数理解析研究所講究録
380巻 1980年 117-126

Robust Regression and Interpolation for Time Series

広島大学工学部　谷口正信

1. Introduction.　ここでは spectral density が vaguely known である場合の regression と interpolation 問題を考える。即ち interpolation においては，関与している stationary process の spectral density が class $\mathcal{S}=\{g;\ g(x)=(1-\varepsilon)f(x)+\varepsilon h(x),\ 0<\varepsilon<1\}$ に属すると仮定する。ただし $f(x)$ は known な spectral density, $h(x)$ は unknown な spectral density で適当な class $\mathcal{D}$ に属する。この時 class $\mathcal{S}$ に関して min-max robust な interpolator を構成する。一方時系列の回帰 model で，残差 spectral density $g(x)$ が $\mathcal{S}$ に属する場合，回帰係数の $\mathcal{S}$ に対して min-max robust な推定量を構成する。

2. Interpolation and Regression.　まず interpolation について考える。今 $\{X(t);\ t=\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ を平均 0, spectral density $g(x)$ をもつ定常過程とする。そして

$\mathcal{D} = \{g\ ;\ g(x)=g(-x),\ g(x)>0\ ,\ g(x)$ は $[-\pi,\pi]$ 上で連続しかも区分的になめらか$\}$と定義する。ここでは $X(0)$ を $X(j)$ $j\neq 0$ の線形結合で近似する。つまり次の型の問題になる。

$$\underset{\{\alpha_j\}}{\mathrm{Min}}\ E\left|X(0)-\sum_{j\neq 0}\alpha_j X(j)\right|^2 = \underset{h(x)}{\mathrm{Min}}\int_{-\pi}^{\pi}|1-h(x)|^2 g(x)\,dx\ ,$$

ただし $h(x)$ は $e^{ijx}\ ;\ j\neq 0$ で生成されるclosed linear manifoldに属する。このとき次の定理を得る。

Theorem 1. $\{X(t)\}$ の真のspectral densityが $g(x)\in\mathcal{D}$ であるにもかかわらず、interpolatorをpseudo spectral density $\phi(x)\in\mathcal{D}$ から構成すれば、そのresponse functionは

$$1-\phi(x)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)^{-1}dx\right)^{-1}$$

で与えられる。またこのときのinterpolation errorは

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)^{-1}dx\right\}^{-2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(x)}{\phi(x)^2}dx\right\}$$

で与えられる。△

次に回帰について考える。

$$y(t)=\alpha z(t)+u(t)\ ,$$

ただし α はunknown parameter, $z(t)$ はknownな函数で次の条件をみたす。

i) $\displaystyle\sum_{t=0}^{T-1}|z(t)|^2\to\infty$ as $T\to\infty$,

ii) $\displaystyle\max_{0\le t\le T-1}|z(t)|\Big/\Big(\sum_{t=0}^{T-1}|z(t)|^2\Big)^{1/2}\to 0$, as $T\to\infty$,

iii) $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T-1}z(t+s)z(t)\Big/\sum_{t=0}^{T-1}|z(t)|^2=\int_{-\pi}^{\pi}e^{isx}R(dx)$.

また $u(t)$ は stationary process で平均 0, spectral density $g(x)$ をもつとする。今 $\psi(x)$ を

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt}\,\overline{\psi(x)}\,dx = z(t),\quad 0 \le t \le T-1,$$

の解であるとすると,

$$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} z_y(dx),\quad z_y(dx) = \alpha\,\overline{\psi(x)}\,dx + z_u(dx),$$

と表わせる。ただし $u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} z_u(dx)$. 今 $\phi \in \mathfrak{L}$ に対して

$$\hat{\alpha} \doteqdot \left[\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} |\psi(x)|^2 dx\right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \psi(x)\, z_y(dx)$$

とおくとこれは本質的には Rozanov 型推定量であることがわかる。そして次の定理は Rozanov による.

Theorem 2. (Rozanov (1969)). $D_T(\hat{\alpha} - \alpha)$ の漸近的分散は

$$V(\phi, g) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} R(dx)\right)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x)}{\phi(x)^2} R(dx)/2\pi$$

で与えられる。ただし $D_T \doteqdot \sqrt{\sum_{t=0}^{T-1} |z(t)|^2}$. ◭

3. Robust Interpolation and Regression。前章で見た様に interpolation も regression の場合も $V(\phi, g)$ 型の criterion で表わされるので以後 $V(\phi, g)$ の behavior を見る。しばらくの間 $R(dx) = r(x)dx$, $r(x) > 0$ である場合

を考える。

$$\mathscr{D}_0 = \{ c(x) \in \mathscr{D} \ ; \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c(x)}{r(x)} dx = 1 \}$$

$$S = \{ g(x) \ ; \ g(x) = (1-\varepsilon) f(x) + \varepsilon h(x) \},$$

$$h(x) \in \mathscr{D}_0 \ , \ 0 < \varepsilon < 1, \quad \text{と置く。}$$

もちろん $f(x)$ は known で $f(x) \in \mathscr{D}_0$. 次にある $m > 0$ に対して $E_m = \{ x \in [-\pi, \pi] \ ; \ m \geq (1-\varepsilon) f(x)/r(x) \}$,

