

## 点過程を出力する線形因果モデル

統計数理研 尾形良彦

### 1. はじめに

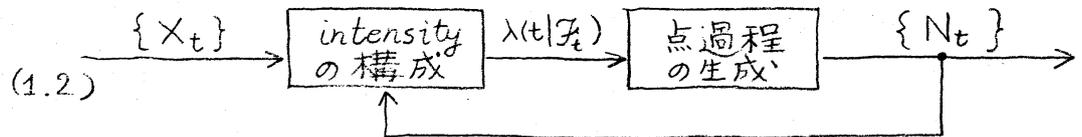
$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  は  $t$  につれて増加する  $\sigma$ -加法族とする。これに対して adapted な非負の確率過程  $\{\lambda(t|\mathcal{F}_t), t \geq 0\}$  が与えられると、これを *intensity* とする点過程  $(N_t, P)$  が唯一存在する。すなわち

$$(1.1) \quad P\{N_{t+\Delta t} - N_t = 1 \mid \mathcal{F}_t\} = \lambda(t|\mathcal{F}_t)\Delta t + o(\Delta t).$$

(このように *intensity* から点過程を生成する効率の良いアルゴリズムは「削ぎ落とし法」を応用すると得られる。[6]) ここでもし  $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, 0 \leq s < t\}$  のとき、この点過程は *self-exiting* であると呼ばれる。( *self-exiting* な点過程をデータとするときの尤度による推定方式の漸近理論は [5] に与えられている。)

本報告では、*intensity* 過程がもう一つの確率過程  $\{X_t, t \geq 0\}$  によつて調節されている事態について考える。

このシステムを図示すると次のようになる。



input  $\{X_t\}$  は点過程であっても良いし、または非負の連続過程  $\{x(s)\}$  の累積過程  $X_t = \int_0^t x(s) ds$  でも良い。 $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, N_s; 0 \leq s < t\}$  すなわち  $\{X_t\}$  と  $\{N_t\}$  が観測データとなる。

このモデルの目的は2本のデータ  $\{X_t\}$  と  $\{N_t\}$  が与えられたときに、これらに統計的因果関係があるか否か、もしあるとすれば、どのようなものか、を見ることである。例えば、地震の系列  $\{N_t\}$  に対してあるデータ  $\{X_t\}$  は前兆としての意味を持つのか、持つとすれば、どのくらいの遅れがあるか。2本の神経インパルス系列の関連性、等々、考えられる。

## 2. 線形因果モデル

点過程  $(N_t, P)$  は充分小さな区間  $(t, t+\Delta t)$  に高々1個の点しか起らない (orderliness) と考えてよい、すなわち

$$(2.1) \quad P\{N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2 \mid \mathcal{F}_t\} = o(\Delta t).$$

すると (1.1) と (2.1) によって

$$(2.2) \quad E\{N_{t+\Delta t} - N_t | \mathcal{F}_t\} = \lambda(t | \mathcal{F}_t) \Delta t + o(\Delta t)$$

となり、これは  $\mathcal{F}_t$  の情報のもとでの区間  $(t, t+\Delta t)$  が起るか否かについての最良予測になっている。 $\mathcal{F}_t$  は  $\{X_t\}$ ,  $\{N_t\}$  の過去の履歴となっているのだから、我々は最も簡単なモデル、すなわち最良予測が  $\{X_t\}$ ,  $\{N_t\}$  について線形に与えられる場合を考える。すなわち

$$(2.3) \quad \lambda(t | \mathcal{F}_t) = \mu + \int_0^t g(t-s) dN_s + \int_0^t h(t-s) dX_s,$$

ただし最後の項は、 $\{X_t\}$  が点過程か  $x(s)$  の累積過程かによって、 $\sum_{x_i < t} h(t-x_i)$  か  $\int_0^t h(t-s) x(s) ds$  となる。システム (1.2) のもとで  $\{X_t\}$  と  $\{N_t\}$  に統計的因果関係がないことは  $h(s) \equiv 0$  となることに対応する。 $g(s)$  は  $\{N_t\}$  の *intensity* に対する *feedback* のあり方を示す。我々の興味は、したがって、応答関数たち  $g(s)$ ,  $h(s)$  の形状を知ることである。

