

Invariant subspace problem に関連した dominant operator についての最近の結果

琉球大教員 吳屋永徳

東北大教員 斎藤貞四郎

§1. 序論 1976 年に Stampfli - Wadhwa [13] によって始められた dominant operator の理論は, その後 Dunford の local spectral theory と quasi-affine transform と関連するものとして, 多くの人々によって研究されてゐる。この問題はそれまでの Stampfli [2], Putnam ([5], [6], [7]) 等による hyponormal operator の研究の発展として興味深い。ここではその生い立ちから最近までの結果を整理し, 主として次の二点に絞って述べることにする。

(1) dominant operator T の quasi-affine transform, すなわち $TW = WS$ ($W: 1:1$ で dense range をもつ) またはその類似的変換における結果

(2) spectral subspace $X_T(\delta)$ が T の non-trivial な不変部分空間となる条件について, Stampfli, Radjabali pour,

Clancey の結果を総合的にまとめたもの

§2. まず dominant operator の生い立ちから述べよう。

$B(H)$ をヒルベルト空間 H 上の bounded operator の作る代数とする。 $T \in B(H)$ について は 次の記号を用いる。

$\sigma(T)$; T の spectrum

$\rho(T)$; T の resolvent $= \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$

$\sigma_p(T)$; T の point spectrum

$\sigma_c(T)$; T の continuous spectrum

$\text{range } [T] = \{Tx \mid x \in H\}$

$\ker [T] = \{x \in H \mid Tx = 0\}$

$T, S \in B(H)$ について, Douglas [3] は 次の三つの命題は同値であることを示した。

$$(1) \text{ range } [T] \subseteq \text{range } [S].$$

$$(2) \exists \mu \geq 0; TT^* \leq \mu^2 SS^* \iff \|T^*x\| \leq \mu \|S^*x\| \ (\forall x \in H).$$

$$(3) \exists C \in B(H); T = SC, \|C\| \leq \mu.$$

T が hyponormal operator ならば, $\forall \lambda \in \sigma(T)$ に対して,

$$\|(T-\lambda)^*x\| \leq \|(T-\lambda)x\| \quad \forall x \in H \text{ が成り立つ。これは (2) にありて,}$$

T, S, μ がそれぞれ $(T-\lambda), (T-\lambda)^*, 1$ となった特別の場合であるから, Douglas の (1), (2) の同値性より

$$(4) \text{ range } [(T-\lambda)] \subseteq \text{range } [(T-\lambda)^*] \quad (\lambda \in \sigma(T))$$

が成り立つ。(4) を満たす operator T を Stampfli - Wadhwa [13]

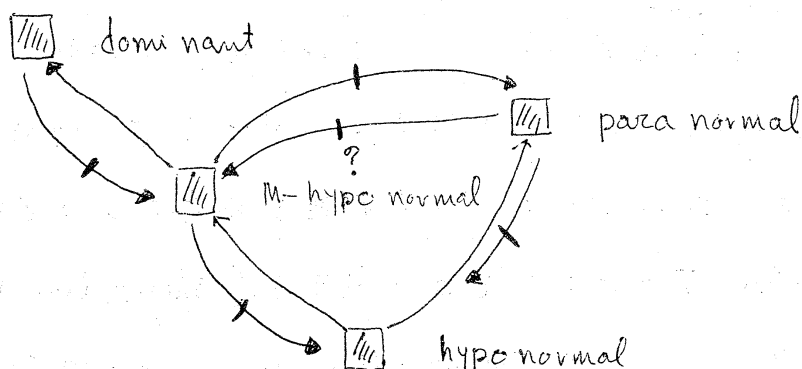
は dominant と名づけた。(4) は $\lambda \in \rho(T)$ に対し T は常に成立つから Douglas の結果により,

$$T \text{ dominant} \iff (5) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists M_\lambda \geq 0; \|(T-\lambda)^*x\| \leq M_\lambda \|(T-\lambda)x\| \quad (\forall x \in H).$$

である。 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ とし特に有界なもの M とし B とし、すなわち $\exists M \geq 0; \|(T-\lambda)^*x\| \leq M \|(T-\lambda)x\|$ for all $x \in H$ ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$) のとき, operator T は M -hyponormal といい、hyponormal operator は 1-hyponormal operator のことである。 T は hyponormal operator のとき,

$$(6) \quad \|Tx\|^2 \leq \|T^*x\| \|x\| \quad (\forall x \in H)$$

となるが、(6) が成立する operator T は paranormal と呼ばれている。hyponormal operator, M -hyponormal operator, dominant operator, paranormal operator の関係を図示するのは次の通り (T. Saito [11], Stampfli-Wadhwa [13], [15])



T is dominant operator とすれば, (5) より $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma_p(T^*)$ である.

== T $\overline{\sigma_p(T)} = \{\lambda \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$ ($\bar{\lambda}$ は λ の共役複素数) である.

また $\lambda \in \sigma_p(T)$ ならば $m_\lambda = \ker[T - \lambda]$ は T の reducing subspace であり, $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$ ならば $m_\lambda \perp m_\mu$ となる.

従って $m = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} m_\lambda$ は T の reducing subspace であり,

$$T = T|_m \oplus T|_{m^\perp}$$

とわかる. ここに $T|_m$ は normal operator であり $T|_{m^\perp}$ は dominant であり, $\sigma_p(T|_{m^\perp}) = \emptyset$ である.

dominant operator T の取り扱いにおいて, normal の部分 $T|_m$ の処理がたえず問題になる. Putnam [5] はこの面で極めて重要な役割を演ずる. 実際それより導かれる次の結果は正に dominant operator を論ずるときに要である.

Theorem A $T = \int \lambda E(d\lambda)$ を normal operator T のスペクトル分解で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする. このとき,

$$(a) \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range}[(T - \lambda)] = E(\delta)H (= X_T(\delta) = \text{spectral subspace})$$

$$(b) f: \mathbb{C} \setminus \delta \longrightarrow H \text{ の function, } (T - \lambda)f(\lambda) \equiv \lambda \text{ ならば,}$$

$\exists$ analytic funct. $g: \mathbb{C} \setminus \delta \longrightarrow H$ s.t. $(T - \lambda)g(\lambda) \equiv \lambda$ である.

