \leq j \leq m+n$ で

$|[X_m, T_j]|_\Phi \leq 2\|A_m\| \, |[A_m, T_j]|_\Phi \leq 2 \cdot \varepsilon_m$ となり

$|[X_m^{1/2}, T_j]|_\Phi = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma z^{1/2} [(X_m - zI)^{-1}, T_j] \, dz \right|_\Phi$

（Γは適当な積分路）を用いて

$|[X_m^{1/2}, T_j]|_\Phi \leq 2^{9m} \varepsilon_m$ を出せる。 よって

$|[B_m, T_j]|_\Phi \leq \varepsilon \cdot 2^{-m} \quad (1 \leq j \leq m+n)$

故に $1 \leq j \leq n$ で

$$\sum_{m=1}^{\infty} |[B_m, T_j]|_\Phi \leq \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-m} = \varepsilon$$ がいえる。

iii) は $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ が $\mathcal{K}$ を span することと ii) を用いてすぐにいえる。

p を Calkin map とする。

[補題 2] $\mathcal{R}$ を unital な $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の $*$-subalgebra とする。$\mathcal{B}$ を高々可算な基をもつ $\mathcal{R}$ の $*$-subalgebra として ρ を $p(\mathcal{R})$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への unital $*$-homomorphism で $\rho(p(\mathcal{B}))$ が Φ-well-behaved とする。このとき、次の条件をみたす isometries $\{L_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する。

i) $L_i^* L_j = \delta_{ij} I$

ii) $L_j \rho(p(B)) - B L_j \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$

iii) $\lim_{j \to \infty} | L_j \rho(p(B)) - B L_j |_\Phi = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B})$

(証明) $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ を張るものとする。このとき補題 1 より $\{B_{ij}\} \subset \mathcal{R}_1^+$ が存在して、任意の自然数 i で

1) $\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^2 = I$

2) $\sum_{j=1}^{\infty} |[\rho(p(B_k)), B_{ij}]|_\Phi \leq 2^{-i} \quad (1 \leq k \leq i)$

3) $\sum_{j=1}^{\infty} |[\rho(p(B_k)), B_{ij}]|_\Phi < \infty \quad (\forall B \in \mathcal{B})$

とできる。このとき isometries $\{L_{ij}\}_{i,j}$ で
$L_{ij}^* L_{ij} = I$, $L_{ij}^* L_{rs} = 0$ ($(i,j) \neq (r,s)$)、かつ
$\sum_{j=1}^{\infty} \| L_{ij}\, \rho(p(B_k)) - B_k L_j \| \, |B_{ij}|_\Phi \leq \sum_{j \geq k+1} 2^{-i-j}$ をみたす
ものがあることがわかる。ここで $L_i = \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} B_{ij}$ とす
ると $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ が補題の条件をみたす。

［定理 3］ $\mathfrak{N}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の unital な C^*-subalgebra と
する。$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{N}$ の高々可算な基をもつ $*$-subalgebra とす
る。又 ρ を $p(\mathfrak{N})$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への unital $*$-homomorphism
で $\rho(p(\mathcal{B}))$ が Φ-well-behaved とする。
このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ への unitary operators $\{U_n\}$
が存在して

$$U_n^* (B \oplus \rho(p(B))) U_n - B \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim_n | U_n^* (B \oplus \rho(p(B))) U_n - B |_\Phi = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

とできる。

（証明） $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathcal{B}$ を span する selfadjoint operators
とする。今補題 2 を用いて isometries $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ があって

$$L_i^* L_j = \delta_{ij} I$$

$$B L_i - L_i \rho(p(B)) \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \quad (B \in \mathcal{B})$$

$$| B_k L_i - L_i \rho(p(B_k)) |_\Phi < 2^{-i} \quad (1 \leq k \leq i) \quad \cdots (1)$$

とできる。ここで

$S_j := I - \sum_{i=j}^{\infty} L_i L_i^* + \sum_{i=j}^{\infty} L_{i+1} L_i^*$ とおくと

$|[S_j, B_k]|_\Phi \leqq 4 \sum_{i=j}^{\infty} |L_i \rho(p(B_k)) - B_k L_i|_\Phi$ より

$[S_j, B_k] \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$ かつ $1 \leqq k \leqq j$ で $|[S_j, B_k]|_\Phi \leqq 2^{-j+3}$

今 $\{B_k\}$ が $\mathcal{B}$ を span するから

$$[S_j, B] \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim_{j\to\infty} |[S_j, B]|_\Phi = 0$$