*intensity* モデル (2.3) は形式的には、Hawkes [4] の *mutually-exiting* 点過程の *intensity* ベクトルの一成分と見なせないこともない ( $\{X_t\}$  が点過程のとき)。しかしここでのモデルに於いて我々は *input* データ  $\{X_t\}$  の確率法則 (統計的構造) は一切向わない。従って *input-output* の  $\{X_t\}$  と  $\{N_t\}$  の同時分布 (尤度) は全く不明である。

それにも拘らず、Cox [3] の意味での *partial* な対数尤度が

$$(2.4) \quad \mathcal{L}_T = \int_0^T \log \lambda_\theta(t | \mathcal{F}_t) dN_t - \int_0^T \lambda_\theta(t | \mathcal{F}_t) dt,$$

(但し  $\lambda_\theta(t | \mathcal{F}_t)$  は (2.3) に与えたもの) と書くことができる。この *partial-likelihood* に基づく推定方式の漸近理論は、 $(\{X_t\}, \{N_t\})$  の定常エルゴード性等の正則条件のもとでは [5] に於けると類似に、保証される。従って *large sample* のもとでは、対数尤度の  $\chi^2$ -性、AIC の使用などが正当化される。

### 3. Parametrization と 尤度計算

尾崎および赤池 [7] は Hawkes の *self-exting* 過程の応答関数  $g(t)$  をラゲール型多項式

$$(3.1) \quad g(t) = \sum_{k=0}^K a_k t^k e^{-ct}$$

によって近似することを提案している。この型の応答関数は尤度関数における非線形最適化や *simulation* に際して *recursive* な構造をもっていて効率のよい計算を可能にする (赤池 [1], および [6])。これらから、もうひとつの応答関数についても

$$(3.2) \quad h(t) = \sum_{m=0}^M b_m t^m e^{-ct}$$

とパラメータ表現する。こうして時間区間  $[0, T]$  に input に点列  $\{x_j\}_{j=1, \dots, J}$ , output に点列  $\{t_i\}_{i=1, \dots, I}$  を観測したとき partial log-likelihood (2.4) は次のとおり。

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}_T(\mu, c, a_0, \dots, a_K, b_0, \dots, b_M) \\ &= \sum_{i=1}^I \log \left\{ \mu + \sum_{k=0}^K a_k Q_k(i) + \sum_{k=0}^M b_k R_k(i) \right\} - \mu T \\ & \quad - \sum_{i=1}^I \sum_{k=0}^K a_k S_k(T-t_i) - \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^M b_k S_k(T-x_j). \end{aligned}$$

ただし  $Q_k(i), R_k(i)$  として  $S_k(t)$  は以下のごとく recursive に書かれたものである。すなわち初期値として  $Q_0(1) = R_0(1) = 0$  かつ  $S_0(t) = (1 - e^{-ct})/c$  とおく。そして  $k=0, 1, 2, \dots, i=0, 1, 2, \dots$  に対して順次

$$(3.4) \quad \begin{aligned} Q_k(i+1) &= (\Delta t_i)^k e^{-c \Delta t_i} + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\Delta t_i)^l e^{-c \Delta t_i} Q_l(i) \\ R_k(i+1) &= D_k(t_i, t_{i+1}) + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\Delta t_i)^l e^{-c \Delta t_i} R_l(i) \\ S_{k+1}(t) &= \{(k+1)S_k(t) - t^{k+1} e^{-ct}\} / c \end{aligned}$$

によって定義していく。ここに  $t_0 = 0, \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ,

$$D_k(t_i, t_{i+1}) = \sum_{t_i \leq x_j < t_{i+1}} (t_{i+1} - x_j)^k e^{-c(t_{i+1} - x_j)}$$

は、その都度計算される。

もし input が  $X_t = \int_0^t x(s) ds, 0 \leq t \leq T$  なる  $\{x(s)\}$

が観測されるとする。このとき  $\{x(s)\}$  は離散化されて  $X_t$  は次のように近似する。  $[0, T]$  を  $J$  等分して  $\sigma_j = j \cdot T/J$ ,

$$(3.5) \quad X_L = \sum_{j=1}^L x(\sigma_j) \cdot T/J$$

とする。こうして、この場合の partial-log-likelihood は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}_T(\mu, c, a_0, \dots, a_K, b_0, \dots, b_M) \\ &= \sum_{i=1}^I \log \left\{ \mu + \sum_{k=0}^K a_k Q_k(i) + \sum_{k=0}^M b_k R'_k(i) \right\} - \mu T \\ & \quad - \sum_{i=1}^I \sum_{k=0}^K a_k S_k(T-t_i) - \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^M b_k S'_k(j) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで  $Q_k(i)$  と  $S_k(t)$  は (3.4) と同じに定義されるが、