$F_m = \{ x \in [-\pi, \pi] \ ; \ m < (1-\varepsilon) f(x)/r(x) \}$ とおくと Hosoya (1978) の Lemma 1 と同様にして次を得る。

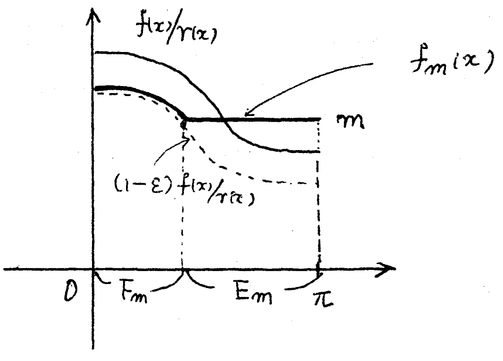
Lemma 1. ある $\underbrace{\text{正数が}}_{m}$ 一意に存在して

$$(1-\varepsilon) \int_{F_m} f(x)/r(x) \, dx + \int_{E_m} m dx = 1$$

をみたす。 △

ここで
$$f_m(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon) f(x) & , x \in F_m \\ m \, r(x) & , x \in E_m \end{cases}$$

と定義すれば、Lemma 1 は $f_m \in \mathscr{D}_0$ を意味する。



左図は以上の事の直観的な説明である.

ここで我々は次の定理を得る.

Theorem 3. $V(\phi, g)$ は saddlepoint をもつ. i.e.,

$$\underset{g\in S}{Max}\ V(\phi_0, g) = V(\phi_0, g_0) = \underset{\phi\in\mathcal{D}_0}{Min}\ V(\phi, g_0),$$

ただし $\phi_0 = g_0 = \phi f_m$. △

この定理の意味することは $\min_{\phi}\max_{g} V(\phi, g) = \max_{g} V(\phi_0, g)$ であり，よって min-max robust な回帰係数推定量および interpolating response function はそれぞれ

(1) $\hat{\alpha} = [\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1}|\psi(x)|^2 dx]^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1}\psi(x) z_y(dx)$,

(2) $1 - f_m^{-1}(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)^{-1}dx\right)^{-1}$

で与えられる。ただし (2) の interpolating response function は $r(x)=1$ として計算された $f_m(x)$ を用いねばならない。

◎ 時系列回帰の場合 regression spectrum が q 個の jumps から成るとき； $R(x) = \sum_{x_j\le x} \Delta R(j)$, $j=1,\dots,q$ が重要である。ここで次の様に定義する。

$$\mathcal{D}_1 = \{ c(x)\in\mathcal{D}\ ;\ \sum_{j=1}^{q} c(x_j)\Delta R(j)^{-1} = 1 \}.$$

ある $l>0$ に対して

$E_l = \{ x_j\ ;\ l \ge (1-\varepsilon) f(x_j)/\Delta R(j) \}$,

$F_l = \{ x_j\ ;\ l < (1-\varepsilon) f(x_j)/\Delta R(j) \}$, と定義する。

このとき Lemma 1 と同様に次の補題を得る。

Lemma 1'. ある正数 $\ell > 0$ が一意に存在して

$$(1-\varepsilon)\sum_{j\in F_\ell} f(x_j)/\Delta R(j) + \ell\cdot N(E_\ell) = 1 ,$$

ただし $N(E_\ell)$ は x_j で E_ℓ に属するものの個数. ◭

ところで jump を $R(x)$ が持つ場合の criterion は,

$$V_1(\phi, g) = \Big(\sum_j \phi(x_j)^{-1}\Delta R(j)\Big)^{-2}\Big(\sum_j \frac{g(x_j)}{\phi(x_j)^2}\Delta R(j)\Big)$$

となる。今ここで

$$S_1 = \{ g \in \mathfrak{D}_1 \; ; \; g(x) = (1-\varepsilon)f(x) + \varepsilon h(x),\ h(x) \in \mathfrak{D}_1,\ 0<\varepsilon<1 \},$$

$$f_\ell(x_j) = \begin{cases} (1-\varepsilon)f(x_j), & x_j \in F_\ell \\ \ell\,\Delta R(j), & x_j \in E_\ell, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, q.$$

とおけば Theorem 3 と同様にして次の定理を得る。

Theorem 3'. $V_1(\phi, g)$ は saddle point をもつ. i.e.,

$$\underset{g\in S_1}{\mathrm{Max}}\; V_1(\phi_0, g) = V_1(\phi_0, g_0) = \underset{\phi\in\mathfrak{D}_1}{\mathrm{Min}}\; V_1(\phi, g_0),$$

ただし $\phi_0 = g_0 = f_\ell$. ◭

よって min-max robust な回帰係数の推定量は次で与えられる。

$$\hat{\alpha} = \Big[\sum_j f_\ell(x_j)^{-1}|\psi(x_j)|^2\Big]^{-1}\cdot\sum_j f_\ell(x_j)^{-1}\psi(x_j)\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\sum_{t=0}^{T-1} y(t)\,e^{itx_j}.$$

