数理解析研究所講究録
378巻 1980年 26-34

虚アーベル体の相対類数

都立大 理学部　　飯村 清明

1° $K/\mathbb{Q}$を実アーベル拡大，$G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$，$E$を$K$の単数群，$h$を$K$の類数，$f$を$K$のconductorとし，$C:=\langle -1, \lambda^{1-\sigma} \mid \sigma\in G\rangle$，$\lambda=\prod_{a\in H}(1-\zeta_f^a)^{\frac{1}{2}}$，$\zeta_f=\exp(\pi i/2f)$，$H$は類体論の意味で$K$に対応する$(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$の部分群とする．そのとき，$C$は$E$の部分群となるが，Hasse [3], Satz 3 は，

$$(1)\qquad [E:C]=g\cdot h$$

を主張している．ここで，$g=\prod(1-\chi(p))$，積は，Kに属するnon-trivial, primitive Dirichlet characters χ，及び．fの素因数pについてとる．($g=0$である様な体Kに対しては，(1)は．CがEにおいてfinite indexを有しないことを意味することに注意．) さて，pをodd primeとして，p^n-分体を$K=\mathbb{Q}^{(p^n)}$とする．Iwasawa [4] は．(1)のanalogueと思われる次の関係式を発見した： $[R^-:\underline{S}^-]=h^-$，ここで$R^-=\{\alpha\in\mathbb{Z}[G(K/\mathbb{Q})] \mid \alpha(1+j)=0\}$，$j\in G(K/\mathbb{Q})$は．complex conjugation から induce されたもの；$\underline{S}$ は，2°で定義される level p^n の Stickelberger ideal of R；$\underline{S}^- = R^- \cap \underline{S}$；$h^-$ は K の相対類数，i.e.，$h^- = h/h^+$，h (h^+) は K (K の最大実部分体) の類数。ここでの目的は，任意の虚アーベル体に対して，(1) の analogue と思われる関係式を導くことにある．

ここで，Sinnott [7] 及び Schmidt [8] の結果に触れておく必要がある．前者は，任意の円分体に対して，index $[R^- : \tilde{\underline{S}}^-]$ を完全に計算した．$\tilde{\underline{S}}$ は，すべての levels の Stickelberger elements によって生成された Stickelberger ideal．後者は，Leopoldt [6] Satz 20 で得られている formula の analogue を任意の虚アーベル体に対し与え，また，(1) の analogue も任意の虚アーベル体に対して与えた．あとの方の formula は，私たちのそれと同じであるが，証明が少し異なる．

2°. 以下，次の記号を用いることにする：$K/\mathbb{Q}$ は虚アーベル体，その degree を n，f をその conductor，$G = G(K/\mathbb{Q})$，$R = \mathbb{Z}[G]$，$j \in G$ は，complex conjugation から induce されたもの，$R^- = \{\alpha \in R \mid (1+j)\alpha = 0\}$，$h^-$ を K/K^+ の相対類数，K^+ は K の最大実部分体，そして H は，類体論のいみで K に対応する $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ の部分群．

さて, $\dot{S}^{*}=\dfrac{1}{f}\sum_{\substack{a=1\\(a,f)=1}}^{f}\left(\dfrac{k}{a}\right)a$; $\underline{\dot{S}}=\dot{S}R\cap R$, これを Lang [5] に従って, level f の Stickelberger ideal と呼ぶことにする. $e^{-}=(1-j)/2$, $S=e^{-}\dot{S}$, $\underline{S}=SR\cap R$. これは R^{-} の ideal となる. index $[R^{-}:\underline{S}^{*}]$ を計算したい.

今, L, M を $\mathbb{Q}[G]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-modules とし, $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\supseteq M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ とする. そのとき, $T: L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. T は linear transformation で, $T(L)=M$. そこで symbol $(L:M)$ を $|\det(T)|$ で定義する. そのとき容易に次のことがわかる. $(L:M)$ は, T のとり方に依らず; $(L:M)=[L:M]$ ($L\supseteq M$ である限り); N が $\mathbb{Q}[G]$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-module で, $(L:M)$, $(M:N)$ が定義されている限り, $(L:N)=(L:M)(M:N)$.