注意 (b) において f に有界性を仮定すれば dominant-operator T に対して (b) は成立つ (Stampfli - Wadhwani [14]).

§ 3. ここでは quasi-affine transform の問題を取扱う.

$W \in B(H)$ が injective であり dense range を持つとき, quasi-

affinity と"う。 $S \in B(H)$ から $T \in B(H)$ の quasi-affine transform とは $TW = WS$ となる quasi-affinity W が存在するときを"う。 $TW = WS$ (T : dominant) とする。 W が dense-range をもつか, または quasi-affinity のとき S の性質がどの程度 T に伝わるかを調べよう。 まず S が normal のときから始める。

Theorem 1 (Stampfli-Wadhwa [13])

(1) $T, S \in B(H)$ で, T が dominant operator で S は normal operator とする。

(2) $TW = WS$ で, $W \in B(H)$ は dense range をもつとする。
このとき,

(1) $W^*WS = SW^*W$ で T は normal operator である。

(2) W が quasi-affinity ならば, T と S は ± 1 - 同値である。

証明 まず $W^*WS = SW^*W$ を示そう。 $S = \int \lambda E(d\lambda)$ を normal S の spectral 分解で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とし, $S_\delta = S/E(\delta)H$ とする。 $\sigma(S_\delta) \subset \delta$ であるから $\rho(S_\delta) \subset \mathbb{C} \setminus \delta$ となる。 したがって $\forall x \in E(\delta)H$ に対して, $f(\lambda) = (S_\delta - \lambda)^{-1}x$ は $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の analytic function でかつ, $(S - \lambda)f(\lambda) \equiv x$ である。 条件 (2) より

$$(T - \lambda)Wf(\lambda) = W(S - \lambda)f(\lambda) \equiv Wx \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta)$$

である。 このことから T の dominant 性より

$$Wx \in \text{range} [(T-\lambda)] \subseteq \text{range} [(T-\lambda)^*] \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta)$$

ととり, $Wx = (T-\lambda)^* y_\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta$) とかける. 条件 (2) と S の normal 性より

$$\begin{aligned} W^* W x &= W^* (T-\lambda)^* y_\lambda = (S-\lambda)^* W^* y_\lambda \in \text{range} [(S-\lambda)^*] \\ &= \text{range} [(S-\lambda)] \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta) \end{aligned}$$

である. したがって Theorem A (a) により

$$W^* W x \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range} [(S-\lambda)] = E(\delta)H \quad (\forall x \in E(\delta)H)$$

ととり, $E(\delta)W^* W x = W^* W x$ ($\forall x \in E(\delta)H$) を得る. 従って,

$$W^* W E(\delta) = E(\delta)W^* W E(\delta) = E(\delta)W^* W$$

ととる. これは $\mathbb{C}$ の open set δ に対して成立つから spectral measure $E(\cdot)$ の regularity により $W^* W S = S W^* W$ となる. また, W が dense range を持つと,

$$W^* T W = W^* W S = S W^* W$$

より, $W^* T = S W^*$ または $T^* W = W S^*$ を得る. T の normality と結論 (2) の証明は ϵ と一般的な設定の ϵ として Theorem 6 で取扱う.

注意 (1) Theorem 1 において W が dense range を持つという仮定はおとせたい.

(2) $S W = W T$ のとき, S が normal かつ T が dominant かつ T が normal になることは知られている. (Stampfli - Wadhwani [13]).

次に S が cohyponormal (すなわち S^* が hyponormal) opera-

for α is the same.

Theorem 2 (Stampfli - Nadhwa [14])

(1) $T, S \in B(H)$ with T a dominant operator and S a co-hyp-normal operator.

(2) $TW = WS$ with $W \in B(H)$ is 1:1 with dense range.

T, S are unitarily equivalent normal operators.

証明 S の normality を示せばよい。 S^* は hypo normal であるから、 $S S^* - S^* S = D^2$ ($D \geq 0$) とかける。 $D = 0$ を示せばよい。 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $D^2 \leq (S - \lambda)(S - \lambda)^*$ であるから Douglas の同値性より $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $D = (S - \lambda)C_\lambda$, $\|C_\lambda\| \leq 1$ となる $C_\lambda \in B(H)$ が存在する。 $D \neq 0$ ならば、 $x = Dy \neq 0$ となる $x, y \in H$ がある。 $f(\lambda) = C_\lambda y$ とおけば、 $f(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上の有界なベクトル値関数で、 $(S - \lambda)f(\lambda) \equiv x$ である。条件 (2) より、 $(T - \lambda)Wf(\lambda) \equiv Wx$ ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$) で $Wf(\lambda)$ は有界だから、

Theorem A 注意により $\mathbb{C}$ 上で analytic なベクトル値関数 $g(\lambda)$ があって、 $(T - \lambda)g(\lambda) \equiv Wx$ である。 $|\lambda| > \|T\|$ ならば、 $g(\lambda) = (T - \lambda)^{-1}Wx$ で $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (T - \lambda)^{-1}Wx = 0$ 故に Liouville の定理により $g(\lambda) \equiv 0$ となり $Wx = 0$ または $x \in \ker[W]$ を得る。 W は 1:1 であるから $x = 0$ となって仮定に反する。

Radjabalipour は S の normality は次の Theorems 3, 4 の

ように若干条件をゆるめても導けることを示した。

Theorem 3 (Radjabali pour [9])

S が com -hyponormal (すなわち S^* が M -hyponormal) operator としても Theorem 2 の結果は成立つ。

略証 Radjabali pour [9] により, 十分小さい $k > 0$ に対して, $(S-\lambda)(S-\lambda)^* \geq (k|S S^* - S^* S|) (\forall \lambda \in \mathbb{C})$ が成立つ。したがって $D = k|S S^* - S^* S|$ として Theorem 2 の証明をくり返せば $D = 0$ となる。