$$(3.7) \quad \begin{aligned} R'_k(i+1) &= D'_k(t_i, t_{i+1}) + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\Delta t_i)^l e^{-c \Delta t_i} R'_l(i) \\ S'_k(j) &= S_k(T - \sigma_j) \cdot x(\sigma_j) \\ D'_k(t_i, t_{i+1}) &= \sum_{t_i \leq \sigma_j < t_{i+1}} x(\sigma_j) (t_{i+1} - \sigma_j)^k e^{-c(t_{i+1} - \sigma_j)} \end{aligned}$$

である。

関数たち (3.3), (3.6) の gradient ベクトル, Hessian 行列も recursive な量たち (3.4), (3.7) の有理結合で与えられるが、ここでは省略する。

応答関数を近似するラグー型多項式の最適次数は AIC によって選択する。

## 4. 或る条件付情報量について

output データ  $\{N_t\}$  に対して input データ  $\{X_t\}$  の奇与の割合を示す条件付情報量は次のように定義される。

$$(4.1) \quad I_T(X|N) = E \left[ \int_0^T \lambda(t|\mathcal{F}_t) \log \frac{\lambda(t|\mathcal{F}_t)}{\lambda(t|\mathcal{H}_t)} dt \right],$$

ただし  $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, X_s; 0 \leq s < t\}$  として  $\mathcal{H}_t = \sigma\{N_s, 0 \leq s < t\}$ 。  
いま  $X$  が点過程のとき、 $X$  と  $N$  の相互情報量 (シャノンの意味での)  $I_T(X; N)$  と条件付情報量の関係は

$$(4.2) \quad I_T(X; N) = I_T(X|N) + I_T(N|X)$$

で与えられることが知られている (Bremaud [2])。

もし  $\{N_t\}$  の各 jump  $\{t_i\}$  で  $\lambda(t_i|\mathcal{F}_{t_i})$  と  $\lambda(t_i|\mathcal{H}_{t_i})$  の値が、わかっているならば  $I_1(X|N)$  の不偏一致推定量として

$$(4.3) \quad \hat{I}_1(X; N) = \frac{1}{T} \int_0^T \log \left\{ \lambda(t|\mathcal{F}_t) / \lambda(t|\mathcal{H}_t) \right\} dN_t$$

を考えることができる。しかしながら実際には、そのようなことは望めない。そこで線形因果モデル (2.3) を仮定してモデルを適合させて推定された  $\hat{\lambda}(t|\mathcal{F}_t)$  および  $\hat{\lambda}(t|\mathcal{H}_t)$  によって (4.3) に代入することが提案される。ただし  $\hat{\lambda}(t|\mathcal{H}_t)$  は (2.3) において  $h(s) \equiv 0$  を仮定したモデル (self-exciting) の推定によって得られる。

## 5. シミュレーションと群発地震データの解析

まず真の構造としてラグール型多項式の応答関数を与えてそれから作ったデータをもとに3節で述べた尤度計算をして推定すると、もとの応答関数が復元できるだろうか。図1は真の応答関数のグラフを与えている。上段の2つは(1.2)において外からの入力に無関係な *self-exciting* の場合、下段の2つは外からの入力にも関係する場合である。左側の2つのグラフが *self-exciting* な部分、右側の2つが外からの入力に対する応答を示すものである。LGの次にある数字はグラフのラグール型多項式の次数を示している。これら2つの場合のデータを「削ぎ落とし法」( [5] ) で時間区間 2000.0 で生成した。入出力の2本のデータは生成されるときは *mutually-exciting* なものとして生成してもかまわないからそのようにした。図2は、図1のもとのデータについて最適な推定モデルのグラフである。それぞれのモデルのラグール型多項式の9次までのAICの最小になる次数の組み合わせを選び、その係数は最尤推定値である。右側にそれぞれの4節で定義された情報量の推定値が与えてある。相互情報量  $I$  は相関  $\rho$  に対して  $I = -\frac{1}{2} \log(1-\rho)$  (但し2次元正規分布の場合) の関係があるから大体の感じと矛盾しないであろう。このグラフから応答関数の復元について、2節の終りで述べていることを合

