数理解析研究所講究録
380巻 1980年 61-73

平均が既知の正規分布の分散の同時推定と母数に線形不等式制約のある場合のStein推定量

慶大 工学部 篠崎信雄
張 元宗

I. 平均が既知の正規分布の分散の同時推定 James & Stein (1961) が多変量正規分布の母平均の推定問題で，通常の推定量よりも‘よい’推定量を与えて以来，いくつかの母数を同時に推定するとき，通常の推定量を改良する問題が研究されている。（Clevenson & Zidek, 1975, Hudson, 1978 等）.

ここでは，平均が既知の正規分布の分散の同時推定問題を考える。平均が既知の場合，正規分布の分散の推定問題は次のように述べられる。Xという確率変数がθY, ここでYは自由度nのχ^2変量として分布している，として分布しているとき，θを推定する。平均2乗誤差を基準にするとき，$X/(n+2)$は，cXなる形（ここでcは定数）の推定量の中で最良のものであり，許容的な推定量である（Hodges & Lehmann, 1951）。

いまX_i, $i=1,\cdots,p$, が独立に，$\theta_i Y_i$, ここでY_iは自由度n_iのχ^2変量，として分布しているとする。$\theta_1,\cdots,\theta_p$を同時に推

定するときの損失を $\sum_{i=1}^{p}(\hat{\theta}_i-\theta_i)^2$ で定義する。推定量として

$$\delta_i=\left\{1+a\,\frac{f(X_1^2/b_1,\cdots,X_p^2/b_p)}{X_i^2/C_i}\right\}\frac{X_i}{n_i+2}\ ,\quad i=1,\cdots,p$$

なる形のものを考える。$f=f(X_1^2/b_1,\cdots,X_p^2/b_p)$ としては、

(i) $\min_k (X_k^2/b_k)$, (ii) $1/(\sum_k b_k/X_k^2)$

を考える。そのとき、$0<a<8(p-e)$ ならば、$\delta_i,\ i=1,\cdots,p$ は $X_i/(n_i+2),\ i=1,\cdots,p$ よりも一様に危険関数の値が小さい、

ここで
$$b_i=(n_i+2)^2(n_i-2)^2$$
$$C_i=(n_i+2)^2(n_i-2)$$
$$e=E\{\max_k (n_k+2)/Y_k\}$$
である。

上の事実を証明してみよう。θ_i の推定量として、δ_i と $X_i/(n_i+2)$ の損失の差は、

$$\left(X_i/(n_i+2)-\theta_i\right)^2-\left\{\frac{X_i}{n_i+2}+a\frac{f}{X_i^2/C_i}\frac{X_i}{n_i+2}-\theta_i\right\}^2$$

$$=-2a\frac{C_i}{X_i}\frac{f}{n_i+2}\left(\frac{X_i}{n_i+2}-\theta_i\right)-a^2\frac{C_i^2}{X_i^2}\frac{f^2}{(n_i+2)^2}$$

$$=2a\left[\frac{C_i}{Y_i}\frac{f}{n_i+2}-\frac{C_i f}{(n_i+2)^2}-\frac{a}{2}\frac{f^2}{X_i^2/b_i}\right]\equiv 2a\,K_i,$$

K_i の第1項は、

<u>Lemma</u>：χ^2 を自由度 n の χ^2 変量とすると、

$$E\{g(\chi^2)/\chi^2\}=E\{g(\chi^2)\}/(n-2)-2E\{g'(\chi^2)\}/(n-2)$$

を用いて,

$$E\left(\frac{c_i}{Y_i}\frac{f}{n_i+2}\right)=\frac{c_i}{n_i+2}\left\{\frac{E(f)}{n_i-2}-\frac{2}{n_i-2}E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right)\right\}$$

$$\therefore E(K_i)=\frac{4c_i\cdot E(f)}{(n_i+2)^2(n_i-2)}-\frac{2c_i}{(n_i+2)(n_i-2)}E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right)-\frac{a}{2}E\left(\frac{f^2}{X_i^2/b_i}\right)$$

$$=4E(f)-2(n_i+2)E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right)-\frac{a}{2}E\left(\frac{f^2}{X_i^2/b_i}\right)$$

(i) $f=\min X_\alpha^2/b_\alpha$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial Y_i}=2f\ I_{\Omega_i}/Y_i,$$ ここで I_{Ω_i} は Ω_i の indicator

