数理解析研究所講究録
377巻 1980年 50-60

DENSE RANGE をもつ作用素による INTERTWINING

東北大 教養部　　斎藤偵四郎

§1．序論　この報告は呉屋－斎藤による講演「invariant subspace problemに関連した dominant operator についての最近の結果」に対する補足であり，呉屋氏との共同研究によるものである。Stampfli－Wadhwa［8］によってはじめられた dominant operator の quasi－affine transform の研究に関連して若干の結果を証明し，大久保［3］の議論の見直しをするのが本稿の目的である。

以下で取り扱うのはすべて Hilbert space 上の bounded linear operators で，単に operators と呼ぶことにする。Hilbert space H 上の operators 全体を $\mathcal{B}(H)$ と書き，$T\in\mathcal{B}(H)$ に対してその spectrum を $\sigma(T)$ と表わすことにする。$T\in\mathcal{B}(H)$ がすべての $\lambda\in\sigma(T)$ に対して

$$\mathrm{range}\,(T-\lambda)\subset\mathrm{range}\,(T-\lambda)^*$$

をみたすとき，$T\in\mathcal{B}(H)$ を dominant operator という。Douglas［1］によれば，この条件は，任意の $\lambda\in\sigma(T)$ に対

して正数 M_λ が存在して，すべての $x \in H$ に対して

$$\|(T-\lambda)^* x\| \leqq M_\lambda \|(T-\lambda)x\|$$

となることと同値である。したがって，dominant operator は hyponormal operator の概念の拡張とみることができる。

$T \in \mathcal{B}(H)$ がすべての $x \in H$ に対して

$$\|Tx\|^2 \leqq \|T^2 x\| \|x\|$$

をみたすとき，T を paranormal operator という。これも hyponormal operator の一般化であることはよく知られている（例えば [5]）。$S \in \mathcal{B}(H)$ が $T \in \mathcal{B}(H)$ の quasi-affine transform であるとは

$$TW = WS$$

をみたす injective で dense range をもつ operator $W \in \mathcal{B}(H)$ が存在することである。また，このような W を quasi-affinity であるという。

dominant operator の quasi-affine transform や関連した問題については，最近多くの研究があるが，これらについては呉屋－斎藤の講演の文献を参照されたい。

§2. 定理　dominant の性質は translation $T-\lambda$ ($\lambda \in \sigma(T)$) によって不変であるため，local resolvent の議論が有効な働きをする [8], [9]。しかし，paranormal の性質

はtranslationで保存されないから、そのquasi-affine transformに関わる問題については解析的な議論にかわる代数的な手法が要求される。次の定理はその1つの試みであり、[8]の主定理の代数的な定式化とみなすことができる。

定理1　$T, S, W \in \mathcal{B}(H)$ で W はdense rangeをもち

$$TW = WS, \quad T^*W = WS^*$$

をみたすとする。このとき、次の命題が成り立つ。

(i)　S がhyponormal（またはcohyponormal）ならば、T もhyponormal（またはcohyponormal）である。

(ii)　S がisometric（またはcoisometric）ならば、T もisometric（またはcoisometric）である。

(iii)　S がnormal（またはunitary）ならば、T もnormal（またはunitary）である。

証明　$W^* = V^*B$ を W^* のpolar decompositionとする。W はdense rangeをもつから W^* はinjective，従って $B^2 = WW^*$ はinjectiveで V はcoisometricである。$TW = WS$，$T^*W = WS^*$ より，

$$TWW^* = WSW^* = WW^*T$$

よって，WW^* は T と可換で，B も T と可換である。故に，

$$BTV = TBV = TW = WS = BVS$$

B がinjectiveだから，$TV = VS$ となる。V がcoisometric

なることから，

$$T = TVV^* = VSV^*$$

$W^*T = SW^*$, $TB = BT$ より

$$V^*TB = V^*BT = W^*T = SW^* = SV^*B,$$

よって $V^*T = SV^*$ となる。故に

$$V^*VS = V^*TV = SV^*V$$

これより，

$$T^*T = (VSV^*)^*(VSV^*) = VS^*SV^*$$

$$TT^* = (VSV^*)(VSV^*)^* = VSS^*V^*$$

が得られる。

(i) $S^*S \geqq SS^*$ (または $SS^* \geqq S^*S$) とすれば

$$T^*T = VS^*SV^* \geqq VSS^*V^* = TT^*$$

(または，$TT^* = VSS^*V^* \geqq VS^*SV^* = T^*T$)

(ii) S が isometric (または coisometric) のときも，

$$T^*T = VS^*SV^* = VV^* = I$$

(または，$TT^* = VSS^*V^* = VV^* = I$)

(iii) (i)，(ii) から明らかである。

注意．定理 1 において，W が quasi-affinity であれば，V は unitary operator であるから，V は T と S の unitary 同値性を与える。