わせて確認された。

表1は長野県松代の群発地震の最頻期のデータである。1965年10月1日頃に始まり4~5年続いたこの地震群のデータでマグニチュードが4.0前後以上のもので、定常に起っていると思われる90日~800日の間のデータをとった。従って1965年12月30日0時0分0秒を0.0としたときに続々に起った時点を記してある。上段のLMデータはマグニチュード4.6以上、下段は4.5以下のもので、時間1.0は1日をあらわし小数は24時間を10進法に展開した。

図3は(1.2)に於いてSMデータを入力、LMを出力としたとき、図4は逆にLMを入力、SMを出力とした、応答関数のAIC最小のものグラフである。それぞれの上段がself-excitingな部分、下段が入力による応答を示している。図3の上段の応答で負になっているのは、大きい地震が起ると次にまた大きい地震が起りにくくなっていることを示している。また下段のグラフたちを見比べると小さい地震が大きい地震に与える応答よりも逆の応答の方が強いことを示している。横座標の数字は1.0が1日を意味するので応答の時間経過がだいたいどのようになっているのかを示している。

## 6. おまげと謝辞

この報告で提案された線形因果モデルは2本のデータ(うち1つは点過程)の時間的因果関係のあり方を推定された応答関数のグラフをとおして見、予測するのに役だてようとする一つの現実的な方法と考えられる。入力データは複数にできるし、(2.3)における応答関数の他の *Parameterization* も考えられるが、それはまた別の機会に発表する。このモデルの尤度計算やシミュレーションのためのプログラムパッケージも近い将来に発表する予定である。

表1に与えられた地震データは、1976年に学術振興会によってニュージーランド、ヴィクトリア大学の Vere-Jones 教授を招いた際に於ける著者を含む統計数理研究所の共同プロジェクト(代表者、赤池弘次氏)に、気象庁より提供されたものに基づいている。この点について深く感謝する。また、ここで提案されたモデルの基本的なアイディアは、赤池弘次氏や尾崎統氏に示唆されたものである。尤度関数の非線形最適化のプログラムは TIMSAC 78 のものを使った。この際、北川源四郎氏には、様々の貴重な援助をいただいた。さらに尤度計算のプログラム作成にあたっては桂康一氏に一貫した援助をしていただいた。以上の統計数理研究所の各氏に深く感謝する。京大防災研の尾池助教授には、地震データなどに関してたいへん

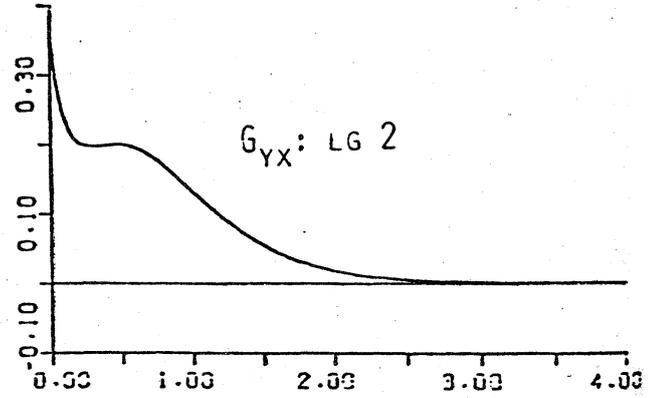
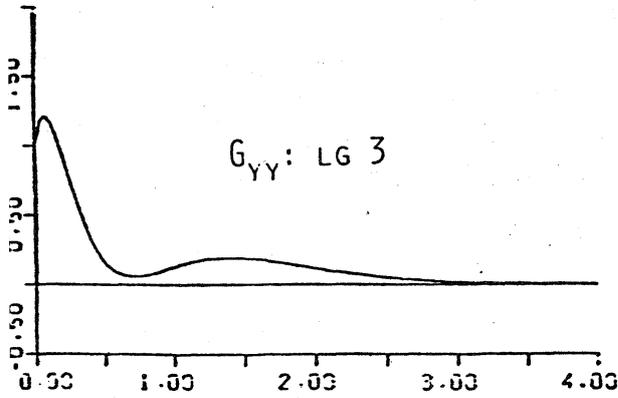
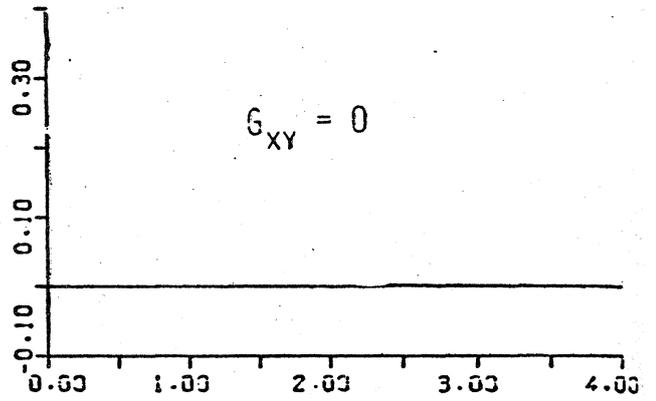
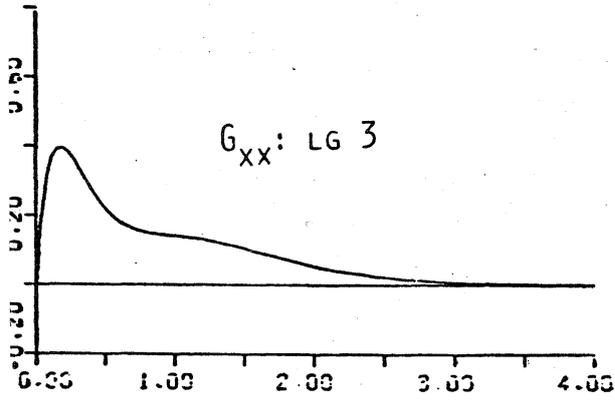
有益な助言をいただいた。