Ω_i は $\min(X_\alpha^2/b_\alpha)=X_i^2/b_i$ なる集合。

$$\therefore E(\Sigma K_i)=4pE(f)-4E\left(f\cdot\Sigma(n_i+2)I_{\Omega_i}/Y_i\right)-\frac{a}{2}\Sigma\frac{f^2}{X_i^2/b_i}$$

$$\geqq 4pE(f)-4E\left\{f\cdot\max\left(\frac{n_\alpha+2}{Y_\alpha}\right)\right\}-\frac{a}{2}E(f)$$

$$\geqq 4E(f)\ (p-e-a/8)\ >0$$

(ii) $f=1/(\Sigma b_\alpha/X_\alpha^2)$ のときも同様にして

$E(\Sigma K_i)\geqq 4E(f)\ (p-e-a/8)$ が示される。

注意1. $\hat{\sigma}_i$ は通常の推定量 $X_i/(n_i+2)$ を,最小分散不偏推定量 X_i/n_i にむけて(あるいは0にむけて)拡大する形になっていることに注意する。又,改良は p が2以上ならば可能であることにも注意する。(次の注意も参照)

注意2. 実際に $\hat{\sigma}_i$ を使用するには, $e=E\left\{\max\left(\frac{n_\alpha+2}{Y_\alpha}\right)\right\}$ が評価

できねばならない。同じような形の量の評価について Berger & Bock (1976) が議論している。彼等も述べているように、$\min n_k \to \infty$ のとき，c は 1 に近づく。また，n_i が偶数ならば陽に表現は可能である。いま $n_i = n$, $i=1,\cdots,p$ ならば，c は $(n+2)E\{\max(1/Y_k)\}$ で，$Y_1,\cdots,Y_p$ は大きさ p の標本として考えられる。従って，標本のなかの最大値の期待値についての評価式（Hartley & David, 1954）を用いれば，

$$(n+2)^{-1} c \leqq (n-2)^{-1} + \sqrt{2}\,(p-1) / \{\sqrt{2p-1}\cdot(n-2)\sqrt{n-4}\}$$

を得る。この評価を用いると，改良が可能なのは，各 p に対して n が次のような場合である，

p	2	3	4	5〜8	9〜
$n \geqq$	11	8	7	6	5

注意 3. 上の議論は，形式的に，平均が未知の場合の正規分布の分散の同時推定にもあてはめられるが，平均が未知のとき，標本分散の定数倍のなかで最良の推定量は許容的ではない。（Stein, 1964）。

文献： Berger & Bock (1976) : Statistical Decision Theory & Related Topics II, Clevenson & Zidek : JASA 70, 698−705, Hartley & David : AMS, 25, 85−99, Hodges & Lehmann : 2nd Berkeley Symp. 13−22. Hudson : AS, 6, 473−484, James & Stein : 3rd Berkeley Symp. 197−206. Stein ; AISM, 16, 155−160.

Ⅲ 母数に線形不等式制約のある場合の Stein推定量

x を $N(\mu, I)$ に従う確率変数のベクトルとし，次元 p を 3 以上の値であるとする。μ を推定するときの損失を $(\hat{\mu}-\mu)'(\hat{\mu}-\mu)$ で定義すると推定量

$$\{1-(p-2)/x'x\}x$$

が x 自身よりよい推定量であることは James & Stein (1961) により示された。ここでは $\mu\equiv(\mu_1,\cdots,\mu_p)'$ に線形不等式制約がある場合，最尤推定量の改良となる推定量を与えることを考える。典型として，次の2つの線形不等式制約について考える。

1. $\mu_i \ge 0 \quad i=1,\cdots,p$
2. $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_p$

1. $\mu_i \ge 0 \quad i=1,\cdots,p$ について下記の結果が得られる。

$k\ge3$ とする。$D(i_1,\cdots,i_k)\equiv\{x \mid x_{i_1}\ge0,\cdots,x_{i_k}\ge0,\ x_{i_{k+1}}<0,\ x_{i_p}<0\}$ とおく。

定理1　$X_i \overset{ind}{\sim} N(\mu_i,1)$　$i=1,\cdots,p$，但し，$\mu_i\ge0$　$i=1,\cdots,p$．とし，$\delta^1(x)$ の第 i 要素を $\delta^1_i(x)$ とすると．$0<a_k<2(k-2)$ ならば μ_i の推定量

$$\delta^1_{i_j}(x)=\begin{cases}\left.\begin{cases}\left(1-a_k\Big/\sum_{l=1}^{k}x_{i_l}^2\right)x_{i_j} & j=1,\cdots,k\\ 0 & j=k+1,\cdots,p\end{cases}\right\}\text{if } x\in D(i_1,\cdots,i_k)\\ \mu_{i_j}\text{ の最尤推定量} \qquad \text{その他}\end{cases}$$