Theorem 4 (Radjabali pour [8])

Theorem 2 において W の 1:1 の仮定を $\dim(\ker[W]) < +\infty$ でおきかえても S は normal operator となる。

略証 Theorem 2 の証明において $x = Dy$ のとき, $x = 0$ を示せばよい。 $x \in \ker[W]$ は示されてゐる。 y を含み T , S , W , D を reduce する H の可分的な subspace は存在するから, あらかじめ H を可分的と仮定する = とか出来る。実際 M を $\{T, T^*, S, S^*, W, W^*, D, I\}$ で生成された代数的半群とするとき, M は可算集合で, H_i を $\{ky \mid k \in M\}$ を含む最小の closed subspace とするとき, H_i が求める可分的な subspace である。 H の可分性と T の dominant 性より $\sigma_p(T)$ は可算集合である。また $\ker[W]$ は S -不変部分空間であるから, $S_1 = S/\ker[W]$ で $h(\lambda) = (S_1 - \lambda)^{-1}x$ とおけば, $h(\lambda)$ は $P(S_1)$ 上の

- 8 -

analytic function で, f の有界性と $\sigma_p(T)$ の可算性より $h(\lambda)$ は $\rho(S)$ 上で有界となり, $\sigma(S)$ は有限集合だから $\mathbb{C}$ 上で analytic となる。再び Liouville の定理により $h(\lambda) \equiv 0$ となる。

よって $\lambda = 0$ を得る。詳細は Radjabalipour [8] 参照

Theorem 1 の問題 $TW = WS$ において, T を dominant とするとき, S の normality から T の normality を導くには W が dense range を持つことが必要だった。ここでは W にどのような条件があれば, $\dim(\ker[W]) < +\infty$ だけから W が dense range を仮定せず T の normality が導けるかを考えてみる。

Theorem 5 $TW = WS$ で T が dominant operator で, S は COM-hypnormal (すなわち S^* が M-hypnormal) operator とする。このとき, W が normal operator で, $\dim(\ker[W]) < +\infty$ ならば, T, S は共に normal operator である。

証明 Theorems 3, 4 より S は normal である。 T の normality を示そう。 $\mathcal{M} = \overline{WH} (= \overline{W^*H})$ とおけば $\mathcal{M}^\perp = \ker[W]$ である。 $TW = WS$ より $\mathcal{M}^\perp$ は S -不変な部分空間である。 $S/\mathcal{M}^\perp$ は dominant で $\dim(\mathcal{M}^\perp) < +\infty$ だから, $S/\mathcal{M}^\perp$ は normal となる。Lemma 2 in [3] により, $\mathcal{M}^\perp$ すなわち $\mathcal{M}$ は S の reducing subspace である。 $\mathcal{M}$ は T, S, W -不変な部分空間であるから, $(T/\mathcal{M})(W/\mathcal{M}) = (W/\mathcal{M})(S/\mathcal{M})$ となる。

$S/\mathcal{M}$ は normal で $T/\mathcal{M}$ は dominant で, $W/\mathcal{M}$ は dense

range を持つから Theorem 1 によって T/M は normal となる。
 よって M は T の reducing subspace となる。また, $T/M^\perp$ は
 dominant で, $\dim(M^\perp) < +\infty$ だから $T/M^\perp$ は normal となり,
 $T = T/M \oplus T/M^\perp$ も normal となる。

Stampfli - Wadhwa は Theorem 1 を証明した後で次の問題を
 を提示した。

$TW = WS$ で T は hyponormal で S は cohyponormal とするとき,
 W が dense range を持てば, T は normal となるか。
 この問題は Theorem 2 によって肯定的に解決されている。実
 際 $TW = WS$ より $S^*W^* = W^*T^*$ で S^* は hyponormal, T^* は cohyponormal
 で W^* が $1:1$ となるからである。Theorems 3, 4, 5 に
 よって更に次の結果が証明できる。

Covollary $TW = WS$ で T は M -hyponormal operator で
 S^* は dominant operator とする。このとき,
 $\dim(\ker[W^*I]) < +\infty$ ならば, T は normal operator である。更
 に W が normal operator ならば S も normal operator である。

証明 $TW = WS$ より $S^*W^* = W^*T^*$ となる。前半は Theorems
 3, 4 より後半は Theorem 5 より得られる。

再び $TW = WS$ (W : dense range) を考える。この条件
 のもとでは,

$$W^*WS = SWW \iff T^*W = WS^*$$

である。従つて Theorem 1 により T が dominant で S が normal ならば, Putnam-Fuglede 型の結果すなわち,

$$TW = WS \text{ ならば } T^*W = WS^*$$

が得られる。 S が coisometry で T が paranormal のときも同じ結果が得られるが S が normal のときは未解決である。ここでは $TW = WS$ と $T^*W = WS^*$ の条件を対にして考えたとき, S の性質がどの程度 T に伝わるかを調べる。次の定理の証明と応用については斎藤氏の「DENSE RANGE をもつ作用素に関する INTERTWINING」を参照。

Theorem 6 $T, S, W \in B(H)$ で W は dense range をもち $TW = WS, T^*W = WS^*$ をみたすとする。このとき, 次の命題が成立つ。

- (1) S が hyponormal (または cohyponormal) ならば, T も hyponormal (または cohyponormal) である。
- (2) S が isometric (coisometric) ならば, T も isometric (coisometric) である。
- (3) S が normal (または unitary) ならば, T も normal (または unitary) である。

