数理解析研究所講究録
378巻 1980年 101-111

完備離散付値体のガロア・コホモロジー

東大理　加藤和也

§1. Introduction.

Kを完備離散付値体，Fを剰余体とするとき，遠藤［1］に述べられているように，KのBrauer群について次のことが知られている．K_{nr}をKの最大不分岐拡大とし，$Br(K_{nr}/K)$をBrauer群$Br(K)$から$Br(K_{nr})$への標準写像の核とし，$X(F)$を，ガロア群$Gal(F_s/F)$（体kに対しk_sでkの分離閉包をあらわす）から離散群$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$への連続準同型全体の群とするとき，

$$\text{(A)} \qquad Br(K_{nr}/K) \cong Br(F) \oplus X(F)$$

が成立する．Fが完全体の場合には　$Br(K_{nr})=0$　となるので，$Br(K)$全体がよくわかることになる．（例えばFが有限体なら，$Br(F)=0$及び$X(F)\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$から，局所類体論における基本的な同型　$Br(K)\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$　が得られる.）しかし，Fが標数Pの非完全体である時，$Br(K_{nr}/K)$は$Br(K)$の中の小さ

な直和因子にすぎず，残りの部分は，p 巾 torsion の元のみからなる，複雑な構造をもったよくわからない群になってしまう．

本稿の主目標は，標数 $p>0$ の体を剰余体とする標数 0 の完備離散付値体 K に対して ガロア・コホモロジー群 $H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($q=0,1,2,\cdots\cdots$) の構造を決定することであり，(§2 定理 1)，$q=2$ の場合（1 の p 乗根を p 個含む体 k については $Br(k)_p=\{x\in Br(k)\ ;\ px=0\}$ は $H^2(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と同型なので）これから $Br(K)_p$ の構造を知ることができる．また，高次のコホモロジー群における，上の (A) の自然な類似物についても述べる（§3 定理 3）．

§2. $H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の構造．

この§では，K は，標数 $p>0$ の剰余体 F をもつ，標数 0 の完備離散付値体とする．

$H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の構造は，より調べやすい，Milnor の K-group $K_q(K)$ の構造をもとに，下記のような，ガロア・コホモロジーと Milnor の K-group の間の（予想されてはいるが立証はされていない）関係を通じて調べていくしかないように思われる．

一般に k を体とし，M を $Gal(k_s/k)$ が連続に作用する離散アーベル群とする時，ガロア・コホモロジー群 $H^q(k, M)$ ($q=0,1,2,\cdots$)

が，Serre [6] におけるように定義される．以下 M としては，m を k の標数でわれない整数とする時の，k_s 内の 1 の m 乗根全体の群 μ_m や，（$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 加群としての）テンソル積 $\mu_m^{\otimes r} = \mu_m \otimes \cdots \otimes \mu_m$ （r 個）に $Gal(k_s/k)$ が自然に作用しているものを考える．$\mu_m^{\otimes r}$ はアーベル群としては $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と同型であるが，以下，単に $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と書けば，$Gal(k_s/k)$ が trivial に作用しているものとする．

一方，$K_q(k)$ （$q = 0, 1, 2, \cdots$）を [5] で定義されている Milnor の K-group とする．すなわち，$k^\times$ を k の乗法群 $k - \{0\}$ として，$K_q(k) = (\underbrace{k^\times \otimes \cdots \otimes k^\times}_{q\text{個}})/J$，ここに J は $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$ である相異なる i, j について，$x_i + x_j = 1$ となるものから生成される部分群である．$K_q(k)$ の元 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \bmod J$ を $\{x_1, \cdots, x_q\}$ と書く．

m が k の標数でわれない整数なら，Galois symbol と呼ばれる準同型

$$h^q_{m,k} : \quad K_q(k)/mK_q(k) \longrightarrow H^q(k, \mu_m^{\otimes q})$$

が，標準同型 $k^\times/(k^\times)^m \cong H^1(k, \mu_m)$ から cup 積によって導かれる．この写像は常に同型であろうと予想され（[5] §6 参照），k が代数体や，有限体上の一変数関数体の場合には，類体論を用いて Tate によって同型であることが示されているが（Tate [7] 参照），一般には $q \geq 2$ に対しては，全射性も

