数理解析研究所講究録
377巻 1980年 13-22

作用素に関する不等式とGohberg-Kreinの定理の応用

富山大 教育　　泉野佐一

B(H)を可分Hilbert空間H上の(有界線形)作用素の全体，$\mathcal{M}$をその部分集合とする。$T\in B(H)$に対して，これから$\mathcal{M}$までの距離$d(T,\mathcal{M})$は$\inf\{\|T-M\|: M\in\mathcal{M}\}$で定義される。$d(T,\mathcal{M})$の評価や最良近似の存在性を調べるのがいわゆる作用素の近似の問題である。これまですでに$\mathcal{M}$としてコンパクト，正値，ユニタリー，正規作用素などの集合の場合について多くの研究（[1], [5], [12], [16]-[20], [26], [28] etc.）がなされているがこのことはすでに報告済み（cf. [30]）である。

次のGohberg-Kreinの定理はindexのノルム連続を保証するものでRogers [28]はユニタリー近似の問題に使っている。

定理A. $\|S-T\|<m_e(T)=\inf\{\lambda:\lambda\in\sigma_e(|T|)\}\Rightarrow \mathrm{ind}\,S=\mathrm{ind}\,T.$

ここで$\sigma_e(|T|)$は$|T|$のessential spectrum，また$\mathrm{ind}\,R=\dim\ker R-\dim\ker R^*$.

正規作用素，可逆作用素の全体をそれぞれ$\mathcal{N}$，$\mathcal{G}$とするとき次の結果[18], [19]が得られることも[30]で報告済みである。

定理B. $\mathrm{ind}\,T=0\ \Rightarrow\ d(T,\mathcal{N})\leq(\|T\|-m(T))/2.$

ここで $m(T)=\inf\{\lambda : \lambda\in\sigma(|T|)\}$.

定理C. (i) $\mathrm{ind}\,T=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{G})=0$.

(ii) $\mathrm{ind}\,T<0 \Rightarrow d(T,\mathcal{G})=m_e(T)$.

この報告では，上の定理A–B–Cのいくつかの応用とこれに関連した事柄として，nilpotent, algebraic operatorに関する近似の問題及びC^*-代数の有限性，摂動について紹介したい。

1. nilpotent, algebraic operatorの近似. 定理Bの応用として nilpotent operatorについて次がいえる[20].

定理1.1. Tを k-nilpotent, 即ち $T^k=0\neq T^{k-1}$ とすると，

$$\|T^{k-1}\|/2\|T^{k-2}\|\leqq d(T,\mathcal{N})\leqq\|T\|/2.$$

Kato–J. Fujii [10]によれば上の定理はもう少し一般に

定理2.1. Tがalgebraic, 即ち $p(T)=0$なる多項式pがあれば，$p(T)\equiv(T-\lambda)\,g(T)=0$ として，

$$\|(T-\lambda)^*g(T)\|/2\|g(T)\|\leqq d(T,\mathcal{N})\leqq\|T\|/2.$$

証明にはTが，可逆な作用素従ってindex zeroの作用素で近似できることを使う.

定理1.1から $T^2=0$ のときは

$$(*)\qquad d(T,\mathcal{N})=\|T\|/2$$

となるが，これはPhillips [26]がすでに証明しC^*-代数の摂動問題に使っているものである。Phillipsは(*)を次のような一般的な結果から導いている。

定理1.3. Tを2-normalとする，つまり$T=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, A.B.Cはnormalかつ互いに可換．このとき

$$d(T, \mathcal{N}) = \|B\|/2.$$

これと2-nilpotent operatorは$\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus D$と書けることを用いるのである。

前後しますが，定理1.2からTがidempotentのときは$d(T,\mathcal{N}) = \|T-T^*\|/2$なることが示される([10])．最良近似に関してはTが2-nilpotent, idempotentのいずれのときも$N=(T+T^*)/2$が求めるものなることが検証される。

次に正規作用素全体$\mathcal{N}$をnilpotentの作用素全体$\mathcal{Q}$と置き換えた場合について述べたい。$d(T, \mathcal{Q})$の評価は，いわゆるHalmosの問題[11]「quasinilpotent operator T (i.e. $\sigma(T)=\{0\}$) はnilpotent operatorで近似できるか」に関連して起ったもので，すでにApostol, Voiculescu [3],[4]等により肯定的な解答が与えられている。次はApostol-Salinas [3]によるものである。

定理1.4. $d(T, \mathcal{Q}) \leqq r(T)$. ($r(T)$はスペクトル半径).