注意 W が quasi-affinity ならば, T と S は $E = D$ リー同値である。

§ 4. 不変部分空間の問題を取扱う。 dominant operator T

は single-valued extension property (略して S.V.E.P. とかく) をもつ。すなわち, 任意の open set $D_f \subset \mathbb{C}$ 上の analytic なベクトル値関数 f に対して, $(T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0$ ならば, $f(\lambda) \equiv 0$ である。よって $\forall$ closed set $\delta \subset \mathbb{C}$ に対して T -不変な linear manifold である spectral subspace $X_T(\delta)$ は定義されるが, どんな T と δ に対して $X_T(\delta)$ は T の non trivial な不変部分空間になるか。ここではこの問題を考える。以後特に二とゆうなりかぎり T は dominant とし, $\delta \subset \mathbb{C}$ は closed とする。まづいくつかの定義を述べよう。詳細は [1], [4] 参照。

定義 $x \in H$ とし, f を平面上の open set $D_f(\subset \rho(T))$ 上の analytic なベクトル値関数で, $(T-\lambda)f(\lambda) \equiv x$ とする。かかる f の中で D_f の最大のものを $\hat{x}(\lambda)$ とかく。 $\rho_T(x) = D_{\hat{x}}$ を x のレゾルベント set, $\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ を x のスペクトラムとしよう。またすべての $x \in H$ と $\lambda \in \rho_T(x)$ に対して,

$$\|\hat{x}(\lambda)\| \leq \frac{\|x\|}{\text{dist}[\lambda, \sigma_T(x)]}$$

が成立つとき, T は local growth condition (略して L.G.C.) とかく) をみたすという。 T が (L.G.C.) をみたせば, $\sigma(T)$ に対する通常の growth condition (G_T) をみたすことは明らかである。 $X_T(\delta) = \{x \in H : \sigma_T(x) \subset \delta\}$ によって spectral-subspace を定義すれば, 容易に $X_T(\delta) = \{x \in H : (T-\lambda)g(\lambda) \equiv x \text{ をみたす } \mathbb{C} \setminus \delta \text{ 上の analytic なベクトル値関数 } g(\lambda) \text{ が存在}\}$

であることがわかる。また、すべての δ に対して $X_T(\delta)$ が closed のとき、 T は Dunford の条件 (C) をみたすという。このとき、次の結果が知られている。

proposition 7 (3.8. proposition in [1] p. 23)

T が条件 (C) をみたすならば、 $\sigma(T/X_T(\delta)) \subset \delta \cap \sigma(T)$ である。特に $\delta \cap \sigma(T) = \emptyset$ ならば、 $X_T(\delta) = H$ である。

$X_T(\delta) \neq \{0\}$ となる条件を求めるために Stampfli - Wadhwani [14] は次の問題を提示した。

どんな operator T に対して、

(1) $x \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range} [(T-\lambda)]$ ならば $\sigma_T(0) \subset \delta$ (すなわち $x \in X_T(\delta)$) か。

この命題は次の (2), (3) の命題と同値である。

(2)(R) $(T-\lambda)f(\lambda) \equiv x$ となる $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上のベクトル値関数 $f(\lambda)$ があれば、 $(T-\lambda)g(\lambda) \equiv x$ となる $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の analytic なベクトル値関数 $g(\lambda)$ があるか。

(3) $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range} [(T-\lambda)] = X_T(\delta)$ か。

(2) の次の (R) は置き換え Replacement の頭文字である。 T が

(1), (2), (3) のいずれか、一つをみたすとき、 T は条件 (R) をみたすということにすれば、以上の結果は次のようにまとめられる。

proposition 8. Operator T が条件 (C), (R) をみたせば、

$X_T(\delta) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range} [(T-\lambda)]$ である。特に $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range} [(T-\lambda)] \neq \{0\}$

となる $\delta \in \sigma(T)$ があれば, $X_T(\delta)$ は T の nontrivial な不変部分空間である。

さて一体どの operator T が条件 (C), (R) を満たすのだろうか。Stampfli [2], Radjabali pour [8], Clancey [2] は T が (L.G.C.) を満たせば, T は条件 (C), (R) を満たし, 更に, Stampfli - Radjabali pour は $\sigma_p(T) = \emptyset$ となる hyponormal operator T は (L.G.C.) を満たすことを示した。以下順を追ってこの結果を紹介する。まず (L.G.C.) の問題から始めよう。

Lemma 9 (Stampfli [2], Radjabali pour [8])

$T \in B(H)$ を hyponormal で $\sigma_p(T) = \emptyset$ とする。このとき, $\lambda_0 \in P_f(X)$ で $\|x\| = 1$ ならば $\|(T - \lambda_0)^{-1}x\|^n \leq \|(T - \lambda_0)^{-n}x\|$ ($n = 1, 2, \dots$)

証明 部分的には別証を試み証明をより単純にする。

(Stampfli, Radjabali pour の結果と比較せよ。) 次の (1), (2) を示せばよい。

$$(1) \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (T - \lambda_0)^k H \text{ である。}$$

$$(2) \quad y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (T - \lambda_0)^k H \text{ で } \|y\| = 1 \text{ ならば, } \|(T - \lambda_0)^{-1}y\|^n \leq \|(T - \lambda_0)^{-n}y\|$$

($n = 1, 2, \dots$) である。

(1) の証明 $(T - \lambda) \hat{\chi}(\lambda) \equiv x$ ($\lambda \in P_f(X)$) であるから, 両辺を λ で微分すれば, $(T - \lambda) \hat{\chi}'(\lambda) = x(\lambda)$ となり, $(T - \lambda)^2 \hat{\chi}''(\lambda) \equiv x$ ($\lambda \in P_f(X)$) を得る。induction により $(T - \lambda)^{k+1} \hat{\chi}^{(k)}(\lambda) \equiv k! x$

($\lambda \in \rho_f(x)$) を得る。よって $(T-\lambda_0)^{k+1} \chi_{\lambda_0}^{(k)} \equiv k! \chi$ から (1) を得る。