## REFERENCES

- [1] Akaike, H. (1979). On a point process model which allows efficient likelihood computation, Res. Memo., No. 174, The Inst. Statist. Math., Tokyo.
- [2] Breman, P. M. (1972). A martingale approach to point processes, Memo., No. ERL-M345, Electronics Research Laboratory, Univ. of California, Berkeley.
- [3] Cox, D. R. (1975). Partial likelihood, Biometrika, 62, pp. 269-276.
- [4] Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some mutually exciting point processes, Biometrika, 58, pp. 83-90.
- [5] Ogata, Y. (1978). The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 30, No. 2, A, pp. 243-261.
- [6] Ogata, Y. (1979). On Lewis' simulation method for point processes, Res. Memo., No. 147, The Inst. Statist. Math., Tokyo.
- [7] Ozaki, T. & Akaike, H. (1979). A parametric model for Hawkes' self-exciting point processes and its application to the spectrum estimation of point processes, submitted for publication.

1

SIMULATION (THE TRUE MODEL)



2 MINIMUM AIC MODEL FOR THE SIMULATION DATA

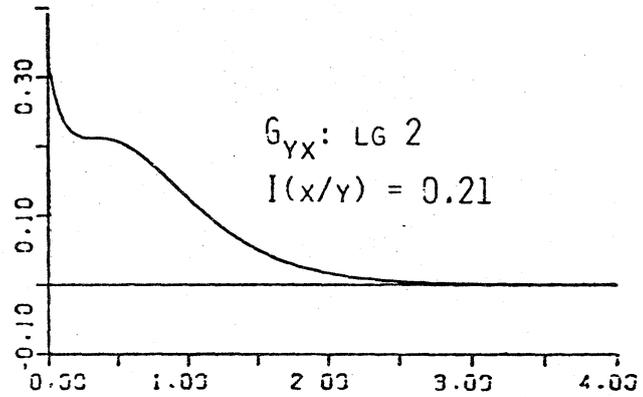
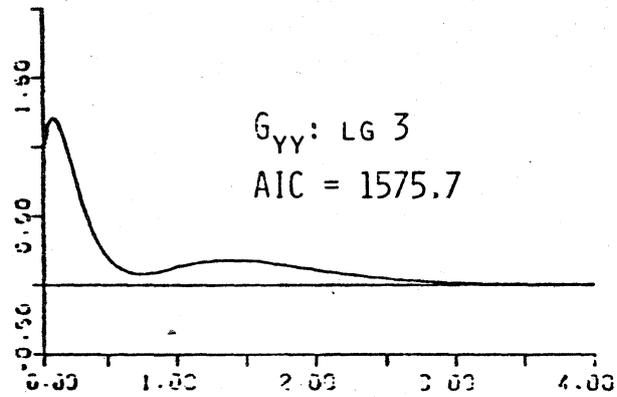
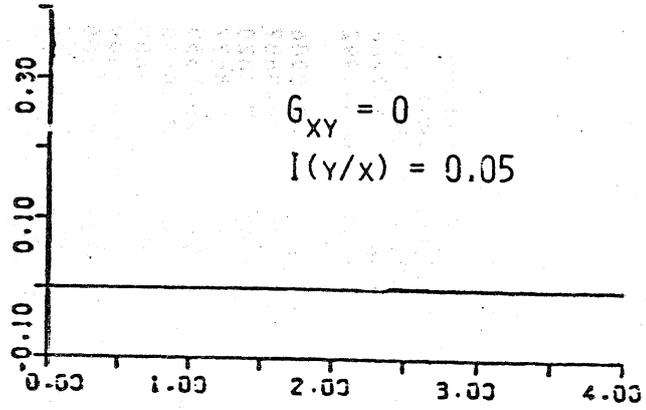
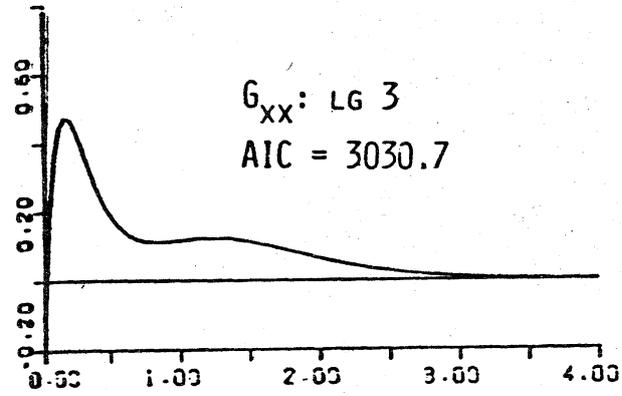


