

連立一次方程式の数値解の誤差の事後評価

中央大 理工 西見二郎

§1 序

Gauss-Seidel 反復法:

$$(0) \quad x^{(\nu+1)} = B_1 x^{(\nu+1)} + B_2 x^{(\nu)} + c, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

ただし:  $Ax = b \Leftrightarrow x = (B_1 + B_2)x + c, \quad A\alpha = b$

の数値解  $x^{(\nu+1)}$  の誤差の事後評価について既知の結果;

$$(1) \quad \|x^{(\nu+1)} - \alpha\| \leq \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1 + B_2\|} \|x^{(\nu)} - x^{(\nu)}\| \quad (\text{Dück, 1959 [1]},)$$

$$(2) \quad \|x^{(\nu+1)} - \alpha\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \|x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}\|.$$

ただし  $\lambda = \max_i \lambda_i, \quad \lambda_i \triangleq \sum_{k=1}^{i-1} |B_{ik}| \lambda_k + \sum_{k=i+1}^n |B_{ik}|$

$B = B_1 + B_2$ ,  $B_1$  は下半三角行列,  $B_2$  は上半三角行列

(Sassenfeld, 1951 [2])

(しかし, 以上の結果は実際には使えない。これは反復法の計算における, 丸め誤差, 桁落ち, 情報落ちなどの影響をまったく考慮しなからである。たとえば, ある  $\nu$  について  $x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)}$  となるような簡単な例をつくることのできるが, この場合以上の評価式による  $x^{(\nu+1)}$  の誤差はゼロとなるが, これは本来的に矛盾である。

本稿では計算誤差の影響を正しく考慮に入れた, *Südk* 型, *Sassenfeld* 型の事後評価式を導く。さらにこれらの評価式を非線型方程式の場合に拡張し, 「一般の Gauss-Seidel 法」の収束条件を導き出す (§2, §3)。

最後に, 上記結果を利用して, 連立一次方程式の近似解が与えらるるとき, 「sharp」な誤差評価をとり, 正確な数値解を求め, 実用的な処方箋を与える (§4, §5, §6)。

### §2 線型方程式に対する Gauss-Seidel 法

$$(3) \quad \tilde{x}^{(v+1)} = \left[ [B_1 \tilde{x}^{(v+1)}]_{FL} + [B_2 \tilde{x}^{(v)}]_{FL} + c \right]_{FL}, \quad v=0, 1, 2, \dots$$

(ただし  $[\cdot]_{FL}$  は浮動小数点演算の結果)

による数値解の誤差は次の式によって正しく評価される。

$$(4) \quad \|\tilde{x}^{(v+1)} - \alpha\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \left\{ \|\tilde{x}^{(v+1)} - \tilde{x}^{(v+1)\Delta}\| + \|B_2\| \|\tilde{x}^{(v+1)} - \tilde{x}^{(v)}\| \right\},$$

(ただし,  $\|B\| < 1$ )

$$(5) \quad \|\tilde{x}^{(v+1)} - \alpha\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \lambda} \left\{ \delta + \lambda \|\tilde{x}^{(v+1)} - \tilde{x}^{(v)}\|_{\infty} \right\}.$$

$$\text{ただし,} \quad \tilde{x}^{(v+1)\Delta} = B_1 \tilde{x}^{(v+1)} + B_2 \tilde{x}^{(v)} + c,$$

$$\delta \triangleq \max_i \delta_i, \quad \delta_i \triangleq \sum_{k=1}^{i-1} |B_{ik}| \delta_k + |x_i - x_i^{\Delta}|.$$

(4), (5) はそれぞれ (1), (2) の改良である。二つは次節の結果の特別の場合である (カッコ内が新しく追加した項)。

### §3 非線型方程式に対する Gauss-Seidel 型反復法

[定理 1]  $X$ : ノルム空間,  $D$ : 実数集合,

$$\tilde{D} \subseteq D \subset X, \quad f: D \times D \rightarrow D, \quad F: D \rightarrow D$$

$x \in D \Rightarrow F(x) \triangleq f(x, x)$ , かつ  $\alpha = F(\alpha)$  とする  $\alpha \in D$  存在。