(2) の証明 いくらの場合に於いて考える。

(i) $P_{\lambda_0}: (T-\lambda_0)H \longrightarrow \overline{(T-\lambda_0)H}$ の map で, $(T-\lambda_0)^* P_{\lambda_0} y = y$ for all $y \in (T-\lambda_0)H$ とする。 P_{λ_0} の存在を示そう。 $(T-\lambda_0)H \subseteq (T-\lambda_0)^* H$ 故から, $\forall y \in (T-\lambda_0)H$ に対して, $y_1 \in [\ker [(T-\lambda_0)^*]]^\perp = \overline{(T-\lambda_0)H}$ に一意に存在して, $y = (T-\lambda_0)^* y_1$ とかける。 $P_{\lambda_0} y \stackrel{\text{def}}{=} y_1$ とすければよい。

(ii) $\|P_{\lambda_0} y\| \leq \|(T-\lambda_0)^{-1} y\|$ for all $y \in (T-\lambda_0)H$ である。

実際 $\forall y_1, y_2 \in (T-\lambda_0)H$ に対して,

$$\langle P_{\lambda_0} y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, (T-\lambda_0)^{-1} y_2 \rangle \quad (2-1)$$

である (hint: $y_0 = (T-\lambda_0)^{-1} y_2$ とおいて, $y_2 = (T-\lambda_0) y_0$ と (i) の結果を用いる)。よって $\forall y \in (T-\lambda_0)H$ に対して,

$$\begin{aligned} |\langle P_{\lambda_0} y, y_1 \rangle| &= |\langle y, (T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle| = |\langle (T-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle| \\ &= |\langle (T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^* (T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle| \leq \|(T-\lambda_0)^{-1} y\| \|(T-\lambda_0)^* (T-\lambda_0)^{-1} y_1\| \\ &\leq \|(T-\lambda_0)^{-1} y\| \|(T-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1} y_1\| \leq \|(T-\lambda_0)^{-1} y\| \|y_1\| \end{aligned}$$

より (ii) を得る。いま n に関する induction によって (2) を証明する。 $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (T-\lambda_0)^k H$ で $\|y\|=1$ としよう。このとき,

(2-1) により

$$\begin{aligned} \|(T-\lambda_0)^{-1} y\|^2 &= \langle (T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^{-1} y \rangle = |\langle P_{\lambda_0} (T-\lambda_0)^{-1} y, y \rangle| \\ &\leq \|P_{\lambda_0} (T-\lambda_0)^{-1} y\| \|y\| \leq \|(T-\lambda_0)^{-2} y\| \end{aligned}$$

すなわち,

$$\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^2 \leq \|(T-\lambda_0)^{-2}y\| \quad (2-2)$$

である。induction の仮定と (2-2) より,

$$\|(T-\lambda_0)^{-(n+1)}y\| = \left\| (T-\lambda_0)^{-n} \frac{(T-\lambda_0)^{-1}y}{\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|} \right\| \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|$$

$$\geq \left\| (T-\lambda_0)^{-1} \frac{(T-\lambda_0)^{-1}y}{\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|} \right\|^n \|(T-\lambda_0)^{-1}y\| = \|(T-\lambda_0)^{-2}y\|^n \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{1-n}$$

$$\geq \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{2n+1-n} = \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{2n+1}$$

となる。

定義 Γ を点 a を通らない長さを持つ平面上の閉曲線とする。

3. $\text{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$ を Γ の点 a の回りの回転数としよう。

次に $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$ で Γ_i は長さを持つ Jordan 閉曲線で, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$

($i \neq j$) とする。このとき, $a \notin \Gamma$ に対して, $\text{Ind}_\Gamma(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \text{Ind}_{\Gamma_i}(a)$ とする。

Lemma 10 (Stampfli [12])

$T \in B(H)$ は S.V.E.P. をもち, $\sigma_p(T) = \emptyset$ で $x \in H$ とする。

Open set Ω ($\cap \sigma_T(x)$) に対して上記の定義における $\Gamma \subset \Omega \setminus \sigma_T(x)$

を $\text{Ind}_\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & ; \lambda \in \sigma_T(x) \\ 0 & ; \lambda \notin \Omega \end{cases}$ とする。このとき,

$$(T-\lambda_0)^{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n} \hat{x}(\lambda) d\lambda \quad \text{for all } \lambda_0 \notin \Omega$$

($n = 1, 2, \dots$) である。

証明は Stampfli [12] 参照

Theorem 11 (Stampfli [12])

hyponormal operator T は $\sigma_p(T) = \emptyset$ のとき, ($L_\infty(C)$)

を示す。

証明 Stampfli の証明には部分的に誤りがある。 $\|x\| = 1$ と
 $\lambda \in P_T(\alpha)$ とし, $\|\hat{x}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{dist}[\lambda, \sigma_T(\alpha)]}$ ($\forall \lambda \in P_T(\alpha)$) を示せばよい。 $\lambda_0 \in P_T(\alpha)$
 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(\alpha)]$ に対し, open set $\Omega \supset \sigma_T(\alpha)$
 $(\lambda_0 \notin \Omega)$ と Lemma 10 の性質をもつ $P \subset \Omega \setminus \sigma_T(\alpha)$ を次のように
 にとる。

$$\text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(\alpha)] - \varepsilon < \text{dist}[\lambda_0, P]$$

Lemma 9 と Lemma 10 より,

$$\|\hat{x}(\lambda)\| = \|(T - \lambda)^{-1}x\| \leq \|(T - \lambda)^{-n}x\|^{\frac{1}{n}} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_P (\lambda - \lambda_0)^{-n} \hat{x}(\lambda) d\lambda \right\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi} \frac{M}{\text{dist}[\lambda_0, P]^n} \ell(P) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{M \ell(P)}{2\pi} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\text{dist}[\lambda_0, P]}$$

$$\leq \left(\frac{M \ell(P)}{2\pi} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(\alpha)] - \varepsilon}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とし, $\varepsilon \rightarrow 0$ とし,