ここで $U_n^* : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ を

$U_n^* := \begin{bmatrix} S_n & L_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると U_n^* は isometry

一方 S_n の定義より $S_n^* S_n = I - L_n L_n^*$ がいえて

$U_n^* U_n = \begin{bmatrix} S_n S_n^* + L_n L_n^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より U_n は isometry

故に U_n は unitary で定理の条件をみたす。

［系 4］ $\mathfrak{A}$ を unital C^*-algebra とする。

$\mathcal{B}$ を高々可算な基をもつ $\mathfrak{A}$ の $*$-subalgebra として

ρ_j $(j = 1, 2)$ を $\mathfrak{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への unital $*$-monomorphism

で $\rho_j(\mathcal{B})$ が Φ-well-behaved とする。さらに $\rho_j(\mathfrak{A})$

$\cap\, \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{0\}$ （ $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は compact operators 全体の集合）

とすると unitary operators U_n $(\in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ があり

$$U_n \rho_1(B) - \rho_2(B) U_n \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

$$\lim |U_n \rho_1(B) - \rho_2(B) U_n|_\Phi = 0 \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$ が成立。

（証明） 定理3より $\{W_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$; unitaries で $W_n^{(j)} \rho_j(B) - (\rho_1(B) \oplus \rho_2(B)) W_n^{(j)} \in \mathfrak{S}_{\Phi}^{(0)}$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} | W_n^{(j)} \rho_j(B) - (\rho_1(B) \oplus \rho_2(B)) W_n^{(j)} |_{\Phi} = 0$$

をみたすものがある。よって $V_n := W_n^{(2)*} W_n^{(1)}$ とおくとよい

4. 可換な selfadjoint operators の n-組について

$\mathbb{Z}^n$ 上の automorphism α_i $(1 \le i \le n)$ を

$$\alpha_i((m_1, \cdots, m_n)) := (m_1', \cdots, m_n')$$

$$m_j' = m_j + \delta_{ij}$$ と定義する。

又 $l^2(\mathbb{Z}^n)$ 上の unitary operator $U(\alpha_i)$ $(1 \le i \le n)$ を

$$U(\alpha_i) e_j := e_{\alpha_i(j)} \quad (j \in \mathbb{Z}^n)$$ で定義する。（ここで e_j は $l^2(\mathbb{Z}^n)$ の正規直交基とする。）

今 K_p で K_{Φ_p} $\left(\Phi_p((\xi_j)) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \text{とする}\right)$ を表わし，$|\cdot|_p$ で $|\cdot|_{\Phi_p}$ を表わすこととする。フーリエ変換での Hausdorff－Young の不等式を用いて次の命題がいえる。

［命題 5］ $n \ge 2$ とする。 このとき

$$K_p((U(\alpha_1), \cdots, U(\alpha_n))) = 0 \quad (n \le p < \infty)$$

が成立する。

次に，可換な selfadjoint operators の n-組についての結果をのべる。

［定理 6］　$n \geq 2$ とする。

$\delta = (D_1, \cdots, D_n)$ を可換な selfadjoint operators の n組とする。このとき 任意の $\varepsilon > 0$ に対して 可換な diagonal selfadjoint operators の n-組 $\delta' = (D_1', \cdots, D_n')$ があり $|\delta - \delta'|_n < \varepsilon$ とできる。

（証明） $\mathfrak{A} := C^*[D_1, \cdots, D_n, I]$ として $\mathfrak{A}$ の $*$-subalgebra $\mathcal{B}$ を $D_1, \cdots, D_n$ の polynomial 全体から成るものとする。今 ρ_1 を $\mathfrak{A}$ の identical representation. ρ_2 を $\mathfrak{A}$ の infinite multiplicity をもつ faithful representation とする。（ρ_2 は $\mathfrak{A} = C(X)$ ${}^\exists X$: compact で $\{x_i\} \subset X$: Countable dense set をとり $\mathfrak{A} \ni T \leftrightarrow f \in C(X)$ で $\alpha_i = f(x_i)$ とするとき T と (α_i) の diagonal operator（α_i はすべて無限回現われるとする）を同一視する）. このとき $k_n(\delta) = 0$ が示されれば $\mathcal{B}$ の定義より $\rho_i(\mathcal{B})$ が Φ_n-well-behaved がわかる。