また任意、 $x, y, z \in D$  に対し、

$$(6) \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq l(x) \|y - z\|,$$

$$(7) \|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad 0 \leq L < 1$$

とする  $l(x), L$  が存在。

$\tilde{f} : \tilde{D} \times \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$  とする 反復法:

$$(8) \tilde{y}^{(v+1)} = \tilde{f}(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}), \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

が定義できる) とする (即ち,  $\tilde{y}^{(0)} \in \tilde{D} \Rightarrow \forall v, \tilde{y}^{(v)} \in \tilde{D}$  のとき)

$$(9) \|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\| \leq \frac{1}{1-L} \left\{ \|\tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)}\| + L_2 \|\tilde{y}^{(v+1)} - \tilde{y}^{(v)}\| \right\}.$$

$$(10) \exists \hat{y}^{(v+1)} \quad \tilde{y}^{(v+1)} = f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}),$$

$$(11) \quad l(\tilde{y}^{(v+1)}) \leq L_2.$$

(証明)

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{(v+1)} - \alpha &= \tilde{f}(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f(\alpha, \alpha) \\ &= \tilde{f}(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) \\ &\quad + f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f(\alpha, \alpha) \\ &= \tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)} + f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f(\alpha, \alpha) \\ &\quad + f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\| &\leq \|\tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)}\| + \|F(\tilde{y}^{(v+1)}) - F(\alpha)\| \\ &\quad + l(\tilde{y}^{(v+1)}) \|\tilde{y}^{(v+1)} - \tilde{y}^{(v)}\|. \end{aligned}$$

(7), (11) とする

$$\|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\| \leq \|\tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)}\| + L \|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\| + L_2 \|\tilde{y}^{(v+1)} - \tilde{y}^{(v)}\|.$$

よから (9) がえらわす。

QED

[定理1] は (8) を計算誤差をふくむ近似法とみなす  
 とし, Collatz [3] による「一般化」は Dück の定理の  
 改良とわらえる。 (9) のカッコ内が Dück-Collatz  
 が与えらる項, 才1項が新しく追加さる項の計算誤差の影響  
 を正しく反映しえる。才1項の追加により (9) の述べらる  
 値が解決さる。

次の系 1-1 は前定理から容易に導かす。説明への記  
 号は [定理1] と同じ意味である。

[系 1-1]  $X = R^n$ ,  $\tilde{D} \subseteq D \subset X$ ,  $D$ : 定域。  
 $\tilde{D} = \{ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \mid \forall i, x_i \in \mathcal{F} \}$ ,  $\mathcal{F}$ : 浮動小数点数  
 全体からなる有限集合。

$f(x, y), F(x)$  が  $x, y \in D \times D$ ,  $D$  を含む領域に  
 連続的に微分可能ら,  $|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}| \leq M_{ik}, |\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_k}| \leq m_{ik}$ ,

$$\| \text{matrix}(M_{ik}) \| \leq L < 1, \| \text{matrix}(m_{ik}) \| \leq L_2$$

のとき

$$(12) \quad \| \tilde{y}^{(v+1)} - \alpha \| \leq \frac{1}{1-L} \{ \| \tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)} \| + L_2 \| \tilde{y}^{(v+1)} - \tilde{y}^{(v)} \| \} \blacksquare$$

不等式 (4) はこの系の特別の場合 ( $f, F$  が linear mapping  
 のとき) である。

[定理 2]  $X = R^n$ ;  $f, \tilde{f}, \phi, \tilde{\phi}$  の意味は [系 1-1]  
 と 4) の  $\alpha$  と同様。

$f(x, y)$  が  $x = \alpha, y = \alpha$  を  $\delta < \epsilon$  適當に近傍に連続的  
 微分可能で,  $|\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial x_k}| \leq M_{ik} (k < i), |\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_k}| \leq M'_{ik} (k \geq i)$ ,

$$l \triangleq \max_i l_i, \quad l_i \triangleq \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} l_k + \sum_{k=i}^n M'_{ik},$$

$$\delta \triangleq \max_i \delta_i, \quad \delta_i \triangleq \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} \delta_k + |\tilde{y}_i^{(v+1)} - \hat{y}_i^{(v+1)}|, \quad \epsilon$$

$$l < 1 \quad \text{と} \quad \epsilon,$$

$$(13) \quad \|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\| \leq \frac{1}{1-l} \left\{ \delta + l \|\tilde{y}^{(v+1)} - \hat{y}^{(v)}\|_{\infty} \right\},$$