はμ_iの最尤推定量$x_i^+ \equiv \max(x_i, 0)$よりよい推定量となり，さらに

$$\Delta R_1 \equiv R(x^+, \mu) - R(\delta^1(x), \mu)$$
$$= \sum \int_{D(i_1, \cdots, i_k)} \frac{2a_k k - (4a_k + a_k^2)}{\sum_{l=1}^{k} x_{i_l}^2} p(x, \mu)\, dx$$

になり，$a_k = k-2$のときΔR_1は最小値である。ここでΣは$1, \cdots, p$から3ッ以上の要素からなる集合$(i_1, \cdots, i_k)$のすべてのとり方についての和の意味であり，$p(x, \mu)$は多次元正規分布の密度関数である。

定理1ではx_iを原点に近づけるStein推定量を与えた。いまそのかわりに標本平均に近づけるStein推定量も次のようにつくられる。

$D(i_1, \cdots, i_k)$を前述の集合とし，$k \geqq 4$とする。

定理2　$X_i \overset{ind}{\sim} N(\mu_i, 1)$　$i=1, \cdots, p$　但し，$\mu_i \geqq 0$　$i=1, \cdots, p$　とし，$\delta^2(x)$の第i要素を$\delta_i^2(x)$とすると，$0 < b_k < 2(k-3)$ならばμ_iの推定量

$$\delta_{i_j}^2(x) = \begin{cases} \begin{cases} \bar{x}_{i_1, \cdots, i_k} + \left(1 - \dfrac{b_k}{\sum_{l=1}^{k}(x_{i_l} - \bar{x}_{i_1, \cdots, i_k})^2}\right)(x_{i_j} - \bar{x}_{i_1, \cdots, i_k}) & , j=1, \cdots, k \\ 0 & , j=k+1, \cdots, p \end{cases} & \text{if } x \in D(i_1, \cdots, i_k) \\ \mu_{i_j} \text{ の最尤推定量} & \text{その他} \end{cases}$$

はμ_iの最尤推定量x_i^+よりよい推定量となり，さらに

$$\begin{aligned}\Delta R_2 &\equiv R(\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{\mu}) - R(\boldsymbol{\delta}^2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\mu}) \\ &= \sum \int_{D(i_1,\cdots,i_k)} \frac{2b_k k - (4b_k + b_k^2)}{\sum_{l=1}^{k} (x_{i_l} - \bar{x}_{i_1,\cdots,i_k})^2} p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})\, d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

になり，$b_k = k-3$ のときΔR_2は最小値である。ここでΣは$1,\cdots,p$から4ッ以上の要素からなる集合$(i_1,\cdots,i_k)$のすべてのとり方についての和の意味であり，

$$\bar{x}_{i_1,\cdots,i_k} \equiv \sum_{l=1}^{k} x_{i_l}/k$$

である。

2. $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_p$について下記のような結果が得られる。

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_p$という制約条件の下で$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_p)'$の最尤推定量は参考文献[1]に与えられている。

定理3　$X_i \overset{ind}{\sim} N(\mu_i, 1)$　$i = 1,\cdots,p$ 但し $-\infty < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_p < \infty$ とする。$p \geq 3$ならば $0 < c < 2(p-2)$ のとき$\boldsymbol{\mu}$の推定量

$$\boldsymbol{\delta}^3(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{c}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}\right)\boldsymbol{x} & \text{if } -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p < \infty \\ \boldsymbol{\mu}\text{の最尤推定量}\ \boldsymbol{x}^*, & \text{その他} \end{cases}$$

は$\boldsymbol{\mu}$の最尤推定量$\boldsymbol{x}^*$よりよい推定量である。さらに

$$\Delta R_3 \equiv R(x^*, \mu) - R(\delta_1^3(x), \mu)$$
$$= \int_{D_1 \subset R^p} \frac{2cp - (4c + c^2)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} p(x, \mu)\, dx$$

になり，ΔR_3 は $c = p-2$ のとき最小値である。ここで

$$D_1 \equiv \{ (x_1, \cdots, x_p) \mid -\infty < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_p < \infty \} \subset R^p$$