単射性も示されていない．

Kの正規加法付値をord_Kと書く．各$i \geqq 1$に対し，$K_q(K)$の第i単数群$U_q^{(i)}$を，$\{1+x, y_1, \cdots, y_{q-1}\}$ $(x \in K,\ \mathrm{ord}_K(x) \geqq i,\ y_1, \cdots, y_{q-1} \in K^\times)$ の形の元で生成される部分群とする．これは乗法群$K^\times = K_1(K)$内の通常の第i単数群の自然な一般化である．$\overline{U}_q^{(i)}$を，$K_q(K)/pK_q(K)$における$U_q^{(i)}$の像とする．簡単のため，Kは1の原始p乗根を含むとし，$h_{p,K}^q : K_q(K)/pK_q(K) \longrightarrow H^q(K, \mu_p^{\otimes q}) \cong H^q(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$による$\overline{U}_q^{(i)}$の像を$U^i H^q$と書く．

いくつかの記号の準備をする．kを標数$p>0$の体とするとき，$q \geqq 0$に対し，Ω_k^qを，differential module $\Omega_{k/\mathbb{Z}}^1$のk上のq次外巾とし，$\Omega_{k,d=0}^q$を，外微分$d: \Omega_k^q \to \Omega_k^{q+1}$の核とし，準同型

$$\Omega_k^q \longrightarrow \Omega_k^q / d(\Omega_k^{q-1}) \quad ; \quad x\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_q}{y_q} \mapsto (x^p - x)\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_q}{y_q}$$

(Milne [4] §1 参照) の核，余核を，それぞれ$\nu(q)_k$，$H_p^{q+1}(k)$とおく．$q<0$についてはこれらの群は0であると定義する．Galois symbol に相当する準同型 differential symbol

$$h_{p,k}^q : \quad K_q(k)/pK_q(k) \longrightarrow \nu(q)_k \ ; \{x_1, \cdots, x_q\} \mapsto \frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_q}{x_q}$$

があり，これも常に同型であろうと予想され，実際$q=0,1$では同型である．筆者はこれが常に全射であることは証明できたが，単射性は示せていない．

定理1． Kを§2の初めのとおりとし，Kは1の原始p乗根を含むとする．$e=\mathrm{ord}_K(p)$ とおく．

(1) $H^q(K,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/U^1H^q \cong \nu(q)_F \oplus \nu(q-1)_F$.

(2) 任意の$i \geqq 1$に対し，Galois symbol によって，同型

$$\overline{U}_q^{(i)}/\overline{U}_q^{(i+1)} \xrightarrow{\cong} U^iH^q/U^{i+1}H^q$$

がなりたつ．これら二つの群は，

$0<i<\frac{ep}{p-1}$ でiがpと素なら Ω_F^{q-1} と，

$0<i<\frac{ep}{p-1}$ で $p\mid i$ なら $\Omega_F^{q-1}/\Omega_{F,d=0}^{q-1} \oplus \Omega_F^{q-2}/\Omega_{F,d=0}^{q-2}$ と，

$i=\frac{ep}{p-1}$ なら $H_p^q(F)\oplus H_p^{q-1}(F)$ と，

同型である．また，$i>\frac{ep}{p-1}$ なら，$\overline{U}_q^{(i)}=U^iH^q=0$．

（注意） 上の，Kが1の原始p乗根を含むという仮定は本質的な仮定ではない．一般には，Kに1の原始p乗根を添加した体をK'とすれば，$[K':K]$がpと素であることから，$H^q(K,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$は$H^q(K',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$の$\mathrm{Gal}(K'/K)$-不変部分に一致し，前者の構造は後者の構造から容易に計算できる．同様の理由で，$\mathrm{Br}(K)_p$の構造も，$H^2(K',\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$の構造から計算できる．

なお，定理1 (2)の後半に述べられた同型は，Kの素元πを固定して得られる全射準同型 $\Omega_F^{q-1}\oplus\Omega_F^{q-2}\to U_q^{(i)}/U_q^{(i+1)}$;

$$\begin{cases} \left(x\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_{q-1}}{y_{q-1}},\ 0\right) \mapsto \{1+\tilde{x}\pi^i,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_{q-1}\} \\ \left(0,\ x\frac{dy_1}{y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dy_{q-2}}{y_{q-2}}\right) \mapsto \{1+\tilde{x}\pi^i,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_{q-2},\pi\} \end{cases}$$