上の不等式でTが正規の場合，$d(T, \mathcal{Q})$を下から評価することも[14]で取り扱われている。

algebraic operatorの全体$\mathcal{A}$に関する近似としては次の結果[2] (cf. [29])がある。

定理1.5. $d(T, \mathcal{A}) = \max\{d(T), d(T^*)\}$

ここで $d(T)=\sup_Q \inf\{\|(1-P)TP\| : P \geqq Q\}$ (P, Qは有限次のprojection), 即ち $d(T)$ は T と quasitriangular operator 全体との距離である。

2. C^*-代数の有限性. C^*-代数に対して von Neumann 代数ではすべて同値となるようないろいろの有限性の条件 (cf. [6], [9], [24]) が Kato [23] によって考えられたが, これに下のような新しい条件(F)を考え, これらの関連を調べたい。Aを(可分) H上の単位元をもつC^*-代数とする。条件(F)を

(F) $\quad A \subset \overline{\mathcal{G}}$

とする。次の各々は[23]で取り扱われたものである。

(ID) Aの可逆元全体$\mathcal{G}(A)$はAで dense である.

(SI) Aの左(または右)可逆元は可逆である.

(EU) Aの単位球A_1の端点は unitary.

(HN) $x(\in A)$が hyponormal なら normal.

(CP) $\sum x_n^* x_n \geqq \sum x_n x_n^*$ ならば $\sum x_n^* x_n = \sum x_n x_n^*$
(Cuntz-Pedersen [9] の条件)

条件(SI)と同値なものとして

(SI)′ $w \in A$ が isometry ならば w は unitary.

がいえる. これに似た(F)の特徴づけとして次がいえる。

定理 2.1 $A \in (F) \Leftrightarrow v \in A$ が partial isometry ならば $\mathrm{ind}\, v = 0$.

これは定理 A, C を用いて証明される。以上から直ちに

定理2.2. (ID) $\Rightarrow$ (F) $\Rightarrow$ (SI).

また (F) と (SI) の関係については, $A\otimes 1=\{\bigoplus_{n=1}^{\infty}x_n : x\in A\}$ として.

定理2.3 $A\in$(SI) $\Leftrightarrow$ $A\otimes 1\in$(F).

次に条件(ID),(EU),(SI) と(F)の強弱を例を用いて示そう([21]).

例1. $A_1=C^*(s\oplus s^*)$, s は unilateral simple shift. このとき $A_1\in$(F), しかし $A_1\notin$(ID), $\notin$(EU).

$A_1\in$(F)なることは $s\oplus s^*$ の非可換多項式がつねに $s^n p(s^*)\oplus s^{*n}p(s)+\text{compact}$ の形になる(pは多項式) ことと定理Aから示される。$A_1\notin$(ID) は $x\oplus y$ が $s\oplus s^*$ に近いとき可逆でないことから示される。$A\notin$(EU) は $s\oplus s^*$ が unitary でない端点ということから出る.

例2. $A_2=C^*(s\oplus s\oplus s^*)$とすると, $A_2\in$(SI). $A_2\notin$ (F), $\notin$(EU).

$A_2\in$(SI) は $A_2\otimes 1\in$(F) ということから定理2.3よりわかる. $A_2\notin$(F) は $s\oplus s\oplus s^*$の近くの作用素 $X\in B(H\oplus H\oplus H)$ はすべて $\mathrm{ind}\,X=-1$ から示される。

以上の外に条件(HN),(CP),(ID),(SI)等の間の関係を示す例を挙げたい。(加藤氏より伝えられたもの).