( $\hat{y}^{(v)}$  の条件を  $\epsilon$  とする)。

(証明)

$$\epsilon_i^{(v)} \triangleq \tilde{y}_i^{(v)} - \alpha_i \geq 3\delta \quad \text{と} \quad \epsilon,$$

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(v+1)} &= f_i(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f_i(\alpha, \alpha) \\ &= \tilde{f}_i(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) - f_i(\tilde{y}^{(v+1)}, \tilde{y}^{(v)}) \\ &\quad + f_i(\alpha + \epsilon^{(v+1)}, \alpha + \epsilon^{(v)}) - f_i(\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

$$\therefore |\epsilon_i^{(v+1)}| \leq |\tilde{y}_i^{(v+1)} - \hat{y}_i^{(v+1)}| + \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} |\epsilon_k^{(v+1)}| + \sum_{k=i}^n M'_{ik} |\epsilon_k^{(v)}|.$$

$$\epsilon \triangleq \max_i |\epsilon_i^{(v)}|, \quad \delta'_i \triangleq |\epsilon_i^{(v+1)}| / \epsilon \geq 3\delta \quad \text{と} \quad \epsilon$$

$$\delta'_i \leq \frac{1}{\epsilon} |\tilde{y}_i^{(v+1)} - \hat{y}_i^{(v+1)}| + \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} \delta'_k + \sum_{k=i}^n M'_{ik}.$$

$\epsilon < \epsilon$

$$\delta'_i \leq \frac{1}{\epsilon} |\tilde{y}_i^{(v+1)} - \hat{y}_i^{(v+1)}| + \sum_{k=1}^n M'_{ik} = \frac{\delta'_i}{\epsilon} + l_i.$$

いま  $\delta'_k \leq \frac{\delta_k}{\varepsilon} + l_k$ ,  $k=1, \dots, i-1$  が成立している。

$$\delta'_i \leq \frac{1}{\varepsilon} |\tilde{y}_i^{(v+1)} - \hat{y}^{(v+1)}| + \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} \frac{\delta_k}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} l_k + \sum_{k=i}^n M'_{ik}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \delta_i + l_i.$$

従って  $i=1, 2, \dots, n$  に対して  $\delta'_i \leq \frac{\delta_i}{\varepsilon} + l_i$  が成立。

$$\text{即ち } |\varepsilon_i^{(v+1)}| \leq \delta_i + l_i = \max_j |\varepsilon_j^{(v)}|.$$

$$\therefore \|\tilde{y}^{(v+1)} - \alpha\|_{\infty} \leq \delta + l \|\tilde{y}^{(v)} - \alpha\|_{\infty}$$

$$\leq \delta + l \|\tilde{y}^{(v)} - \hat{y}^{(v)}\|_{\infty} + l \|\hat{y}^{(v)} - \alpha\|_{\infty}.$$

よって不等式 (13) が得られる。

Q.E.D.

前節の (5) は [定理 2] の特別な場合である。

連立非線型方程式  $\varphi(x) = 0$  に対して、逐次反復法

$$(14) \quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = F(x); \quad x^{(v+1)} = F(x^{(v)})$$

は、 $F$  が縮小写像であるとき、4 収束する。これはよく知ら

れている。(計算誤差がある場合 (14) の収束の保証は知られていない [4]).