表 1

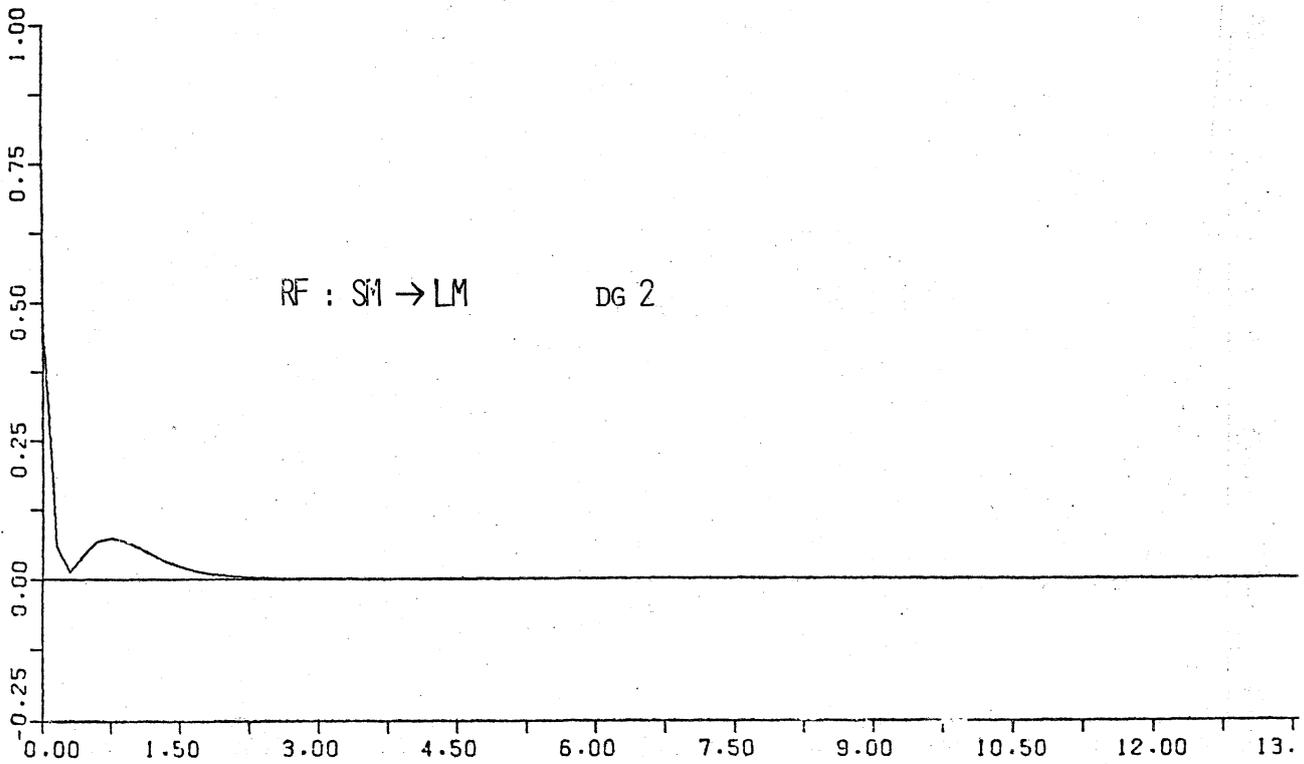
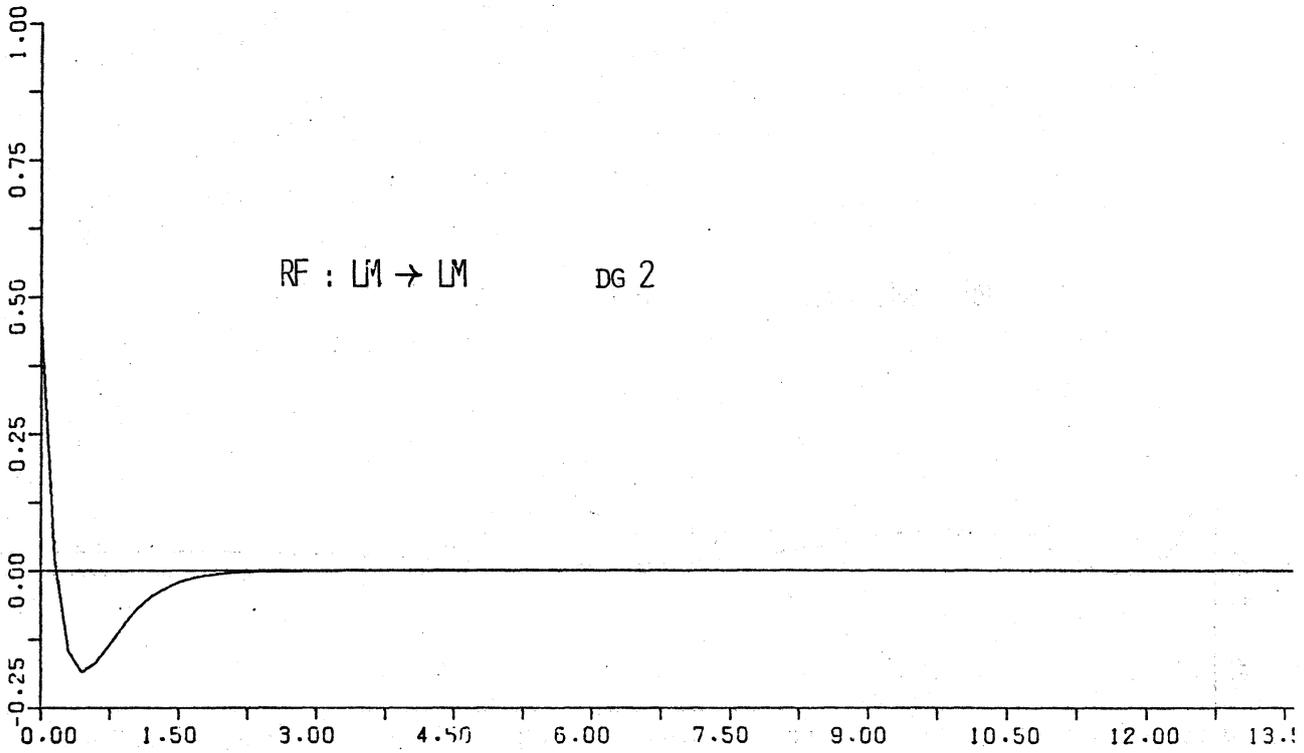
710.000	49	273	LM	SM	102.2031	102.2539	108.4297	108.6562	108.8516
4.1641	9.9375	24.8437	39.1680	96.7422	102.2031	102.2539	108.4297	108.6562	108.8516
110.3125	125.4492	127.4609	127.7969	141.3945	146.2461	149.5977	163.5000	164.4023	173.9180
178.6875	180.7539	192.6523	216.1562	221.3984	233.8242	241.5469	242.0234	250.1484	253.6758
258.2656	258.4258	271.1680	287.2500	293.0000	297.4648	300.1250	373.8672	376.7266	378.8906
382.5195	382.5195	400.7187	405.7812	427.1484	491.3477	541.0625	623.8164	653.1992	
16.0547	21.9961	43.0508	44.1680	46.3125	48.7148	59.4180	60.6602	68.8086	70.2930
70.4637	82.3320	84.5820	88.4648	90.6055	92.4414	97.7109	100.1875	100.9687	102.1211
102.6172	103.3086	103.3086	103.3906	104.5703	104.7734	105.3789	106.5703	107.0820	107.3789
107.6289	107.7812	108.6758	108.8320	108.8359	109.2383	112.1602	112.4102	112.8477	113.1250
115.8516	117.6406	120.7617	121.7344	122.1992	123.0273	123.0742	123.5586	125.3555	125.6016