である。

証明

$$\Delta R_3 \equiv R(x^*, \mu) - R(\delta_1^3(x), \mu)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_p}\cdots\int_{-\infty}^{x_{j+1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_3}\int_{-\infty}^{x_2} \left(\frac{2cx_1(x_1-\mu_1)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_1^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_j \cdots dx_{p-1} dx_p$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_p}\cdots\int_{-\infty}^{x_{j+1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_3}\int_{x_1}^{x_3} \left(\frac{2cx_2(x_2-\mu_2)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_2^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_2 dx_1 \cdots dx_j \cdots dx_{p-1} dx_p$$
$$+ \cdots$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_p}\cdots\int_{-\infty}^{x_{j+1}}\int_{-\infty}^{x_j}\cdots\int_{x_{j-3}}^{x_j}\int_{x_{j-2}}^{x_j} \left(\frac{2cx_{j-1}(x_{j-1}-\mu_{j-1})}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_{j-1}^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_{j-1} dx_{j-2} \cdots dx_1 dx_j \cdots dx_{p-1} dx_p$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_p}\cdots\int_{-\infty}^{x_{j+2}}\int_{-\infty}^{x_{j+1}}\cdots\int_{x_{j-2}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left(\frac{2cx_j(x_j-\mu_j)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_j^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_j dx_{j-1} \cdots dx_1 dx_{j+1} \cdots dx_{p-1} dx_p$$
$$+ \cdots$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_p}\cdots\int_{x_{p-3}}^{x_p}\int_{x_{p-2}}^{x_p} \left(\frac{2cx_{p-1}(x_{p-1}-\mu_{p-1})}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_{p-1}^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_{p-1} dx_{p-2} \cdots dx_1 dx_p$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty}\cdots\int_{x_{p-2}}^{\infty}\int_{x_{p-1}}^{\infty} \left(\frac{2cx_p(x_p-\mu_p)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} - \frac{c^2 x_p^2}{(\sum_{i=1}^{p} x_i^2)^2} \right) p(x, \mu)\, dx_p dx_{p-1} \cdots dx_2 dx_1$$

になり，各項について x_i 部分積分を行なって，ΔR_3 は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Delta R_3 = & -\int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_2, u_1, u_2; x_3, u_3; \cdots; x_p, u_p)\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset R^{p}} g_1(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1 \cdots dx_p \\
& - \int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_3, u_2, u_3; x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\, dx_3 \cdots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_1, u_2, u_1; x_3, u_3; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\, dx_3 \cdots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset R^{p}} g_2(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1 \cdots dx_p \\
& + \cdots \\
& - \int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_j, u_{j-1}, u_j; x_{j-2}, u_{j-2}; \cdots; x_1, u_1; x_{j+1}, u_{j+1}; \cdots; x_p, u_p)\, dx_{j-2} \cdots dx_1\, dx_j \cdots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_{j-2}, u_{j-1}, u_{j-2}; x_{j-3}, u_{j-3}; \cdots; x_1, u_1; x_j, u_j; \cdots; x_p, u_p)\, dx_{j-2} \cdots dx_1\, dx_j \cdots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset R^{p}} g_{j-1}(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1 \cdots dx_p \\
& - \int_{D_1 \subset R^{p-1}} f(x_{j+1}, u_j, u_{j+1}; x_{j-1}, u_{j-1}; \cdots; x_1, u_1; x_{j+2}, u_{j+2}; \cdots; x_p, u_p)\, dx_{j-1} \cdots dx_1\, dx_{j+1} \cdots dx_p
\end{aligned}
$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j-1}, u_j, u_{j-1}; x_{j-2}, u_{j-2}; \cdots; x_1, u_1; x_{j+1}, u_{j+1}; \cdots; x_p, u_p)\, dx_{j-1}\cdots dx_1\, dx_{j+1}\cdots dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p}} g_j(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\cdots dx_p$$

$$-\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j+2}, u_{j+1}, u_{j+2}; x_j, u_j; \cdots; x_1, u_1; x_{j+3}, u_{j+3}; \cdots; x_p, u_p)\, dx_j\cdots dx_1\, dx_{j+2}\cdots dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_j, u_{j+1}, u_j; x_{j-1}, u_{j-1}; \cdots; x_1, u_1; x_{j+2}, u_{j+2}; \cdots; x_p, u_p)\, dx_j\cdots dx_1\, dx_{j+2}\cdots dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p}} g_{j+1}(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\cdots dx_p$$