$k_n(\delta) = 0$ は δ の spectral measure が Lebesgue measure に関して singular のときには次のようにしてわかる。実際に δ は cyclic vector $\xi \in \mathcal{H}$ をもつとしてよく．仮定より 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して 互いに disjoint な Borel sets $\{\omega_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ があり $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(\omega_k^{(j)}))^n < 1/j$

$\sum_{k=1}^{\infty} E(\omega_k^{(j)}) = I$　又 ある $n_j \in \mathbb{N}$ で

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_j} E(w_k^{(j)})\xi - \xi \right\| < 1/j$$ とできる。

今 P_j を $\mathbb{C}E(w_1^{(j)}) + \cdots + \mathbb{C}E(w_{n_j}^{(j)})\xi$ 上への projection とすると $1 \leq i \leq n$ で

$$[P_j, D_i] = \sum_{k=1}^{n_j} E(w_k^{(j)})[P_j, D_i]E(w_k^{(j)})$$ となり

$$\begin{aligned} |[P_j, D_i]|_n^n &= \sum_{k=1}^{n_j} |E(w_k^{(j)})[P_j, D_i]E(w_k^{(j)})|_n^n \\ &\leq 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n_j} (\mathrm{diam}\,(w_k^{(j)}))^n \\ &\leq 2^{n+1}/j \to 0 \quad (j \to \infty) \end{aligned}$$

又 $\{P_k\}$ の ある部分列で $P_{n_k} \uparrow I$ がわかり ~~定義~~ より $k_p(\delta) = 0$ がわかる。故に δ の spectral measure が Lebesgue measure に関して absolutely continuous としてよい

今 $A_j := \frac{1}{2}(U(\alpha_j) + U(\alpha_j)^*)$ $(1 \leq j \leq n)$ とすると $\sigma(A_1, \cdots, A_n) = ([-1, 1])^n \subset \mathbb{R}^n$ で $\sigma(A_1, \cdots, A_n)$ は Lebesgue measure に関して absolutely continuous かつ 命題 5 より $k_n(A_1, \cdots, A_n) = 0$ がわかる。

$\beta = (B_1, \cdots, B_n) = (A_1 \otimes I_{\mathcal{H}}, \cdots, A_n \otimes I_{\mathcal{H}})$ とおくと $k_n(\beta) = 0$ で β は infinite multiplicity をもつ

このとき $\|\delta\| \leq 1$ として $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$ (β_1 は δ に unitarily 同値)とできて、一般に $\max_{i=1,2} k_n(T_i) \leq k_n(T_1 \oplus T_2) \leq k_n(T_1) + k_n(T_2)$ $(T_i \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^n)$ がいえることより $k_n(\beta_1) = k_n(\delta) = 0$ がいえる。故に系 4 を用いて定理は示される。

[注意]. 一般に N を normal operator とするとき
$N = D_1 + iD_2$ (D_1, D_2 は selfadjoint operator で $D_1D_2 = D_2D_1$)
と表わされる。よって定理6を用いると. N は C_2 を法として diagonal operator と unitarily 同値なことがわかる。

5. Operator の norm ideal を法とする Fuglede-Putnam の定理に関して論ずる。もともとの Fuglede-Putnam の定理は N_1, N_2 を normal operators として. X を任意の operator とするとき

$$N_1X = XN_2 \Longrightarrow N_1^*X = XN_2^*$$ が成立する.

ということであった。これを拡張して. G. Weiss は. $\mathcal{I}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき. N_1, N_2, X を先の条件とするとき

$$N_1X - XN_2 \in \mathcal{I} \overset{?}{\Longrightarrow} N_1^*X - XN_2^* \in \mathcal{I}$$

という問題を考察した。実際にこの問題は通常の方法により N が normal operator, X を任意の operator として

$$NX - XN \in \mathcal{I} \overset{?}{\Longrightarrow} N^*X - XN^* \in \mathcal{I}$$

と同値であることが知られる。

- $\mathcal{I} = C_2$ のとき

[定理7] D を diagonal operator. $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とするとき $DX - XD \in C_2 \Longrightarrow D^*X - XD^* \in C_2$

かつこのとき　$\| DX - XD \|_2 = \| D^* X - X D^* \|_2$ が成立する。

（証明）　D, X を行列表示して、同じ basis により

$D = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$,　$X = (x_{ij})$　とする。

このとき　$DX - XD = ((\lambda_i - \lambda_j) x_{ij})$

$D^* X - X D^* = ((\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j) x_{ij})$　となる。

