数理解析研究所講究録
380巻 1980年 54-60

非正則条件の下での局所最小分散不偏推定量

竹内 啓

標本空間を $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ とし，$\mathcal{X}$ の上に定義された確率測度の集合を $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ とし，実母数 $\gamma = g(\theta)$ の不偏推定問題を考える。$\theta = \theta_0$ における局所最小分散不偏推定量（LMVUE）の存在に関しては次の正則条件が基本的である。

1　すべての θ に対して　$P_\theta \ll P_{\theta_0}$

2　すべての θ に対して

$$\int \left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}\right)^2 dP_{\theta_0} < \infty$$

3　$\theta = \theta_0$ で分散有限となる γ の不偏推定量が存在する。

そうすると次の定理がなり立つ。

定理（Barankin 1949　Stein (1950)）条件 1〜3 の下で $\theta = \theta_0$ における LMVUE が存在する。

LMVUE は，任意の分散有限な推定量 $\hat{\theta}$ と $\{dP_\theta / dP_{\theta_0}\}$ で張られる空間へ射影することによって得られることはよく知られている。

ここでこのような LMVUE は $\theta \neq \theta_0$ では分散有限とは限らないことに注意しよう。すなわちすべての θ に対して分散有限な推定量が存在しても LMVUE はつねに分散有限と

は限らない。いいかえればすべてのθについて分散有限となるような推定量の範囲ではLMVUEは存在するとは限らない。

しかしここでは上記の1または2が成立たない場合を考えよう。

2がなりたたない場合には、一般には分散の下限を達成する推定量が存在せず、従ってLMVUEが存在しない。

例　$X = \{(X_{1i}\ X_{2i})\ i=1 - - n\}$であって

$X_{2i} = \theta X_{1i} + U_i$　と表され、X_{1i}、U_iはすべて互いに独立U_iは平均0、分散1の正規分布に従い、またX_{1i}の分布は既知とする。このとき

$$dP_\theta / dP_{\theta_0} = \exp\left[-\left(\frac{\theta^2-\theta_0^2}{2}\right)x_1^2 + (\theta - \theta_0)x_1 x_2\right]$$

Fisher情報量

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{1}{(\theta-\theta_0)^2}\int \left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}\right)^2 dP_{\theta_0} = E[(X_2 - \theta X_1)^2 X_1^2]$$

$$= E(U X_1^2) = E(X_1^2)$$

$E(X_1^2) = m < \infty$ならば、Cramér-Raoの定理により不偏推定量の分散の下限は$1/nm$で与えられる。実際

$$\hat{\theta}_0 = \theta_0 + \sum X_{1i}(X_{2i} - \theta_0 X_{1i})/nm$$

とおけば、$V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 1/nm$であるから、$\hat{\theta}_0$はLMVUEである。

$E(X_1^2) = \infty$のとき、Cramér-Rao限界は0、実際に分散0

の不偏推定量は存在しないが，分散の下限は0になる。

$X_{1i}^{K} = X_{1i} \quad |X_{1i}| \leq K \quad , = 0 \quad |X_{1i}| > K$

とおき，$m_K = E(X_{1i}^{K2}) = E(X_{1i}^{K} X_{1i})$，

$$\hat{\theta}_K = \theta_0 + \Sigma\, X_{1i}^{K}(X_{2i} - \theta X_{1i})/n m_K$$

とおけば $V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 1/n m_K \to 0 \quad (K \to \infty)$

次に1がなり立たない場合について2つの場合を考える。

θ自身を実数とする。$\gamma = g(\theta)$は連続微分可能とする

A　単調な台 support を持つ場合，すなわち

A 1　$\theta_1 > \theta_2$ のとき　$P_{\theta_1} \gg P_{\theta_2}$

このとき$\{P_\theta\}$はあるσ-finite 測度に関して絶対連続となるから　$f(x, \theta) = dP_\theta/d\mu$ と表す。

$A(\theta) = \{x \mid f(x, \theta) > 0\}$

とすれば A1 は $\theta_1 > \theta_2$ のとき $A(\theta_1) \supset A(\theta_2)$ を意味する。

A 2　$\theta < \theta_0$ のとき

$$\int_{A(\theta_0)} \frac{\{f(x, \theta)\}^2}{f(x, \theta_0)} d\mu < \infty$$

Xに対して $T = t(X)$ を次のように定義する。

$$t(x) = \inf\{\theta \mid A(\theta) \ni x\}$$

そうすると $P_\theta\{T < t\} = P_\theta\{A(t) \ni x\}$ となり $t \geq \theta$ のとき これは1に等しい。

A 3 $\displaystyle \lim_{t' \to t+0} \frac{1}{t'-t} P_\theta\{A(t') - A(t)\} = h(t, \theta)$ が存在

A 4 $h(t, \theta)$ は θ に関して連続微分可能 かつ $\left|\frac{\partial}{\partial\theta} h\right|$ が積分可能。

A 5 $h(\theta, \theta) = \displaystyle\lim_{t \to \theta - 0} h(t, \theta) > 0$。

A 6 $f(x, \theta)$ は θ に関して連続微分可能。(a. e. x)