$$+\cdots$$

$$-\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_p, u_{p-1}, u_p; x_{p-2}, u_{p-2}; \cdots; x_1, u_1)\, dx_{p-2}\cdots dx_1\, dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_{p-2}, u_{p-1}, u_{p-2}; x_{p-3}, u_{p-3}; \cdots; x_1, u_1; x_p, u_p)\, dx_{p-2}\cdots dx_1\, dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p}} g_{p-1}(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\cdots dx_p$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p-1}} f(x_{p-1}, u_p, u_{p-1}; x_{p-2}, u_{p-2}; \cdots; x_1, u_1)\, dx_{p-1}\, dx_{p-2}\cdots dx_1$$

$$+\int_{D_1\subset\mathbb{R}^{p}} g_p(x_1, u_1; \cdots; x_p, u_p)\, dx_1\cdots dx_p$$

$i=1,2$ のときの計算結果は第1項から第5項までであり，第4項の変数 x_1 を x_2 に変換すると第1項符号を変えたものになり打消しあう。同様に $i=j-1,j,j+1$ $(2\leq j\leq p-1)$ 第 $3(j-1)+1$ 項と $3(j-2)$ 項と互いに消え，第 $3j+1$ 項と $3(j-1)$ 項と互いに消える。同じように $3(p-1)$ 項と $3(p-2)$ 項は互いに消える。よって残るのは第 $2,5,8,\cdots,3p-2$ 項であり，よって

$$\Delta R_3=\int_{D_1\subset\mathbb{R}^p}\frac{2cp-(4c+c^2)}{\sum_{i=1}^{p}x_i^2}\,p(x,\mu)\,dx$$

になる。ここで

$$f(x_{j+1},\mu_j,\mu_{j+1};x_{j-1},\mu_{j-1};\cdots;x_1,\mu_1;x_{j+2},\mu_{j+2};\cdots;x_p,\mu_p)$$
$$\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_{j+1}-\mu_j)^2}{2}}\frac{2c\,x_{j+1}}{x_1^2+\cdots+x_{j-1}^2+2x_{j+1}^2+x_{j+2}^2+\cdots+x_p^2}\,p(x_{j-1},\mu_{j-1})\cdots p(x_1,\mu_1)p(x_{j+1},\mu_{j+1})\cdots p(x_p,\mu_p)$$

$$g_i(x_1,\mu_1;\cdots;x_p,\mu_p)\equiv\left(\frac{2c}{\sum_{i=1}^{p}x_i^2}-\frac{(4c+c^2)x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{p}x_i^2\right)^2}\right)p(x,\mu)$$

$p(x_i,\mu_i)$ は X_i の密度関数

定理2と同じように原点に近づけるStein推定量のかわりに標本平均に近づけるStein推定量も次のようにつくられる。

定理4　$X_i\overset{ind}{\sim}N(\mu_i,1)$　$i=1,\cdots,p$ 但し $-\infty<\mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_p<\infty$ とする

。$p \geq 4$ ならば $0 < d < 2(p-3)$ のとき μ の推定量

$$\delta^4(x) = \begin{cases} \bar{x} + \left(1 - \dfrac{d}{\sum_{i=1}^{p}(x_i - \bar{x})^2}\right)(x - \bar{x}) & \text{if } -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p < \infty \\ \mu \text{ の最尤推定量 } x^* & \text{その他} \end{cases}$$

は μ の最尤推定量 x^* よりよい推定量である。さらに

$$\Delta R_4 = \int_{D_1 \subset R^p} \frac{2d(p-1) - (4d + d^2)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} p(x, \mu) dx$$

になり，ΔR_4 は $d = p-3$ のとき最小値である。ここで $\bar{x} \equiv \sum_{i=1}^{p} x_i / p$，$\bar{x} \equiv (\bar{x}, \cdots, \bar{x})$ である。

以上の結果は Hudson (1978) によって与えられた分布のクラスの場合に拡張できる。

参考文献

[1] Barlow, Bartholomew, Bremner and Brunk ('72), Statistical Inference under Order Restrictions ; The Theory and Application of Isotonic Regression, New York ; John Wiley & Sons.

[2] Hudson, H.M ('78) A Natural Identity for Exponential Families with Applications in Multiparameter Estimation. The Annals of Statistics. Vol. 6, No. 3, P 473-484

[3] James, W. and Stein, C ('61) Estimation with Quadratic Loss.

Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist Prob. 1. P 361-379
, Univ of California Press.