また，定理 1 の仮定のもとで，S が dominant であれば

Tも dominantとなることは証明から容易にわかる。

次の定理は大久保[3 : Proposition]の一般化になっている。

定理2 $T, V, W \in B(H)$ でTは paranormal contraction，Vは coisometry でWは dense range をもつとする。もし，$TW = WV$が成り立てば，Tは unitary operator である。

証明 $Wx \neq 0$なる$x \in H$を任意にとり，

$$y_n = WV^{*n}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおく。このとき，

$$Ty_{n+1} = TWV^{*n+1}x = WVV^{*n+1}x = WV^{*n}x = y_n$$

$\|T\| \leqq 1$だから

$$\|y_n\| = \|Ty_{n+1}\| \leqq \|y_{n+1}\| = \|WV^{*n+1}x\| \leqq \|W\|\|x\|$$

故に$\{\|y_n\|\}$は単調増加の収束列である。Tが paranormal だから

$$\|y_n\|^2 = \|Ty_{n+1}\|^2 \leqq \|T^2y_{n+1}\|\|y_{n+1}\| = \|y_{n-1}\|\|y_{n+1}\|$$

よって，

$$1 \geqq \frac{\|y_0\|}{\|y_1\|} \geqq \frac{\|y_1\|}{\|y_2\|} \geqq \cdots \quad \geqq \frac{\|y_{n-1}\|}{\|y_n\|} \longrightarrow 1 \ (n \to \infty)$$

特に，$\|y_0\| = \|y_1\|$ すなわち

$$\|Wx\| = \|WV^*x\|$$

が成り立つ。故に，

$\|WV^*x\| = \|Wx\| = \|WVV^*x\| = \|TWV^*x\| \leqq \|WV^*x\|$,

よって，$\|WV^*x\| = \|Wx\| = \|TWV^*x\|$. これは $Wx = 0$ なる $x \in H$ についても明らかに成立するから，任意の $x \in H$ について

$$\begin{aligned}\|T^*Wx - WV^*x\|^2 &= \|T^*Wx\| + \|WV^*x\| \\ &\quad - (T^*Wx, WV^*x) - (WV^*x, T^*Wx) \\ &\leqq 2\|Wx\|^2 - (Wx, TWV^*x) - (TWV^*x, Wx) \\ &= 2\|Wx\|^2 - (Wx, WVV^*x) - (WVV^*x, Wx) \\ &= 2\|Wx\|^2 - 2\|Wx\|^2 = 0\end{aligned}$$

となり，$T^*W = WV^*$ が成り立つ。定理 1 により T は coisometry である。仮定から T は paranormal だから，T は unitary となる [6].

注意　W が quasi-affinity ならば V も unitary である。なお，大久保 [3] は V が unitary として定理 2 を証明した。

系 2．1　$T \in \mathcal{B}(H)$ が paranormal contraction で，$V \in \mathcal{B}(H)$ が coisometry のとき，$TW = WV$ なる nonzero operator $W \in \mathcal{B}(H)$ が存在すれば，T は nontrivial invariant subspace をもつ。

証明　range W の閉包を $\mathfrak{M}$ とおく．$W \neq 0$ より $\mathfrak{M} \neq \{0\}$．従って，$\mathfrak{M} \neq H$ ならば $\mathfrak{M}$ が求める invariant subspace とな

る。$\mathfrak{M}=H$ ならば，W は dense range をもつから，定理２より T は unitary operator となり，T は nontrivial invariant subspace をもつ。

注意　この系と類似のものとして，次の結果が知られている。

(1)　$T\in\mathcal{B}(H)$ が dominant で $N\in\mathcal{B}(H)$ が normal のとき，$TW=WN$ なる nonzero operator W が存在あれば，T は nontrivial invariant subspace をもつ [8]．

(2)　$T\in\mathcal{B}(H)$ が dominant で $S\in\mathcal{B}(H)$ が cohyponormal のとき，$TW=WS$ なる injective operator $W\in\mathcal{B}(H)$ が存在あれば，T は nontrivial invariant subspace をもつ（[7] を参照）．実際，[7] では T が hyponormal としてこの結果を証明したが，[9 ; Theorem 1] を用いれば dominant としてもよいことが簡単にわかる。

§3　応用　前節の議論を用いて次の定理を示す。これは paranormal の場合は大久保 [3] で証明され，dominant の場合には Stampfli-Wadhwa [9] に述べられている。しかし [9] の命題の記述には誤りがある。

定理３　$T\in\mathcal{B}(H)$ を contraction とし，

$$\mathfrak{M}=\{x\in H \mid \|T^{*n}x\|\to 0\ (n\to\infty)\}$$

とおく。もしTが paranormal または dominant であれば，$\mathfrak{M}$はTの reducing subspace で，$T|\mathfrak{M}$ は completely non-unitary，$T|\mathfrak{M}^{\perp}$は unitary である。

定理3を示すために，次の2つの簡単な補題を必要とする．

補題1　$T \in \mathcal{B}(H)$ が dominant で $\mathfrak{M} \subset H$ がTの invariant subspace のとき，$T|\mathfrak{M}$ が normal operator ならば$\mathfrak{M}$はTを reduce する。