このとき、$\hat\theta = \hat\theta(X)$ を $X \in A(\theta_0)$ について定義され

$$E_\theta\{\hat\theta(X)\} = g(\theta) \qquad \theta \leq \theta_0$$

をみたす推定量とし、$\theta > \theta_0$ に対して

$$\bar g(\theta) = g(\theta) - \int_{A(\theta_0)} \hat\theta(x) f(x, \theta)\, d\mu$$

とおく。$X \notin A(\theta_0)$ に対して、$\hat\theta(X) = \hat\theta^*(t(X)) = \hat\theta^*(T)$ を

$$\int_{\theta_0}^{\theta} h(t, \theta)\, \hat\theta^*(t)\, dt = \bar g(\theta)$$

をみたすように定める。この式の両辺は微分可能であるから θ に関して微分して、

$$h(\theta, \theta)\, \hat\theta^*(\theta) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} h(t, \theta)\, \hat\theta^*(t)\, dt = \bar g'(\theta)$$

を得る。これは Volterra 2型の積分方程式であるから 解が存在する。従って

定理 A 1 ~ A 6 の下で $\theta = \theta_0$ における LMVUE が存存

し，それは $E_\theta(\hat{\theta}) = g(\theta)$ $\theta \leqq \theta_0$ の條件の下で $V_\theta(\hat{\theta})$ を最小にする推定量に一致する。

次に第2の場合として，分布が一方向に並んでいるというべき場合を考えよう

B 1 P_θ は μ によってdominateされる。

$f(x, \theta) = dP_\theta/d\mu$ $A(\theta) = \{x \mid f(x, \theta) > 0\}$

とおく

B 2 $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき $A(\theta_1) \neq A(\theta_2)$

B 3 $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$ 或いは $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2$ のとき

$A(\theta_0) \cap A(\theta_1) \supset A(\theta_0) \cap A(\theta_2)$

B 4 $f(x, \theta)$ は θ に関して連続微分可能 (a. e. x)

ここで2更に2つの場合に分けて考える

B 5 有限個の $\theta_1\ \theta_2 \cdots \theta_k$ および正数 $\varUpsilon$ が存在し，

$\theta_0 - \varUpsilon < \theta < \theta_0 + \varUpsilon$ になるすべての θ に対して

$$A(\theta) \subset A(\theta_1) \cup \cdots \cup A(\theta_k)$$

B 6

$$I_0 = \int_{A(\theta_0)} \frac{\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta_0)\}^2}{f(x, \theta_0)} d\mu < \infty$$

B 7

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{1}{|\theta - \theta_0|} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu = 0$$

定理 B 1 ～ B 7 の下で

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}) \geqq \{g'(\theta_0)\}^2 / I_0$$

すなわち，この場合には分散の下限は0にならない。

分散の下限が0になり得るのは次のような場合である

B 8
$$\lim_{\theta \to \theta_0 + 0} \frac{1}{\theta - \theta_0} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu > 0$$

$$\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} \frac{1}{\theta_0 - \theta} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu > 0$$

いま $U = u(X)$　$V = v(X)$ を次のように定義する。

$$u(x) = \inf \{\theta \mid A(\theta) \ni x\}$$

$$v(x) = \sup \{\theta \mid A(\theta) \ni x\}$$

U, V の（Lebesgue 測度に関する同時密度が存在するとき，それを $g(u, v, \theta)$ と表す。$g(u, v, \theta) > 0$ となるのは $u < \theta < v$ となる範囲に限る。

B 9　$g(u, v, \theta)$ は θ に関して微分可能で $\left|\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|$ は積分可能。

$\hat{\theta}$ を $E_{\theta_0}(\hat{\theta}) = g(\theta_0)$ をみたす任意の推定量とする。

$$\bar{g}(\theta) = g(\theta) - \int_{A(\theta_0)} \hat{\theta}(x) f(x, \theta_0) d\mu$$

とおく。

$$\underline{\theta}(\theta) = \inf_{\theta'} \mu\{A(\theta') \cap A(\theta)\} > 0$$

$$\bar{\theta}(\theta) = \sup_{\theta'} \mu\{A(\theta') \cap A(\theta)\} > 0$$

とおくと $\overline{\theta}(\underline{\theta}(\theta))=\theta$ となる

$\theta>\theta_0$ のとき $$\int_{\theta_0}^{\theta}\int_{\theta}^{\overline{\theta}(\theta)}\hat{\theta}^*(u,v)g(u,v\ \theta)\,du\,dv=\overline{g}(\theta)$$

$\theta<\theta_0$ のとき $$\int_{\underline{\theta}(\theta)}^{\underline{\theta}}\int_{\theta}^{\theta_0}\hat{\theta}^*(u\ v)g(u,v\ \theta)\,du\,dv=\overline{g}(\theta)$$

となるような $\hat{\theta}^*$ を定義することができれば分散0の不偏推定量を構成することができる。このことの一つの十分条件は

$$\lim_{\theta\to\overline{\theta}(\theta)-0}\int g(u,v,\theta)\,du>0 \qquad \lim_{\theta\to\underline{\theta}(\theta)+0}\int g(u,v,\theta)\,dv>0$$

であるが、これは必要条件ではない。

より一般的な十分条件については、まだ十分調べていない。