（$\sim$は剰余体の元に対し，Kの付値環におけるその任意の代

表元をあらわす）によって導かれるものである．また $K_q(K)/U_q^{(1)}$ は $K_q(F)\oplus K_{q-1}(F)$ と同型であって，Galois symbol が導く準同型 $K_q(K)/(U_q^{(1)}+pK_q(K)) \longrightarrow H^q(K,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/U^1H^q$ は，定理1（1）の同型を通じて differential symbol と同一視される．これから，

定理2． Kを§2の初めのとおりとすると，Galois symbol $h^q_{p^n,K}$ は任意の $n\geqq 0$ について全射であり，次の (i)(ii)(iii) は同値である．(i) $h^q_{p,K}$ は同型．(ii) $h^q_{p^n,K}$ はすべての $n\geqq 0$ について同型．(iii) differential symbol $h^q_{p,F}$ 及び $h^{q-1}_{p,F}$ は同型．

§3．コホモロジー群の不分岐部分

§2では，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー群を調べたが，$H^q(K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ や一般の $H^q(K,\mu_{p^n}^{\otimes r})$ $(n\geqq 2)$ の構造はよくわからない．しかし $H^q(K,\mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})\longrightarrow H^q(K_{nr},\mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})$ の核は，以下に述べるように簡明な形にあらわすことができる．この核は，$n=1$ でKが1の原始 p 乗根を含む時は定理1の $U^{e_K'}H^q$ に一致し一般には $H^q(K,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ のたいへん小さい部分群となるが，$[F:F^p]\leqq p^{q-2}$ の時には全体に一致する．この§3の内容は 付値体Kや剰余体Fの標数によらぬ

統一した形で述べた方がすっきりするので，体kと非零整数mに対し　$H^q_m(k)$　$(q=0,1,2,\cdots)$を次のように定義する．まずmがkの標数でわれない時は，$H^q(k,\mu_m^{\otimes(q-1)})$　を　$H^q_m(k)$と定義する．

$$\text{(B)}\qquad H^1_m(k)\cong X(k)_m\quad,\qquad H^2_m(k)\cong Br(k)_m$$

（アーベル群Aに対し，$A_m=\{x\in A\,;\,mx=0\}$　とおく）であり，いろいろな$H^q(k,\mu_m^{\otimes r})$　の中で，$r=q-1$　のものが特に重要であると思われるのである．一方，Milne [4] の考え方によれば，標数$p>0$の体kに対して，標数0の体における$H^q(k,\mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})$に相当すると思われるもの（標数$p>0$の体に対する実際の$H^q(k,\mu_{p^n}^{\otimes(q-1)})$　は，k_s内に1のp巾乗根は1しかないため，使い物にならない）があって，それは[4] の$F-1\ :\ C_n^{q-1}(k)\longrightarrow C_n^{q-1}(k)/dC_n^{q-2}(k)$　の余核であるが（記号の説明は略する），それを$H^q_{p^n}(k)$　と書く．この$H^q_{p^n}(k)$は，

$$H^q_{p^n}(k)\ =\ (W_n(k)\otimes\underbrace{k^\times\otimes\cdots\otimes k^\times}_{q-1\text{個}})/J$$

としても定義できる．但しここに$W_n(k)$はk上の長さnのWitt vector全体のなす群，Jは，$w\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{q-1}$　で或る相異なるi,jについて$b_i=b_j$となるもの，

$(0,\cdots,0,a,0,\cdots,0)\otimes a\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_{q-1}$　の形のもの，及び

$(w^{(p)}-w)\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{q-1}$　の形のもの（Witt vector $w=(a_0,\cdots,a_{n-1})$に対し，$w^{(p)}\underset{def}{=}(a_0^p,\cdots,a_{n-1}^p)$）全体で生成される部分群である．

§2 で Ω_k^{q-1} の商として登場した $H_p^q(k)$ は，ここの意味での $H_p^q(k)$ と一致する．一般の $m \neq 0$ に対して，$H_m^q(k)$ を，$H_{m'}^q(k) \oplus H_{m''}^q(k)$ （$m = m'm''$，m' は k の標数でわれず，m'' は 1 に等しいかまたは k の標数の巾）と定義する．すると上の (B) の同型は任意の $m \neq 0$ について成立する．

<u>定理 3</u>．　K を完備離散付値体，F をその剰余体とする．$q \geqq 0$，$m \neq 0$ を任意とする．

(1)　$H_m^q(K) \longrightarrow H_m^q(K_{nr})$　の核は　$H_m^q(F) \oplus H_m^{q-1}(F)$ に同型である．