求める結果を得る。

Theorem 12 (Stampfli [12])

hyponormal operator T は条件 (C) を満たす。

証明 Stampfli は証明に正規族に関する Montel の定理を用いてあるが、ここではそれを用いずより単純な証明を試みる。 $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする。 $T = T|_M \oplus T|_{M^\perp}$ に対して、 $X_T(\delta) = X_{T|_M}(\delta) \oplus X_{T|_{M^\perp}}(\delta)$ で、Theorem A (a) により $X_{T|_M}(\delta)$ は closed であるから、 $\sigma_p(T) = \emptyset$ と仮定してよい。すなわち、 $M = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} m_\lambda$ で、 $m_\lambda = \ker [T - \lambda]$ である。 $\lambda_n \in X_T(\delta)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ のとき、 $\sigma_T(\lambda) \subset \delta$ を示せばよい。いま $U \subset \mathbb{C} \setminus \delta$ open, $\text{dist}[U, \delta] = \sigma > 0$ とする。 $\sigma_T(\lambda_n) \subset \delta$ より、 $\sigma_T(\lambda_n - \lambda_m) \subset \sigma_T(\lambda_n) \cup \sigma_T(\lambda_m) \subset \delta$ となる。従って $f_T(\lambda_n - \lambda_m) \subset \mathbb{C} \setminus \delta$ である。

Theorem 11 より、 $\forall \lambda \in U$ に対して、

$$\|\hat{\chi}_n(\lambda) - \hat{\chi}_m(\lambda)\| = \|\widehat{\chi_n - \chi_m}(\lambda)\| \leq \frac{\|\chi_n - \chi_m\|}{\text{dist}[\lambda, \sigma_T(\lambda_n - \lambda_m)]}$$

$$\leq \frac{\|\chi_n - \chi_m\|}{\text{dist}[\lambda, \delta]} \leq \frac{\|\chi_n - \chi_m\|}{\sigma}$$

である。従って U 上には analytic なベクトル値関数 f があって、 $\hat{\chi}_n(\lambda) \rightarrow f(\lambda)$ - 様収束 on U である。 $(T - \lambda)f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda)\hat{\chi}_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \chi$ ($\lambda \in U$) である。従って、 $U \subset f_T(\lambda)$ である。また、 $\mathbb{C} \setminus \delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ で、open set U_n は $\text{dist}[U_n, \delta] = \sigma_n > 0$ とするようにとれるから、 $\mathbb{C} \setminus \delta \subset f_T(\lambda)$ である。すなわち、

$\sigma_T(x) \subset \delta$ である。

Stampfli [2] は hyponormal operator T が nontrivial の spectral subspace をもつための条件として、次の条件をあたえた。

Corollary T を hyponormal operator とする。正数 k , r ($0 < r < \|T\|$) と $x \neq 0$ があって、 $\|T^n x\| \leq k r^n$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば $\chi_T(\delta)$ ($\delta = \sigma_T(x)$) は T の nontrivial な不変部分空間である。

証明 proposition 7 と Theorem 12 により $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$ を示せばよい。 $\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n x$ ($|\lambda| > r$) とおけば、 $\chi(\lambda)$ は analytic on $(|\lambda| > r)$ で、 $(T - \lambda)\chi(\lambda) \equiv x$ である。従って、 $(|\lambda| > r) \subset \rho_T(x)$ である。すなわち $\sigma_T(x) \subset D_r = \{\lambda \mid |\lambda| \leq r\}$ である。よって T は normaloid であるから $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $|\lambda_0| = \|T\|$ となるものがある。 $r < \|T\|$ より、 $\sigma_T(x) \subsetneq \sigma(T)$ である。

次に hyponormal operator は条件 (R) をみたすという Clancey [2] の結果を紹介しよう。

Theorem 13. hyponormal operator T は条件 (R) をみたす。

証明には Radjabali pour の次の Lemma が必要である。

Lemma 14 (Theorem 1 in [8])

T を hyponormal operator, $\sigma_p(T) = \emptyset$ で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする。 $\chi(\lambda)$ が $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の有界ベクトル値関数で $(T - \lambda)\chi(\lambda) \equiv x$ なら

うば, $\chi(\lambda)$ は $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上で analytic である。

Theorem 13 の証明 Theorem A (b) に より $\sigma_p(T) = \emptyset$ と仮定してより, Δ を一つの開球 $\subset \mathbb{C}$ とする。 $\chi(\lambda)$ が Δ 上のベクトル値関数で, $(T-\lambda)\chi(\lambda) \equiv x$ のとき, Δ° (Δ の内部) $\subset \rho_T(x)$ を示せばよい。いま $\Delta^\circ \cap \sigma_T(x) \neq \emptyset$ としよう。 $F_m = \{ \lambda \in \Delta \cap \sigma_T(x) \mid \|\chi(\lambda)\| \leq m \}$ とおけば, $\Delta \cap \sigma_T(x) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ である。はじめて, F_m closed in $\mathbb{C}$ を示す。いま $\lambda_k \in F_m$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ とおけば $\lambda_0 \in \Delta$ より $(T-\lambda_0)\chi(\lambda_0) = x$ である。一方 $\|\chi(\lambda_k)\| \leq m$ より $\{\lambda_k\}$ の部分列 $\{\lambda_{k_n}\}$ があって, $\chi(\lambda_{k_n}) \rightarrow \omega$ weakly ($n \rightarrow \infty$) かつ $\|\omega\| \leq m$ とおける。もし $\lambda_0 \notin F_m$ ならば, $\chi(\lambda_0) \neq \omega$ である。ところが, $\forall y \in H$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle (T-\lambda_{k_n})\chi(\lambda_{k_n}), y \rangle = \langle (T-\lambda_0)\chi(\lambda_{k_n}) + (\lambda_0-\lambda_{k_n})\chi(\lambda_{k_n}), y \rangle \\ &= \langle (T-\lambda_0)\chi(\lambda_{k_n}), y \rangle + \langle (\lambda_0-\lambda_{k_n})\chi(\lambda_{k_n}), y \rangle \longrightarrow \langle (T-\lambda_0)\omega, y \rangle \end{aligned}$$

