数理解析研究所講究録
378巻 1980年 97-100



# 不連続群の整数論

名大理　久保田富雄

整数論と保型形式との間には、重要な研究対象が多いが、類体論や相互法則は、特にEisenstein級数と関係が深い。ここでは、その関係が、収束する範囲におけるEisenstein級数において、最も根源的な形であらわれることを示す。但し、式は簡単な上半平面の場合だけについて書き、それによって本格的な場合を暗示するという方法をとる。

$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Z} \right\}$ とし、

$$E(z, s) = \sum_{\pm\sigma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

$$= y^s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s) y^{1-s} k(my, s) e(mx), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sigma \in \Gamma,$$

をEisenstein級数とする。ここで、

$$e(x) = \exp 2\pi i x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

/

$$\varphi_m(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{2s}} \Bigl( \sum_{\substack{d \bmod c \\ (d,c)=1}} e\Bigl(\frac{d}{c}m\Bigr)\Bigr),$$

$$k(y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(xy)}{(1+x^2)^s}\, dx, \qquad y \in \mathbb{R},$$

である．Fourier 変換を $\mathcal{F}$ と書けば，$k = \mathcal{F}((1+x^2)^{-s})$ とあらわせる．

$E(z, s)$ の保型性 $E(-\frac{1}{z}, s) = E(z, s)$ を用いると，Poisson 型和公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)\psi(m) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t)\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)\psi^*(m) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt$$

が得られる．ここで $\psi \to \psi^*$ は

$$\psi \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \hat{\psi} \longrightarrow |t|^{-2s}\hat{\psi}(-\tfrac{1}{t}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \psi^*$$

によって定まる変換であり，$\psi$ は $\hat{\psi}$ と $|t|^{-2s}\hat{\psi}(-\frac{1}{t})$ とが共に $C^\infty(\mathbb{R})$ であるような任意の関数である．（c.f. 鈴木，Nagoya Math. Journ. 77 (1980))

ここまでは $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ くらいでよい．この Poisson 型和公式から Eisenstein 級数の変換式を出すには，

$$\psi(t) = k(ty, s)\, e(tx)$$

とおくと，

$$\psi^*(t) = (x^2+y^2)^{s-1} k(t\frac{y}{x^2+y^2}, s)\, e(-t\frac{x}{x^2+y^2}),$$

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{y^{2s-1}}{(y^2+(x-t)^2)^s},$$

$$\hat{\psi}^*(t) = \frac{y^{2s-1}}{((x^2+y^2)t^2+2xt+1)^s}$$

となり,

$$y^{2s-1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)\, k(my, s)\, e(mx)$$

$$= \frac{y^{2s-1}}{(x^2+y^2)^s} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)(x^2+y^2)^{s-1} k(m\frac{y}{x^2+y^2}, s)\, e(-m\frac{x}{x^2+y^2}),$$

すなわち, $y^{s-1}E(z, s) = y^{s-1}E(-\frac{1}{z}, s)$ を得る.

Eisenstein級数が収束する場合, すなわち $\mathrm{Re}\, s > 1$ の時の特殊性は, 上記Poisson型和公式を少し弱めた

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)\psi(m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m(s)\psi^*(m) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t)dt\right| < C(s)B(\psi),$$

$$B(\psi) = \sup_{|t'|\leqq 2} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, e(-tt')dt\right|,$$

が, 全く不連続群を考えずに, $E(z, s)$ を単に Fourier級数であたえられたものと考えて導き出されるところにある.

$C(s)$ は $s$ だけで定まる定数である.

$\psi(t) = k(ty, s)\, e(tx)$ とすれば

$$\left| y^{s-1}E(z,s) - y^{s-1}E\left(-\frac{1}{z},s\right) + \frac{y^{2s-1}}{(x^2+y^2)^s}\right| < C(s)\sup_{|t|\leqq 2}\frac{y^{2s-1}}{(y^2+(x-t)^2)^s}$$

が得られるわけだから，$z$ が測地線にそって $x=\frac{a}{c}$ に近づくとき，$E(z,s)\sim c^{-2s}\varepsilon(x)y^{-s}$ とすれば，$\varepsilon(x)=\varepsilon(-\frac{1}{x})$，$(|x|>2)$，でなければならない．もちろん，この場合にはこの結果自体は全く自明のことにすぎない．しかし，これと平行な論法で導き出せる類似の事実が，べき剰余の相互法則の全く拡大体によらない証明の一環をなすのである．そして相互法則とEisenstein級数，およびそれと関連した種々の保型関数との関係は，すべてここに源泉をもつものと考えられる．