しかし、この (14) で試みても、 $x^{(v+1)}$  が得られないことがある。

$(x_{i-1}^{(v+1)})$  を反復公式の右辺に feed back (Gauss-Seidel 型) とし、 $x_i^{(v+1)}$  を求める方法が利用できる。

この 4 収束が加速される。これを加速法と呼ぶ。

しかし連立一次方程式で知られているように、Jacobi 型

反復法 (14) が収束した Gauss-Seidel 型反復法

$$(15) \quad y^{(v+1)} = f(y^{(v+1)}, y^{(v)})$$

が収束したと仮定する。

次の【定理3】は (15) の収束条件を示している。

【定理3】  $M, M', l_i, l$  の意味は定理2と同様 (正確計算誤差を小さくする反復法 (15) は前定理に於いて  $\delta_i, \delta$  はゼロとする)。

$0 \leq \rho < 1$  のとき反復法 (15) は収束する。

(証明)  $\delta'_i \leq \frac{\delta_i}{\varepsilon} + l_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は前定理証明の中を示した。今の場合に  $\delta_i = 0$  と仮定する。

$$\varepsilon \delta'_i \leq l_i \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ が成立。}$$

$$\varepsilon = \|y^{(v)} - \alpha\|_\infty, \varepsilon \delta'_i = |\varepsilon_i^{(v+1)}| = |y_i^{(v+1)} - \alpha_i| \text{ であるから}$$

$$\|y^{(v+1)} - \alpha\|_\infty \leq l \|y^{(v)} - \alpha\|_\infty.$$

$$(16) \therefore \|y^{(v+1)} - \alpha\|_\infty \leq \rho^{v+1} \|y^{(0)} - \alpha\|_\infty.$$

$$\therefore 0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} y^{(v+1)} = \alpha. \quad \text{QED}$$

【付記】

計算誤差がある場合、各  $v$  に対する  $\delta$  の上界を  $\bar{\delta}$  とするとき (16) のかわりに

$$(17) \quad \|\hat{y}^{(v+1)} - \alpha\|_\infty \leq \frac{\bar{\delta}}{1-\rho} + \rho^{v+1} \|\hat{y}^{(0)} - \alpha\|_\infty$$

が成立 (Isaacson [4] に相当)。

§4 連立一次方程式における誤差限界つき、数値解の求めかた

いま、近似解  $\tilde{x}^{(0)}$  が与えらる。これより  $\tilde{x}^{(1)}$  を次式で求めよ。

$$\tilde{x}^{(1)} = \left[ \begin{array}{c} [B \tilde{x}^{(0)}]_{Fl} + c \\ Fl \end{array} \right], \quad \text{すなわち } Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + c.$$

$\|B\| < 1$  ならば (4)

$$\|\tilde{x}^{(1)} - \alpha\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \left\{ \|\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}\| + \|B\| \|\tilde{x}^{(0)} - \hat{x}^{(0)}\| \right\}$$

により  $\hat{x}^{(1)}$  の誤差限界が与えらる。

$\|B\|$  が 1 にくらゐ近づくほど計算が重くなる。この内の数値は

各項により支配される。すなわち  $\|\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}\|$  の値はほんの 2~3% を求めればよいのである。  $\tilde{x}^{(1)}$  のかわりに

$$\tilde{x}' = B \tilde{x}^{(0)} + c \quad (\text{[多]倍長計算})$$

を用いる。

B は 2 のように書きかき上げると、目的はかわる。すなわち

$$Ax = b \Leftrightarrow x = x + \Lambda(Ax - b), \quad \Lambda \text{ は未定行列}$$

$$\text{とすると, } x = x + \Lambda(Ax - b) \Leftrightarrow x = Bx + c$$

であるから  $I + \Lambda A = B, \quad -\Lambda b = c$  である。

$\|B\|$  を小さくするからには、 $\Lambda$  を  $-A$  の「近似」逆行列と

とすればよい。結局、

$$(18) \quad \tilde{x}^{(1)} = (I + \Lambda A) \tilde{x}^{(0)} - \Lambda b \quad (\text{単精度計算}),$$

$$(19) \quad \hat{x}^{(1)} = (I + \Lambda A) \tilde{x}^{(0)} - \Lambda b \quad (\text{[多]倍長計算}),$$

により  $\tilde{x}^{(1)}, \hat{x}^{(1)}$  を定まらる。

$$(20) \Delta x = \frac{1}{1 - \|B\|} \{ \|\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}\| + B \|\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}\| \}$$

よって  $x^{(1)}$  の誤差を sharp に事後評価できる。ただし

$$B = I + \Lambda A, \quad \Lambda \text{ は } -A \text{ の「近似」逆行列。}$$

### §5 数値例

$$[例1] \quad A = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1220 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6500 & -4200 \\ -140 & 240 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 516 \\ -5720 \\ 13640 \\ -7380 \end{bmatrix}.$$