4. Multiple Robust Regression. 回帰函数が多次の場合を考える。即ち

$$y(t) = \alpha_1 z_1(t) + \cdots + \alpha_p z_p(t) + u(t),$$

ただし $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)'$ は未知 vector, $\underset{\sim}{z}(t) = (z_1(t), \ldots z_p(t))'$, は次の i) − iii) をみたす known な回帰函数,

i) $\sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \longrightarrow \infty$, $T \to \infty$, $j = 1, \ldots, p$,

ii) $\lim_{T\to\infty} \max_{0 \le t \le T-1} |z_j(t)| \Big/ \left(\sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \right)^{1/2} = 0$, $j = 1, \ldots, p$,

iii) $\lim_{T\to\infty} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} z_k(t+s) z_j(t) \right\} \Big/ \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} |z_k(t)|^2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} |z_j(t)|^2 \right\}^{1/2} = R_{kj}(s)$

$\underset{\sim}{R}(s) = \{ R_{kj}(s) \}$ $p \times p$ - matrix.

このとき $\underset{\sim}{R}(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixs} \underset{\sim}{R}(dx)$ の表現が可能である。

今 $\underset{\sim}{\psi}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^{T-1} \underset{\sim}{z}(s) e^{-isx}$ と置く。

$\underset{\sim}{\alpha}$ の推定量として

$$\hat{\underset{\sim}{\alpha}} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underset{\sim}{\psi}(x) \underset{\sim}{\psi}(x)^* dx \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underset{\sim}{\psi}(x) z_y(dx)$$

を考えると $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$ の asymptotic covariance matrix は

$$\underset{\sim}{V}(\phi, g) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underset{\sim}{R}(dx) \right)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(x)}{\phi(x)^2} \underset{\sim}{R}(dx) \right) \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)^{-1} \underset{\sim}{R}(dx) \right)^{-1}.$$

と表はせる。

この場合の難点は $R(dx)$ がすべての周波 x に関して同時 $\overbrace{\text{対角化}}^{\text{一般に}}$ できないことにある。この場合 $R(\cdot)$ の spectrum elements が points からなる場合を考えると spectrum element 上の jumps はある unitary 行列で対角化される。よってこの様な場合は成分ごとに Theorem 3′ の議論を apply してやればよい。

Example. 回帰 model として次を考える。

$$y(t) = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) + u(t) \quad ,$$

ただし $z_1(t) = \cos\theta_1 t + \cos\theta_2 t$, $z_2(t) = \sin\theta_1 t + \sin\theta_2 t$,

$\theta_j = \frac{2\pi j}{T}$ (j: ~~integer type~~ の数) とする。また $u(t)$ は平均 0 の stationary process でその spectral density $g(x) \in S_1$ であることがわかっているとする。このとき

$$\underset{\sim}{\rho}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta_1 s + \cos\theta_2 s}{2} & -\dfrac{\sin\theta_1 s + \sin\theta_2 s}{2} \\ \dfrac{\sin\theta_1 s + \sin\theta_2 s}{2} & \dfrac{\cos\theta_1 s + \cos\theta_2 s}{2} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。従って $R(x)$ の jumps は

$$V = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{at } \theta_1, \theta_2 ,$$

$$V' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{at } -\theta_1, -\theta_2 ,$$

となることがわかる。

これら V, V' は

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$ で同時対角化され

$$UVU^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad UV'U^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。ここで known な spectral density $f(x)$,
($g = (1-\varepsilon)f + \varepsilon h$) は

$$2f(\theta_1) + 2f(\theta_2) = 1, \quad f(\theta_1) < f(\theta_2)$$

であるとする。今 $\ell > 0$ を

$$\ell + 2(1-\varepsilon)f(\theta_1) = 1$$ の解とする。

そして

$$f_\ell(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)f(\theta_2), & x = \pm\theta_2 \\ \ell/2, & x = \pm\theta_1, \end{cases}$$

と定義すれば S_1 に関して min-max robust な α の推定量

は

$$\hat{\alpha} = \left[\sum_{x=\pm\theta_1, \pm\theta_2} f_\ell(x)^{-1} \psi(x) \psi(x)^* \right]^{-1}$$

$$\times \left[\sum_{x=\pm\theta_1, \pm\theta_2} f_\ell(x)^{-1} \psi(x) \frac{1}{2\pi} \sum_{t=0}^{T-1} y(t) e^{itx} \right]$$

で与えられる。

References

Hannan, E. J. (1970). Multiple Time Series. Wiley.

Hosoya, Y. (1978). Robust linear extrapolations of second-order stationary processes. Ann. Prob. 574–584.

Huber, P. (1964). Robust estimation of a location parameter. Ann. Math. Statist. 35. 73–101.

Rozanov, Yu. A. (1969). On a new class of statistical estimates, Soviet-Japanese Sympos., Theory of Probability, Novosibirsk, 239–252.

Taniguchi, M. (1979). Regression and interpolation for time series. International Conference in Statistics in Tokyo. 167–170.