である。従って $(T-\lambda_0)\omega = x$ となり, $\omega \neq \chi(\lambda_0)$ に反する。

かつ F_m は closed である (Lemma 1 in [2] の結果と比較せよ)。

一方 $\Delta^\circ \cap \sigma_T(x) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Delta^\circ \cap F_m)$ であるから F_m の closedness により, $\Delta^\circ \cap F_m$ は $\Delta^\circ \cap \sigma_T(x)$ 上の相対位相に関して closed である。

局所コンパクト空間 $\Delta^\circ \cap \sigma_T(x)$ にベールのカテゴリー一定理を適用すれば, $\Delta^\circ \cap \sigma_T(x)$ 上の相対位相に関して $\Delta^\circ \cap F_m$ が non-empty interval を持つ m がとれる。かつ open set $G \subset \mathbb{C}$ が

あって, $G \cap \Delta^\circ \cap \sigma_T(\alpha) (\neq \emptyset) \subset \Delta^\circ \cap F_m$ である。

$\mu_0 \in G \cap \Delta^\circ \cap \sigma_T(\alpha)$ とすれば, $D = U(\mu_0; \varepsilon) \subset G \cap \Delta^\circ$ に対して,

$$D \cap \sigma_T(\alpha) \subset F_m \quad (1)$$

である。こゝに, $U(\mu_0; \varepsilon)$ は μ_0 を中心半径 $\varepsilon > 0$ の開球である。

$D' = U(\mu_0; \frac{\varepsilon}{2})$ とおく。このとき,

$$\|x(\lambda)\| \leq 2m \quad (\lambda \in D' \cap \rho_T(\alpha)) \quad (2)$$

が成立することを示せば定理の証明はおわる。実際 $D' \subset \Delta$ で,

$D' = (D' \cap \sigma_T(\alpha)) \cup (D' \cap \rho_T(\alpha))$ であるから, (1), (2) より, $\|x(\lambda)\| \leq$

$2m \quad (\lambda \in D')$ とはり一方 $(T-\lambda)x(\lambda) \equiv x \quad (\lambda \in D')$ であるから,

lemma 14 により, $x(\lambda)$ は D' 上で analytic 従って, $D' \subset \rho_T(\alpha)$ と

なる。これは $\mu_0 \in \sigma_T(\alpha) \cap D'$ に矛盾するからである。

以下 (2) を示す。 $\lambda_0 \in D' \cap \rho_T(\alpha)$ ならば, $\lambda_0 \notin \sigma_T(\alpha)$ であるから

$$\exists y_0 \in \sigma_T(\alpha) : |\lambda_0 - y_0| = \text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(\alpha)] > 0$$

である。このとき, $y_0 \in D \cap \sigma_T(\alpha) \subset \Delta$ であるから, $x(y_0)$ は意

味がある。 $z_0 = x(y_0) = (T-y_0)x$ とおく。このとき,

$$\sigma_T(z_0) = \sigma_T(x) \quad (\text{または } \rho_T(z_0) = \rho_T(x)) \quad (3)$$

が成立することを証明する。まあ $\rho_T(z_0) \subset \rho_T(x)$ を示そう。

$$(T-y_0)z_0 = x, \quad (T-\mu)\hat{z}_0(\mu) = z_0 \quad (\forall \mu \in \rho_T(z_0)) \quad \text{であるから}$$

$$\text{う, } (T-\mu) \underbrace{[(T-y_0)\hat{z}_0(\mu)]}_{= (T-y_0)[(T-\mu)\hat{z}_0(\mu)]} = (T-y_0)[(T-\mu)\hat{z}_0(\mu)] = (T-y_0)z_0 \equiv x$$

($\forall \mu \in \rho_T(z_0)$) である。すなわち,

$$(T-\mu)h(\mu) \equiv x \quad (\forall \mu \in \rho_T(z_0))$$

である。こゝに $h(\lambda) = (T - \gamma_0) \hat{Z}_0(\lambda)$ は analytic on $P_T(z_0)$ である。さうして $P_T(z_0) \subset P_T(x)$ とはる。次に $P_T(x) \subset P_T(z_0)$ を示すために、

$$Z(\lambda) = \frac{\hat{\chi}(\lambda) - \chi(\gamma_0)}{\lambda - \gamma_0} = \frac{\hat{\chi}(\lambda) - z_0}{\lambda - \gamma_0} \quad (\forall \lambda \in P_T(x))$$

とおく。 $Z(\lambda)$ は analytic on $P_T(x)$ であり、

$$(T - \lambda) Z(\lambda) \equiv z_0 \quad (\forall \lambda \in P_T(x)) \quad (4)$$

である。実際

$$(T - \lambda) Z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \gamma_0} \left[(T - \lambda) \hat{\chi}(\lambda) - (T - \lambda) z_0 \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda - \gamma_0} \left[\chi - (T - \gamma_0) z_0 - (\gamma_0 - \lambda) z_0 \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda - \gamma_0} \left[\chi - \chi + (\lambda - \gamma_0) z_0 \right] = z_0$$

すなわち、 $(T - \lambda) Z(\lambda) \equiv z_0 \quad (\forall \lambda \in P_T(x))$ (4) が成立立つ。

従つて、 $P_T(x) \subset P_T(z_0)$ である。

(3) と (4) より、 $Z(\lambda) = \hat{Z}_0(\lambda) \quad (\lambda \in P_T(x))$ であるから、 $Z(\lambda_0) = \hat{Z}_0(\lambda_0)$ である。また、 $\mathcal{O}_D(\tau) = \phi$ と $\lambda_0 \in P_T(x) \cap \mathcal{O}' \subset \Delta$ より、 $\hat{\chi}(\lambda_0) = \chi(\lambda_0)$ である。Theorem II と以上の結果から、

$$\frac{\|\chi(\lambda_0) - z_0\|}{|\lambda_0 - \gamma_0|} = \frac{\|\hat{\chi}(\lambda_0) - \chi(\gamma_0)\|}{|\lambda_0 - \gamma_0|} = \|Z(\lambda_0)\| = \|\hat{Z}_0(\lambda_0)\|$$

$$\leq \frac{\|z_0\|}{\text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(z_0)]} = \frac{\|z_0\|}{\text{dist}[\lambda_0, \sigma_T(x)]} = \frac{\|z_0\|}{|\lambda_0 - \delta_0|}$$