この例の右辺は、解  $x$  が  ${}^t(1, -1, 1, -1)$  となるように定め  
てある。  $Ax = b$  を FACOM 230-48 による単精度計算(仮  
数部16進647)による解  $\tilde{x}$  を結果を  $\tilde{x}^{(1)}$  とする。

$$\tilde{x}^{(1)} = {}^t(0.9999723, -0.9999965, 1.000089, -0.9998822)$$

である。 (18)式による  $\tilde{x}^{(1)}$  を計算し、(19), (20)式による  $\Delta x$  を  
求めた ( $\Delta x = \|\tilde{x}^{(1)} - x\|$ )。結果は次の通りである。

$$\tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9999784 \\ -0.9999990 \\ 1.0000330 \\ -1.0000350 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = 0.0000354.$$

成分ごとの誤差は次の通り、

$$\xi = \begin{bmatrix} -0.0000216 \\ 0.0000010 \\ 0.0000330 \\ -0.0000350 \end{bmatrix}.$$

この例を示すように本法は極めて sharp な誤差評価を与えている。

以下に示す [例2] は係数行列  $A$  が 4 次の Hilbert 行列 (条件数  $= 1.55 \times 10^4$ )、右辺は解が前例と同一となるように定められた。[例3] は 4 次の Hilbert 行列の逆行列を係数  $A$  とし (Hilbert 行列の逆行列の要素はすべて整数)、 $b$  は [例1] と同一方針で定められた。このようにしなくては限り途中計算の丸め、桁落ち、情報落ち等による、見かけ上の  $b$  の擾乱  $\delta b$  が、確實に  $\delta x = (\text{条件数}) \times \delta b$  となる数値解  $\tilde{x}$  の誤差となる。[例3] は最もひどい例であるが誤差評価の sharpness は失われている。以下係数行列  $A$  と  $\tilde{x}^{(1)}$  成分ごとの誤差と本法による誤差評価  $\Delta x$  のみを示す。

$$[例2] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0000410 \\ -0.9994811 \\ 1.0009760 \\ -1.0006100 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0.0000410 \\ 0.0005189 \\ \underline{0.0009760} \\ -0.0006100 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = 0.0009849$$

$$\text{例3 } A = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.9956512 \\ -1.0007310 \\ 0.9995270 \\ -1.0004730 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} -0.0043488 \\ 0.0007310 \\ -0.0004730 \\ 0.0004730 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = 0.0043586$$

### § 6. 数値例について考察

考察に先ずこの公式 (4) を、他の定理と勘定に等しく。

$$\alpha = B\alpha + c, \quad (\alpha = F(\alpha)).$$

$$\therefore \tilde{x} - \alpha = \tilde{x} - B\alpha - c.$$

$$\hat{x}^{(1)} = B\tilde{x} + c \quad ([\text{多}]倍長計算).$$

$$\tilde{x} - \alpha = \tilde{x} - \hat{x}^{(1)} - \underbrace{B\alpha - c + B\tilde{x} + c}_{\tilde{x} - \alpha} - \underbrace{B\tilde{x} + c - B\tilde{x} + c}_{B(\tilde{x} - \tilde{x})}.$$

$$(21) \therefore \tilde{x} - \alpha = \tilde{x} - \hat{x}^{(1)} + \underbrace{B(\tilde{x} - \alpha)}_{\tilde{x} - \alpha} + B(\tilde{x} - \tilde{x}).$$

$$(22) \therefore \|\tilde{x} - \alpha\| \lesssim \|\tilde{x} - \hat{x}^{(1)}\| + \|B\| \|\tilde{x} - \alpha\| + \|B\| \|\tilde{x} - \tilde{x}\|.$$

matrix norm が vector norm から誘導されることは、上記不等式は、norm の各公理の不等式から「きつ」のび (つまり各不等式を等号で成立させる) vector and/or matrix が必ず存在するから) 式 (4) の (2) と同じ) 不等式 (22) は「きつ」不等式である。……かえれば、matrix B に対して、不等式 (4) を等号で成立させる

vector  $\tilde{x}^{(1)} - \alpha$ ,  $\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}$ ,  $\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}$  が必ず存在する。