(2)　m が F の標数でわれないか　または　F が標数 $p > 0$ で $[F : F^p] \leqq p^{q-2}$　であれば，$H_m^q(K_{nr}) = 0$ であり，$H_m^q(K) \cong H_m^q(F) \oplus H_m^{q-1}(F)$ がなりたつ．

この定理は，上の (B) を考えに入れると，§1 (A) の一般化である．K や F の標数によらぬ形に述べてあるが，主題は K，F を §2 の初めのとおりとする時，$H_{pn}^*(K)$ と $H_{pn}^*(F)$ が，（定義のされ方が全く異なっているにもかかわらず）深い関係にあるということである．そのような K の p-コホモロジー次元 $cd_p(Gal(K_s/K))$ が，この定理により次の系の形でもとまる．一般に体 k と素数 p に対し $dim_p(k)$ を，k の標数が p と異なれば $cd_p(Gal(k_s/k))$ （[6] 参照）とし，k の標数が p であれば，$[k : k^p] \leqq p^r$ かつ，k のすべての有限次拡大 k'

について $H_p^{r+1}(k')=0$，がなりたつ最小の整数 r（存在しなければ∞とする）と定義する．

系．Kを完備離散付値体，Fをその剰余体とするとき，任意の素数Pに対して $\dim_p(K)=\dim_p(F)+1$．

§4．§1への二つの補足．

§1では，同型(A)から剰余体Fが有限体の場合に特に簡明な定理 $Br(K)\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が得られるのであったが，§3定理3からは，そのような「良い」特殊化として次が得られる．

定理4．$N\geqq 0$ とし，k_0 は有限体とし，各 $i=1,\cdots,N$ に対し k_i は完備離散付値体で k_i の剰余体は k_{i-1} であるとする．k_N をKと書く．この時，任意の $m\neq 0$ に対し，標準的同型 $H_m^{N+1}(K)\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ がある．

有限体を剰余体とする完備離散付値体のBrauer群の定理から局所類体論が得られるように，この定理4から，定理4のKのアーベル拡大論が得られる（[2]，[3]）．

最後に，§1で剰余体Fが標数Pの非完全体の場合，$Br(K)$ のP巾torsion部分はよくわからないと述べ，§2で $Br(K)_p$ の構造のみを調べたのであるが，$[F:F^p]=p$ の場合には $Br(K)$ 全体も比較的簡単な構造をもち，よくわかることを述

べる．

定理5．　Kは完備離散付値体で，剰余体Fは標数 $p>0$ であり，$[F:F^p]=p$ とする．この時 $Br(K)$ の部分群の増大列 $0\subset Br^0(K)\subset Br^1(K)\subset Br^2(K)\subset\cdots$ が標準的に定義され，

(1)　$\bigcup_i Br^i(K) = Br(K)$,　　$Br^0(K)=Br(K_{nr}/K)$.

(2)　各 $i\geqq 0$ に対し $Br^{i+1}(K)/Br^i(K)$ はF上1次元線型空間の構造をもつ．

(3)　Kが標数0で1の原始p乗根を含む時は，$0\leqq i<\frac{ep}{p-1}$ に対し $Br^i(K)\cap Br(K)_p$ は定理1の $U^{\frac{ep}{p-1}-i}H^2$ に一致し，$i\geqq\frac{ep}{p-1}$ ならば $Br(K)_p\subset Br^i(K)$ となる．

一般に $[F:F^p]=p^r$ の時は $\varinjlim_m H_m^{r+1}(K)$ が同様の構造を持つと予想される．

本稿の内容の証明は，大部分 preprint "Galois cohomology of complete discrete valuation fields" にあるが，一部は [2] [3] に述べられている．

文献表

[1] 遠藤静男，可換環の Brauer 群，京都大学数理解析研究所講究録 53．Scheme の Brauer 群の研究報告集 1968.

[2] 加藤和也，A generalization of local class field theory by using K-groups I，東京大学理学部紀要 Sec. IA. 26巻 No.2 1979.

[3] ——— .II，東京大学理学部紀要に投稿中

[4] J.S. Milne, Duality in flat cohomology of a surface. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4 ème série, 9, 1976.

[5] J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, Inventiones Math. 9, 1970.

[6] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag 1965.

[7] J. Tate, Symbols in arithmetic, Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971.