さて, この symbol を用いれば,

$$[R^{-}:\underline{S}]=(R^{-}:e^{-}R)(e^{-}R:e^{-}RS)(e^{-}RS:\underline{S}).$$

先ず, $(R^{-}:e^{-}R)=2^{-n/2}$; $(e^{-}RS:\underline{S})$ の計算のために, $\Lambda\in\mathbb{N}$ を $\Lambda S\in R$ となる最小数とすれば,

<u>Lem. 1</u> $e^{-}RS=RS$ であり, $RS/\underline{S}\cong\mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z}$; 従って, $(e^{-}RS:\underline{S})=[RS:\underline{S}]=\Lambda$.

(∵) $\varphi: RS\to\mathbb{Z}$ を $\varphi(\sum a_{\sigma}\sigma)=\Lambda a_{1}$ で与え, $\psi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z}$ を canonical homo. とし, $\theta=\psi\circ\varphi$ とすれば,

$0\to\underline{S}\xrightarrow{\text{incl}}RS\xrightarrow{\theta}\mathbb{Z}/\Lambda\mathbb{Z}\to 0$ (exact) が示せる. ☐

$(e^{-}R:e^{-}RS)$ は, $T: e^{-}\mathbb{Q}[G]\to e^{-}\mathbb{Q}[G]$ を $T(u)=uS$

で与えれば、$(e^-R : e^-RS) = |\det(T)| = |\prod \chi'(S)|$; 積は G の odd characters χ' にわたる。$\chi'(S)$ については [3], §8 により Lemma 2. 各 odd character χ' of G に対し、χ を χ' から induce される primitive odd Dirichlet character とし、f_χ を χ の conductor; $\delta(\chi) = \dfrac{1}{f_\chi} \sum_{\substack{1 \le a \le f_\chi \\ (a, f_\chi) = 1}} \chi(a) a$ とすれば、

$$\chi(S) = \prod_{p \mid f} (1 - \bar{\chi}(p))\, \delta(\chi).$$

そこで、X を K に属する primitive odd Dirichlet characters の set とし、$g^- = \prod_{\substack{p \mid f \\ \chi \in X}} (1 - \chi(p))$ とおけば、$(e^-R : e^-RS) = g^- |\prod_{\chi \in X} \delta(\chi)|$.

h^- の analytic formula (cf. [3], Chap I) は

$$h^- = Qw \prod_{\chi \in X} (-\delta(\chi)/2).$$

ここで Q は K/k^+ の the unit index; w は K に属する 1 のベキ根の個数である。$Q = 1$ or 2 である (cf. [3], §20)

以上のことから、$(e^-R : e^-RS) = 2^{-n/2} g^- h^- / (Qw)$.

Prop. 1. $[R^- : S] = (1/Qw)\, g^- h^-$.

3° 各 prime p に対して、$D(p)$ ($I(p)$) で G における p の decomposition (inertia) group を表わす。

Prop 2. $g^- \neq 0 \iff j \in \bigcap_{\text{all } p} D(p)$; このとき $g^- = 2^{\sum n/|D(p)|}$,

ここで和は、$p \mid f$ かつ $j \notin I(p)$ なる p についてとる。

(∵) $\mathfrak{X}^+ = \{$ primitive even Dirichlet characters associated to $K \}$, $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}^+$ とすれば、$\prod_{\chi\in\mathfrak{X}}(1-\chi(p)p^{-s})$
$= \prod_{\chi\in\tilde{\mathfrak{X}}}(1-\chi(p)p^{-s}) \Big/ \prod_{\chi\in\mathfrak{X}^+}(1-\chi(p)p^{-s})$ for any $s\in\mathbb{C}$ である。
知られている様に、$\prod_{\chi\in\tilde{\mathfrak{X}}}(1-\chi(p)p^{-s}) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}\ \mathrm{in}\ K \\ \mathfrak{p}|p}}(1-N\mathfrak{p}^{-s})$;
$\prod_{\chi\in\mathfrak{X}^+}(1-\chi(p)p^{-s}) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}\ \mathrm{in}\ K^+ \\ \mathfrak{p}|p}}(1-N\mathfrak{p}^{-s})$. そこで $s\to 0$ とすれば、上の Lem. の後半をうる。前半については、殆んど明らかである。 ☒

さて、$\dot{\lambda}\in\mathbb{N}$ を $\dot{\lambda}\dot{S}\in R$ をみたす最小数とする。

<u>Lem. 3.</u> N を $\mathbb{Q}^{(f)}$ から K への norm とし、$\zeta_f = \exp(\pi i/2f)$ とすれば、$\dot{\lambda}$ は $N(\zeta_f)$ の order である。$\dot{\lambda}$ 及び $(\mathbb{Q}^{(f)}:K)$ が odd ならば、$\lambda = 2\dot{\lambda}$ であり、その他の場合には、$\lambda = \dot{\lambda}$.