126.5352	127.2070	127.6680	127.7930	127.8242	127.8510	129.0000	131.5156	133.0430	135.8164
135.9297	135.9648	136.3320	136.5977	138.0586	140.6406	140.6086	140.9102	140.9609	141.3516
141.4362	142.4492	142.9492	143.7266	144.0977	144.3789	145.9648	146.1211	146.4609	146.4766
146.8516	147.6836	148.6437	148.9180	149.5156	149.9375	150.5312	151.0820	151.5586	155.1445
157.2852	158.8398	162.4414	162.4531	162.7539	163.5508	164.8516	167.1602	167.4023	177.2930
178.4023	178.5195	178.7500	179.1680	179.6602	180.7305	183.2305	184.5859	188.7891	189.9297
190.6328	191.6660	192.8398	193.4727	194.5859	200.2344	200.5000	201.2930	204.5937	208.3086
210.6289	214.4023	216.0586	217.3945	217.8945	218.4336	219.1562	222.5234	223.6562	225.2031
225.8516	227.0664	227.1680	227.8281	229.5508	229.7773	231.0234	231.0469	232.7031	233.1875
233.7695	234.6445	238.8594	240.9336	241.5547	241.5625	241.5781	241.5859	242.4414	243.2539
244.3008	244.3164	244.5664	244.5664	246.4102	246.4141	247.7812	250.9883	251.6367	252.8906
254.1172	255.0898	255.8281	256.1445	257.0820	257.2734	258.3906	258.9766	260.2734	260.8572