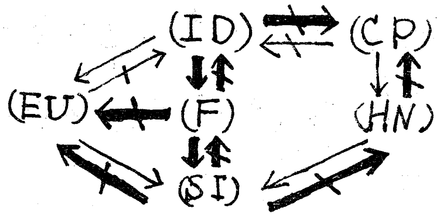
例3. $A_3=C_0([0.1],B(H))$ を $[0.1]$上のB(H)-valuedな連続関数 $x(t)$ で $x(0)=\text{scalar}$ となるものの全体とする。このとき $A_3\in$(SI), $A_3\notin$(HN).

$w(\cdot)\in A_3$ を isometry とするとき，$t\mapsto \mathrm{ind}\, w(t)$ の連続性より $w(t)$ が unitary とわかりこれから $A_3\in(SI)$。また $x(t)=1+ts$ は hyponormal であるが normal でないことから $A_3\notin(HN)$.

例4. $A_4=\{z+K : z\in\mathbb{C},\ K \text{ compact}\}$ とおくと $A_4\in(HN)$, $A_4\in(ID)$, $A_4\notin(CP)$.

$A_4\in(HN)$ は compact hyponormal は normal より，また $A_4\in(ID)$ は簡単な計算よりわかる。$A_4\notin(CP)$ は[9]に示されている。

以上の(F)−(CP)の関連を図示してみると次のよう。（細線 → ↛ は Kato [23] に示されているもの）.



なお，ついでながら Handelman [13] は次のような条件

(USR)　$xA+yA=A \Rightarrow x+yu\in G(A)$ となる unitary u が存在する.

を論じている。明らかに (USR) ⇒ (SI)．また (ID) ⇒ (USR) を計算によって示すことができる。

3． C*-代数の摂動．2つの C*代数 $A, B\subset B(H)$ の間に Kadison-Kastler [22] は次のような距離を定義した。

$$\|A-B\| = \sup\{d(x,B_1),\ d(y,A_1) : x\in A_1,\ y\in B_1\}.$$

距離 $\|A-B\|$ が十分小さいとき A と B は同じ性質をもつかと

いうのがいわゆる摂動問題である。Kadison-Kastlerは主にvon Neumann代数の場合について論じ，次を示した。

定理3.1. A, Bをvon Neumann代数，$\|A-B\|$が十分小さい（$\leqq 1/26{,}000$）のときAとBは同じtypeのfactorの直和である。

これに続く研究としてChristensen, Phillips等によるいくつかの結果がある。ここでは主としてC^*-代数について，そして特に可換性と有限性に関連した結果を紹介する。C^*代数の可換性に関してはKadison-Kastler [22] によると，

定理3.2. (A, BはC^*代数) $\|A-B\| \leqq k < 1/10$ のとき

$$A\text{が可換} \Leftrightarrow B\text{が可換}.$$

Phillips [25] はこれを次のように部分改良している。

定理3.3. $\|A-B\| < k \leqq \frac{1}{100}$ のとき

$$\mathrm{Prim}\, A \cong \mathrm{Prim}\, B \quad (\text{Jacobson topology})$$

従ってAが可換ならばAとBは*同型.

可換性を保存するような$k > \|A-B\|$の値で現在知られている最もよいものは$\frac{1}{2}$である。これはPhillips [26] によって示されたもので定理1.1の後に示した等式(*)を使っている。

$\|A-B\|$が十分小さいとき，A, Bは内部同形，i.e. $uAu^* = B$となるunitary $u \in B(H)$が存在するかどうかという問題が考えられる。これに関してChristensen [7] は次を示している。

定理3.4. $\|A-B\| < k \leqq 1/10$，A, Bは共通の単位元をもつ

とする。このとき A が可換ならば、ある unitary $u \in (A \cup B)''$ をとり $uAu^* = B$ とできる。

有限性に関しては、von Neumann 代数についてであるが Christensen [8] は次の結果を示した。

定理3.4. A, B を finite von Neumann 代数, $\|A-B\| < k \leq \frac{1}{8}$ とする。このとき unitary $u \in (A \cup B)''$ があり $uAu^* = B$。

C^*-代数に対しては次の弱い結果[21]がある。

定理3.5. (A, B を C^*-代数) $\|A-B\| < 1$ のとき

$$A \in (F)\ (\text{resp.}\ (SI)) \Leftrightarrow B \in (F)\ (\text{resp.}\ (SI))$$

最近 Phillips-Raeburn [27] は AF-代数に関して次の結果を得た。(Christensen がすでに証明したと書いてある。)

定理3.6. A, B を単位元をもつ AF-代数とする。$\|A-B\| < k \leq 1/305^2$ ならば unitary $u \in (A \cup B)''$ で $uAu^* = B$ となるものが存在する。

References

[1] T.Ando, T.Sekiguchi and T.Suzuki: Approximation by positive operators, Math. Z., 131(1973), 273-281.