(∵) Gras [1] p37. Cor. II 3, によれば、$\dot{\lambda} = f/(f, \sum_{a\in H} a)$. これは、明らかに $N(\zeta_f)$ の order である。λ と $\dot{\lambda}$ との関係は関係式 $S = \dot{S} - (\mathbb{Q}^{(f)}:K)/2\cdot\sum_{\sigma\in G}\sigma$ を使えば得られる。 ☒

$N(\zeta_f)$ について調べるために、K の任意の 1 のベキ根 α に対して、その order を $O(\alpha)$ と書き; 各 prime p に対して、$\mathrm{ord}_p f$ を $n(p)$ とかく。

<u>Lem. 4.</u> $p|f$, fixed に対して、$n' = n(p)$, $L = K\cdot\mathbb{Q}^{(p^{n'})}$, $K_0 = K\cap\mathbb{Q}^{(p^{n'})}$ とすれば、$\mathrm{ord}_p O(N(\zeta_f))$ は、$\mathrm{ord}_p O(N_{\mathbb{Q}^{(p^{n'})}/K_0}\zeta_{p^{n'}}^{(\mathbb{Q}^{(f)}:L)})$ に等しい。

<u>Lem. 5.</u> $g^- \neq 0$ を仮定すれば、各 odd prime $p|f$ に対

して，$\mathrm{ord}_p\, o(N(\zeta_f)) = \mathrm{ord}_p\, w$．従って $(N/w)^{-1} \in \mathbb{Z}$ は，2のベキである．($(N/w)^{-1} \in \mathbb{Z}$ は，Lem. 3 から得られる．)

<u>Lem. 6.</u> $n' = \mathrm{ord}_2 f$；$L = K \cdot \mathbb{Q}^{(2^{n'})}$；$K_0 = K \cap \mathbb{Q}^{(2^{n'})}$．とすれば，$\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f))$ は次のとおりである．

Case 1. $w \equiv 0\,(4)$．$\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = \max\{0,\ \mathrm{ord}_2 w - \mathrm{ord}_2(\mathbb{Q}^{(f)} : L)\}$．

Case 2. $w \equiv 2\,(4)$ かつ $K_0 \not\subset \mathbb{R}$．$\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : L)$ is odd；$= 0$ if not．

Case 3. $K_0 \subset \mathbb{R}$．$\mathrm{ord}_2\, o(N(\zeta_f)) = 0$．

<u>Remark.</u> $w \equiv 0\,(4)$ のとき，$g^- \neq 0$ と仮定すれば，f の odd prime factor はすべて $\equiv 3\,(4)$ である，ことが云える．

以上の Lemmas から，次の N/w に関する information が得られる：

<u>Prop. 3.</u> $g^- \neq 0$ と仮定する．記号は，Lem. 6 と同じ．

Case 1. $N/w = 2^{-t}$，$t = \min\{\mathrm{ord}_2 w,\ \mathrm{ord}_2(\mathbb{Q}^{(f)} : L)\}$．

Case 2. $N/w = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : L)$ is odd；$= 1/2$ if not．

Case 3. $N/w = 1$ if $(\mathbb{Q}^{(f)} : K)$ is odd；$= 1/2$ if not．

<u>Cor.</u> $N := \{p \mid \text{prime},\ p \mid f\}$ とする．$w \equiv 0\,(4)$ のとき，$g^- \neq 0$ を仮定すれば，$N/w = 2^{-t}$，$t = \min\{\mathrm{ord}_2 w,\ \mathrm{ord}_2 w + N - 2 - \mathrm{ord}_2 n\}$．

<u>Remark.</u> Q については，[3] §§20-26 を参照する．

4°. いくつかの例について $[R^- : \underline{S}]$ を計算したい．

<u>Prop4.</u> fが素数巾ならば，$[R^- : \underline{S}] = h^-$; f が composite で，$g^- \neq 0$ かつ $\exists p$: odd prime st $j \in T(p)$ であれば，$[R^- : \underline{S}] = g^-/2 \cdot h^-$.