261.3906	263.9102	264.2930	268.7031	268.8086	271.1914	271.8047	274.1836	277.3086	277.4805
277.6211	280.4766	286.1484	300.1328	300.2305	302.8320	305.5820	312.6250	313.7539	321.3320
325.7227	330.0859	336.7734	336.8164	340.1836	347.2148	349.5234	356.5352	370.1328	385.0781
393.7695	405.0977	406.4062	409.3867	414.0937	418.6016	426.1758	426.5391	427.1875	427.9219
428.8633	431.1445	431.4492	431.8867	444.4297	445.8820	450.0625	450.5430	451.6758	457.0039
468.1094	470.3711	470.7500	470.7617	470.7773	473.3086	478.4180	478.6875	484.9727	491.3477
495.4727	505.6016	507.8711	509.3242	516.6680	516.7070	519.3828	523.7148	543.9453	545.7773
557.0898	559.7578	559.8281	563.9570	563.9687	571.2930	571.9375	573.0430	590.5937	610.0039
615.6211	623.5430	625.9922	625.9961	631.3008	633.9258	634.2109	637.1367	643.4219	644.3047
648.1055	648.1172	651.2461	653.3203	653.4453	671.8594	677.4219	685.8828	694.0430	694.3398
701.5586	703.0898	709.4570							

LM : LARGER MAGNITUDE THAN 4.55

SM : SMALLER MAGNITUDE THAN 4.55

1.0 CORRESPONDS ONE DAY (24H)

3 RESPONSE FUNCTIONS 1



☒ 4 RESPONSE FUNCTIONS 2