である。従って、 $\|X(\lambda_0) - z_0\| \leq \|z_0\|$ である。故に $\|X(\lambda_0)\| \leq 2\|z_0\|$
 $= 2\|X(\delta_0)\| \leq 2m$ である。すなわち、(2) が示された。

次に cohyponormal operator T の不変部分空間の問題を考える。問題の性質上 $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ と仮定している。このとき、

T は S. V. E. P. をもつ。更に、Stampfli [2] により、

$$\exists x, y \neq 0 : \sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset$$

が示されている。 $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$ であるけれども T が条件 (C) を満たすかどうかは不明であるので、 $\overline{X_T(\sigma_T(x))} \neq H$ とは限らない。
 従って $\overline{X_T(\sigma_T(x))} \neq H$ を保障するための条件が問題になる。

定義 $T \in B(H)$ が条件 (B) を満たすとは、 $K > 0$ が存在して、

$$y_1, y_2 \in H, \sigma_T(y_1) \cap \sigma_T(y_2) = \emptyset \text{ ならば,}$$

$$\|y_1\| \leq K \|y_1 + y_2\|$$

を満たすことである。このとき、次の定理が成立つ。

Theorem 15 (Stampfli [2])

cohyponormal operator T が条件 (B) を満たすとは (C) を満たすならば、
 T は nontrivial な不変部分空間をもつ。

証明 $x, y \neq 0$ in H で、 $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset$ としよう。

T が条件 (C) を満たせば、 $X_T(\sigma_T(x))$ が求める subspace である。

次に T が条件 (B) を満たすとしよう。 $\forall u \in X_T(\sigma_T(x))$ について、

$\sigma_T(-u) = \sigma_T(u) \subset \sigma_T(\alpha)$ であるから, $\sigma_T(-u) \cap \sigma_T(y) = \emptyset$ である。

よって, $\frac{1}{k} \|y\| \leq \|y-u\|$ より, $y \notin \overline{X_T(\sigma_T(\alpha))}$ となって,

$\overline{X_T(\sigma_T(\alpha))}$ が求める subspace となる。

§ 5 dominant operator T の quasi-affine transform と関連する問題として, 次の問題がある。

$$T = AB \quad (A = A^*, B = B^*)$$

とする。 T または A, B がどんな性質をもてば, T は normal operator になるか。 T が dominant operator に限定して, この問題を考えてみよう。

Theorem 16 (Radjabali pour [1])

$T = AB$ ($A = A^*, B = B^*$) とする。このとき,

(1) T が M -hyponormal operator ならば, T は normal operator である。

(2) T が dominant operator で $A \geq 0$ ならば, T は normal operator である。

証明は省略する。

Theorem 17 $T = AB$ で $A \geq 0$, B が cohyponormal operator とする。このとき, T が dominant operator で $AB = BA$ ならば, T は normal operator である。

証明 $AB = BA$ であるから, $\ker[A]$ は A, B の reducing subspace である。 $H = \ker[A] \oplus (\ker[A])^\perp$ 上の A, B の

matrix 表現を考えると,

$$T = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 B_2 \end{pmatrix}$$

となる。ここに, B_2 は $A_1 B_2 = B_2 A_1$ で *cohyponormal* であり, $A_1 \geq 0$ である。 $T_1 = T / (\ker [A])^\perp = A_1 B_2$ とおけば, $T_1 A_1^{\frac{1}{2}} = A_1^{\frac{1}{2}} (A_1^{\frac{1}{2}} B_2 A_1^{\frac{1}{2}})$ である。 T_1 は *dominant*, $A_1^{\frac{1}{2}} B_2 A_1^{\frac{1}{2}}$ は *cohyponormal* で $A_1^{\frac{1}{2}}$ は *quasi-affinity* であるから, Theorem 2 より T_1 は *normal operator* である。従って T は *normal operator* である。

参考文献

- [I] I. Colojoara and C. Foias, *The theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968
- [2] K. F. Clancey, *On the spectra of semi-normal operators*, *proc. Amer. Math. soc.* 72 (1978) 473-479
- [3] R. G. Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators on the Hilbert space*, *proc. Amer. Math. soc.* 17 (1966), 413-415

- [4] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, part III, Spectral Operators, Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [5] C.R. Putnam, Ranges of normal and subnormal operators, Michigan Math. J. 18 (1972), 33-36
- [6] ———, Resolvent vectors, invariant subspaces and sets of zero capacity, Math. Ann. 205 (1973), 165-171
- [7] ———, Hyponormal contractions and strong power convergence, Pac. J. Math. 57 (1975), 531-538.
- [8] M. Radjabalipour, Ranges of hyponormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 70-75.
- [9] ———, On majorization and normality of operators, Amer. Math. Soc. vol 62 (1977), 105-110.
- [10] C.S. Lin and M. Radjabalipour, On intertwining and factorization by self-adjoint operators, Canad. Math. Bull. Vol 21 (1) (1978), 47-51
- [11] T. Saito, Hyponormal operators and related topics, Lecture Notes in Math. 247, Springer-Verlag,

1972, 534 - 665

- [12] J. G. Stampfli, A local spectral theory for operators,
V. Trans. Amer. Math. soc. 217 (1976) 285 - 296
- [13] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, An asymmetric -
Putnam - Fuglede theorem for dominant operators,
Indiana Univ. Math. J. 25 (1975), 359 - 365
- [14] —————, On dominant -
operators, Monatshefte für Math. 84 (1977)
143 - 153
- [15] B. L. Wadhwa, M-hyponormal operators, Duke-
Math. J. 41 (1974) 655 - 660