証明　[4 ; Theorem 4] または [9 : Lemma 2] を参照．

補題2　$T \in \mathcal{B}(H)$ が contraction で $\mathfrak{M} \subset H$ がTの invariant subspace のとき，$T|\mathfrak{M}$ が coisometry ならば，$\mathfrak{M}$はTを reduce する。

証明　$S = T|\mathfrak{M}$ とおく．$x \in \mathfrak{M}$ とすると S^* が isometric だから

$$\begin{aligned}\|S^*x - T^*x\|^2 &= \|S^*x\|^2 + \|T^*x\|^2 \\ &\qquad - (S^*x, T^*x) - (T^*x, S^*x) \\ &\leqq \|x\|^2 + \|x\|^2 - (TS^*x, x) - (x, TS^*x) \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - \|S^*x\|^2 - \|S^*x\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0\end{aligned}$$

故に，任意の $x \in \mathfrak{M}$ に対して $T^*x = (T|\mathfrak{M})^*x \in \mathfrak{M}$ となり，$\mathfrak{M}$はT^*で invariant である。

定理3の証明　$\|T\| \leqq 1$ だから，$\{T^n T^{*n}\}$ はある positive contraction に強収束する。そこで

$$A = (\lim_{n\to\infty} T^n T^{*n})^{1/2}$$

とおく。このとき，$\mathfrak{M} = \ker A$ で $TA^2T^* = A^2$ である。

$$\|AT^*x\|^2 = (TA^2T^*x, x) = (A^2x, x) = \|Ax\|^2$$

がすべての $x \in H$ について成り立つから，

$$AT^* = WA, \quad W|\mathfrak{M} = 0$$

なる partial isometry W が存在する。いま，$AT^* = WA$ の関係を $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^\perp$ 上の operator matrix として表わせば，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

となる（$\mathfrak{M}^\perp$ が T で invariant であることを注意せよ）。故に，

$$A_1 S_3 = W_1 A_1 \quad \text{または} \quad S_3^* A_1 = A_1 W_1^*$$

である。ここで，$A_1 = A|\mathfrak{M}^\perp$ が quasi-affinity で $W_1 = W|\mathfrak{M}^\perp$ が isometry であることに注意しておく。

(1) T が paranormal と仮定する。このとき，$S_3^* = T|\mathfrak{M}^\perp$ は paranormal だから，定理2より S_3^* は unitary である。故に，補題2より $\mathfrak{M}^\perp$ は T を reduce する。$T|\mathfrak{M}$ が completely nonunitary であることは明らかである。

(2) T が dominant と仮定する。S_3^* は dominant で W_1^* が coisometric だから，S_3^* と W_1^* は，[9: Theorem 1]

および定理1のあとの注意により，unitary 同値な normal operator である。故に，補題1より $\mathfrak{M}^{\perp}$ は T を reduce する。W_1 は normal かつ isometric だから，W_1 は unitary，従って S_3 も unitary である。

注意　定理3で，A は $\mathfrak{M}^{\perp}$ 上への projection である。この事実は，paranormal の場合については大久保[3]が示した（また，[10]を参照せよ）。

系3.1　$T\in\mathcal{B}(H)$ を dominant または paranormal contraction とする。もし

$$\|T^{*n}x_0\|\geq\varepsilon>0\quad(n=1,2,\cdots)$$

なる $x_0\in H$ が存在すれば，T は nontrivial invariant subspace をもつ。

証明　$\mathfrak{M}=\{x\in H\mid\|T^{*n}x\|\to 0\ (n\to\infty)\}$ とおくと，仮定により，$\mathfrak{M}\neq H$ すなわち $\mathfrak{M}^{\perp}\neq\{0\}$ である。定理3より，

$$T=T_1\oplus U,\quad U=T|\mathfrak{M}^{\perp}\ \text{は unitary}$$

となるから，T は nontrivial invariant subspace をもつ。

参考文献

[1] R.G.Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 413 - 415

[2] E.Goya and T.Saitô, On intertwining by an operator having a dense range, preprint

[3] K.Okubo, The unitary part of paranormal operators, Hokkaido Math. J. 6 (1977), 273 - 275

[4] M.Radjabalipour, On majorization and normality of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), 105 - 110

[5] T.Saitô, Hyponormal operators and related topics, Lecture Notes in Math. 247, Springer-Verlag, 1972, 534 - 665

[6] T.Saitô, On a theorem by S.M.Patel, Rev. Roumaine Math. pures et appl. 21 (1977), 1407 - 1409

[7] J.G.Stampfli, A local spectral theory for operators, V, Trans. Amer. Math. Soc. 217 (1976), 285 - 296

[8] J.G.Stampfli and B.L.Wadhwa, an asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operators, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 359 - 365

[9] J.G.Stampfli and B.L.Wadhwa, On dominant operators, Monatshefte für Math. 84 (1977), 143 - 153

[10] T.Yoshino, On the unitary part of paranormal contractions, preprint