(∵) fが素数pベキのときには，[3] Satz 22により $Q=1$. また $g^-=1$. $p \neq 2$ なら Prop3. Case3 から $\Lambda/w=1$; $p=2$ なら $L=\mathbb{Q}^{(f)}$ となるので Prop3. Case1 により $\Lambda/w=1$. 次に $p \neq 2$ $j \in T(p)$ と仮定すれば，K_0はreal でかつ $|H| = (\mathbb{Q}^{(f)} : K)$は even となる. だから Prop3. Case3により. $\Lambda/w = 1/2$. 又，このときには. [3] Satz 16 により $Q=1$ ☒

<u>Cor.</u> $g^-=1$のときには. $[R^- : \underline{S}] = h^-$ (fが素数巾のとき) ; $= h^-/2$ (f が composite のとき)

<u>Remark.</u> $g^- \neq 0$ と仮定したとき次のことが示される: Λがeven なら $\underline{S} = \underline{\dot{S}}^-$; Λがodd なら $[\underline{S} : \underline{\dot{S}}^-] = 2$. だから 上の Cor は，$g^-=1$ならつねに $[R^- : \underline{\dot{S}}^-] = h^-$を主張している.

<u>Prop.5.</u> fが composite で G の Sylow 2-subgroup S_2 が cyclic で $g^- \neq 0$ とすれば，$[R^- : \underline{S}] = g^-/2^2$ if $w \equiv 0\ (4)$ & $N \geqq 3$; $= g^-/2 \cdot h^-$ otherwise.

(∵) $G = S_2 \times M$ (direct) とし，M の fixed field を $\tilde{K}$，$\tilde{K}$ の unit index を $\tilde{Q}$ とすれば，$\tilde{K}/\mathbb{Q}$ は cyclic ゆえ [3] Sat 23により $\tilde{Q}=1$. しかも $(K : \tilde{K}) = \text{odd}$ だから [3] Sat 15により, $Q=1$

が, $\mathfrak{q}=1$ から従う. $\exists p$: odd prime s.t. $j\in T(p)$ の場合は, すでに Prop 4 で扱われたので, そうでない場合を考える. そのとき, $\mathfrak{D}_2$ が cyclic であることから, $j\in T(2)$ が示される. だから $|H| = (\mathbb{Q}^{(t)}:K) =$ even. ゆえに K_0 が real なら Prop 3. Case 3 により, $\Lambda/w = 1/2$; $K_0 \not\subset \mathbb{R}$ かつ $w\equiv 2\ (4)$ なら Case 2 により やはり $\Lambda/w = 1/2$. 最後に $\mathrm{ord}_2 w = 2$ のときには, $K_0/\mathbb{Q}$ も cyclic なので $K_0 = \mathbb{Q}^{(4)} = \tilde{K}$ をうる. かくして, Prop. 3 の Cor により, Prop. 5 が証明される. □

5° Gillard [2] は, [3] Satz 29 を一般の実アーベル体にまで拡張した. この関係式の analogue も一般の虚アーベル体に対して存在すると思われる. 又, 木村達雄氏は, 1° で述べた Sinnott [7] の関係式の一般の虚アーベル体への拡張を考え, その index を計算する実行可能と思われる algorithm を与えたことを注意しておく.

References.

[1] G. Gras, "Application de la notion de φ-objet à l'etude du groupe des classes d'ideaux des extensions abéliennes", Publ. Math. de L'Univ. de Besançon (Théorie des Nombres) 1975–76.

[2] R. Gillard, "Unites cyclotomiques", Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, 3 novembre 1977.

[3] H. Hasse, "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper." Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1952).

[4] K. Iwasawa, "A class number formula for cyclotomic fields". Ann. of Math. 76 (1962), 171-179.

[5] S. Lang, "Cyclotomic fields" Springer-Verlag (1978).

[6] H.-W. Leopoldt, "Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper". Abh. Deutsch Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Nat. 2 (1953).

[7] W. Sinnott "On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field" Ann. of Math. 108 (1978), 107-134.

[8] C.-G. Schmidt "Grössencharaktere und Relativklassenzahl abelscher Zahlkörper". J. of Number Theory 11 (1979), 128-159.