それでは この不等式 (4) が 最も「ゆるい」もののは どのような場合にあるか。この不等式の「ゆるさ」が、これら「ゆるさ」対値解  $\tilde{x}^{(1)}$  の 誤差、事後評価  $\Delta x$  の over-estimation の程度を示すことになる。

次の仮定は容易に許容できるものであろう。

1°  $\|B\|$  は 1 に くらゐ かるゝ 小さい ( $\varepsilon \times 10^2$  程度とす)。

2°  $\|\tilde{x}^{(1)} - \alpha\|$ ,  $\|\tilde{x}^{(1)} - \hat{x}^{(1)}\|$ ,  $\|\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}\|$  の オーダーは 大体 同い

くらゐの大きさ (大きさ  $\alpha$  の程度)。(  $\|\tilde{x}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}\| < \alpha$  ならば  $2\varepsilon \leq \varepsilon$  とす) 13 頁。

まず (21) 式から (22) 式へうつるとき、2 回

$$\|Bx\| \leq \|B\| \|x\|$$

の不等式が用ゐらるゝ。  $\|x\| = \alpha$  ならば

$$0 \leq \|Bx\| \leq \varepsilon \alpha \times 10^2$$

であるから、 $\|Bx\| \leq \|B\| \|x\|$  におきかえり、1, 2, 3 項 において 1 項に くらゐ 2  $\varepsilon\%$  の「ガタ」が生ずる。

次に (式の変形において は 左辺の方が 変りやすい) 「三角不等式」を用いて「和のルール」を「ルールの和」におきかえりとき にも同様に 2  $\varepsilon\%$  程度以下の「ガタ」を生じる。

しかしながら 4 項 2 つの「ガタ」は両立 (之和) のである。即ち 前者の理由で 2  $\varepsilon\%$  の「ガタ」を生じるとすれば、 $\|Bx\| = 0$  となり 後者の「ガタ」はゼロとなる。逆に 後者の理由で 2  $\varepsilon\%$  の

「 $\epsilon$ が大きいときは  $\|B^{-1}\| = \|B\| \|X\|$  とし、前者の理由は「 $\epsilon$ が」にゼロとる」からである。

従って  $\|B\| \approx \epsilon \times 10^{-2}$  のとき (4) は「誤差の事後評価の over-estimation の程度はせいぜい  $2\epsilon\%$  程度である」とわかる。

よく「残差を用いた誤差ハム」の評価は、かなり over-estimation である」といわれるのだが、上記の考察により、本方法は形式上残差を利用しているにもかかわらず、

そのようなことはありえないとわかる。

また  $\tilde{A}^{-1}$  を  $A^{-1}$  の「近似」行列とするとき、 $B \equiv I - \tilde{A}^{-1}A$  であるが、 $\|B\|$  の大きさを極端に小さくする必要はないとこの考察からわかる。すなわち特別の場合を除いて  $\|B\|$  は  $0.2 \sim 0.1$  程度、特別の場合に  $0.05$  程度にあれば、実用上十分である。このような rough の「近似逆行列」を用いても、この方法は従来の「sharp」の誤差評価を与える。

従って、大抵の Band Matrix を作るための Sparse Problem の解の誤差評価にあつては、解法のゴロゴロの趣旨をなかに  $\|I - \tilde{A}^{-1}A\|$  を前記の程度に小さくする「近似逆 Band Matrix  $\tilde{A}^{-1}$ 」を用いなければならない。

また  $\|B\|$  を計算するのは、上記の論証から、事後評価

$\Delta X$  の over-estimation の程度を estimate するのは  
 できることも、参考にする助けがある。

## 参考文献

- [1] Dück, W.: Eine Fehlerabschätzung zum Einzelschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen, Num. Math. 1 (1959), 73-77.
- [2] Sassenfeld, H.: Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungen, Z. Angew. Math. Mech. 31 (1951), 92-94.
- [3] Collatz, L.: "Funktionalanalysis und Numerische Mathematik" (1964), Springer.
- [4] Isaacson: "Introduction to Numerical Analysis."