[2] C.Apostol and C.Foias: On the distance to biquasitriangular operators, Rev. Roum. Pures Appl., 20(1975), 261-265.

[3] ———— and N.Salinas: Nilpotent approximations and quasinilpotent operators, Pacific J. Math., 61(1975), 327-337.

[4] ———— and D.Voiculescu: On a problem of Halmos, Rev. Roum. Pures Appl., 19(1974), 283-284.

[5] R.Bouldin: Positive approximants, Trans. Amer. Math.Soc.,177(1973),391-403.

[6] H.Choda: An extremal property of the polar decomposition in von Neumann algebras, Proc. Japan Acad.,46(1970), 341-344.

[7] E.Christensen: Perturbation of operator algebras, Invent. Math., 43(1977), 1-13.

[8] ——————: Perturbation of operator algebras II, Indiana Univ. Math. J., 26(1977), 891-904.

[9] J.Cuntz and G.K.Pedersen: Equivalence and traces on C*-algebras, J. Funct. Anal., 33(1979), 135-164.

[10] J.Fujii and Y.Kato: Izumino's theorem for algebraic operators, Math. Japon., 24(1979), 81-83.

[11] P.R.Halmos: Ten problems in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), 887-933.

[12] ——————: Positive approximants of operators, Indiana Univ. Math. J., 21(1972), 951-961.

[13] D.Handelman: Stable range in AW*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 76 (1979), 241-249.

[14] D.A.Herrero: Norm limit of nilpotent operators, Indiana Univ. Math. J., 23(1974), 1097-1108.

[15] ——————: Toward a spectral characterization of the set of norm limit of nilpotent operators, Indiana Univ. Math. J., 24(1974/75), 847-864.

[16] R.B.Holmes: Best approximation by normal operators, J. Appr. Theory, 12 (1974), 412-417.

[17] —————— and B.R.Kripke: Best approximation by compact operators, Indiana Univ. Math. J., 22(1971).255-263.

[18] S.Izumino: Inequalities on normal and antinormal operators, Math. Japon., 23(1978), 211-215.

[19] S.Izumino: Inequalities on operators with index zero, Math. Japon., 23 (1978), 565-572.

[20] ————: Inequalities on nilpotent operators, ibid. 24(1979), 31-34.

[21] ————: Applications of the Gohberg-Krein-Rogers theorem to finiteness of C*-algebras, ibid. 24(1979), 211-222.

[22] R.V.Kadison and D.Kastler: Perturbations of von Neumann algebras I. Stability of type, Amer. J. Math., 94(1974), 38-54.

[23] Y.Kato: On finiteness of C*-algebras, Math. Japon., 24(1979). 85-91.

[24] ——— and M.Nakamura: A characterization of finiteness of von Neumann algebras, ibid. 22(1977), 69-71.

[25] J.Phillips: Perturbations of C*-algebras, Indiana Univ. Math. J., 23 (1974), 1167-1176.

[26] ————: Nearest normal approximation for certain operators, Proc. Amer. Math. Soc., 67(1977), 236-240.

[27] ———— and Raeburn: Perturbation of AF-algebras, Can. J. Math., 31 (1979), 1012-1016.

[28] D.D.Rogers: Approximation by unitary and essentially unitary operators, Acta Sci. Math Szeged, 39(1977), 141-151.

[29] D.Voiculescu: Norm limit of algebraic operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19(1979), 371-376.

[30] 泉野佐一: Rogersの近似定理の拡張について, 数理解析研究所講究録「作用素論とその応用」1978.9。