故に　$DX - XD \in C_2$　のとき

$$\| DX - XD \|_2^2 = \sum_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 |x_{ij}|^2$$
$$= \sum_{i,j} |\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j|^2 |x_{ij}|^2$$
$$= \| D^* X - X D^* \|_2^2$$

となり定理は証明できた。

［定理 8］　N を normal，$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$　とする。

このとき　$NX - XN \in C_2 \Longrightarrow N^* X - X N^* \in C_2$

（証明）　定理 6 より　$N = D + K$　（D は diagonal で $K \in C_2$ ）とできる。　このとき

$$NX - XN = (D+K)X - X(D+K)$$
$$= DX - XD + KX - XK$$　となり

$$NX - XN \in C_2 \Longrightarrow DX - XD \in C_2$$

よって定理 7 より　$D^* X - X D^* \in C_2$　がいえて

実際に　$N^* X - X N^* \in C_2$ がいえる。

しかし　Weiss の方法によると、定理 8 の条件があると

(＊＊＊)　$\| NX - XN \|_2 = \| N^* X - X N^* \|_2$　がわかる。

証明の方法は normal operator N を $\phi \in L^\infty(\mathbf{T})$ ($\mathbf{T}$ は torus)で $N = D \oplus M_\phi$ と分解する。ここで D は diagonal operator で M_ϕ は $L^2(\mathbf{T})$ 上の ϕ による multiplication である。次に(***) を示すためには.

$\| M_\phi X - X M_\phi \|_2 = \| M_\phi^* X - X M_\phi^* \|_2$ を示すとよいことがわかる。今 $\phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_n z^n$ とすると M_ϕ を行列表示して

$$(M_\phi)_{ij} = (M_\phi z^j, z^i) = \phi_{j-i} \quad \text{となる。}$$

又 $X = (x_{ij}) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbf{T}))$ として $F(z,w) := \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} x_{ij} z^i w^j$, $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbf{T})$ に対して

$$(\phi(z) + \psi(w)) * F(z,w) = \sum_{i,j} \Big(\sum_n (\phi_n x_{i-n,j} + \psi_n x_{i,j-n}) \Big) z^i w^j$$

とすると

$$\begin{aligned}
(M_\phi X - X M_\phi)_{ij} &= \sum_n \phi_n (x_{i+n,j} - x_{i,j-n}) \\
&= \sum_n \phi_n < (z^{-n} - w^n) F, z^i w^j > \\
&= < (\phi(\bar z) - \phi(w)) * F, z^i w^j >
\end{aligned}$$

同様に

$$(M_\phi^* X - X M_\phi^*)_{ij} = < \overline{\phi(\bar z) - \phi(w)} * F, z^i w^j > \quad \text{となる}$$

よって

$$\begin{aligned}
\| M_\phi X - X M_\phi \|_2^2 &= \sum_{i,j} | (M_\phi X - X M_\phi)_{ij} |^2 \\
&= \iint_{\mathbf{T}^2} |(\phi(\bar z) - \phi(w)) * F(z,w)|^2 dz\, dw
\end{aligned}$$

同様に

$$\| M_\phi^* X - X M_\phi^* \|_2^2 = \iint_{\mathbf{T}^2} |\overline{(\phi(\bar z) - \phi(w))} * F(z,w)|^2 dz\, dw$$

で、計算により、これらが等しいことがわかる。

norm ideal を法とする Fuglede - Putnam 型の定理は上述のように $\mathcal{I} = C_2$ で成立するほか、$\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ （$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は compact operators 全体の集合）でも成立することが容易に知られる。一方、$\mathcal{I} = C_p$ （$0 < p < 1$），$\mathcal{R}$ においては成立しないことが知られている。残されている問題としては

1. $\mathcal{I} = C_1$ で成立するか
2. $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{K}(\mathcal{H})$，$C_2$，$\{0\}$ 以外のどのような $\mathcal{I}$ で成立するか.
3. $\mathcal{I} = C_2$ で N : normal を $N^*N - NN^* \in C_2$ として成立するか

などがある。

References

[1] I. D. Berg, An extension of the Weyl von Neumann theorem to normal operators, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 365-371.

[2] B. A. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators, Proc. N. A. S. 36 (1950), 35-40.

[3] C. R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.

[4] D Voiculescu, Some results on norm- ideal perturbations of Hilbert space operators, J. Operator Theory 2 (1979) 3 -38.

[5] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions I, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 193 - 210.

[6] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions, Lecture note in Math. 693 (Springer).

[7] G. Weiss, The Fuglede commutativity theorem modulo operator ideal, (preprint).