

## トカマク研究におけるMHD計算コード

日本原子力研究所 竹田辰興  
常松俊秀

### 1. はじめに

トカマク研究の分野では, "計算" の重要性がますます高まって来ており, 大規模で複雑な計算コードの開発とその利用が求められるようになって来た。その中でも特にMHD現象の解析の為に費やされる努力が大きくなって来たが, これはトカマク・プラズマ中の現象が基本的にはMHD方程式を中心にして良く記述できることによっている。今後も種々の非MHD的效果を導入してトカマク・プラズマを総合的に理解する努力が続けられるがMHD計算コードがその中心的役割を果たして行く事も疑いない。

トカマク・プラズマを理解する為の理論的課題は, "計算" に関係あるものに限ってもきりめて多岐に渡るが, ここでは, その中でも, 計算コード自身や数値解析法に直接関係ある問題だけに限定して話を進める。本章では, 現在, 原

研で進められている "トカマク研究の為の流体モデル計算コード・システム開発・利用計画 (TRITON計画)" の概要を述べる。第3章では、これら大規模計算コードを効率よく実際に役立てる為に必要な新しい計算法の開発研究の例について述べる。まとめは第4章において行う。

## 2. TRITON計画

現在、原研において進められているTRITON計画<sup>1)</sup>はトカマク研究の為の計算コード開発・利用計画であって、次の3つの目標を持つものである。

- (1) 流体モデルに基づく計算コードの開発
- (2) 上記計算コードの開発・整備・利用を容易にする為のコード・システムの開発
- (3) 上記計算コード、コード・システムを利用して、現在実行中あるいは計画中の各種トカマク研究計画における問題の解決

このような目的の為に計算コード・システム、TRITONが開発されており、既に実際の問題に利用されている。コードシステムの構成は第1図に示すようなもので、トカマク・プラズマの解析に直接用いられるのがASTRAEAシステムの各種コード(第1表)である。

トカマク・プラズマの解析の為に計算コードは、今までも必要に応じて多数作られて来てはいるが、これらは大型実験装置のプラズマについて総合的、定量的なデータを得る為には必ずしも満足できるものではない。TRITON計画はトカマク・プラズマのMHD的性質を総合的に理解することを究極的な目標として進められている(図)。

ここでは一例として、トカマク・プラズマの最大 $\beta$ 値が線形MHD不安定性によりどの程度の値におさえられるかを解析する手順を考えてみる。トカマクはトラス状プラズマに強い電流を流してその磁場の圧力でプラズマを閉じ込める装置であるが、MHD不安定性をさける為には電流の方向に強いトロイダル磁場 $B_t$ を加えなければならない。プラズマの $\beta$ 値は、プラズマの平均圧力を $\bar{p}$ として、 $\beta = 2\mu_0 \bar{p} / B_t^2$ によって与えられるが、核融合炉としての経済性を考えるとトロイダル磁場が小さい事が必要なので、 $\beta$ 値のなるべく高い平衡を達成することが重要である。最大 $\beta$ 値を定める要因が何であるかは、現在の所、必ずしも明確ではないが線形安定性に対する条件がその重要な要因の一つであることは確かである。この場合、最大 $\beta$ 値は、プラズマ断面の形、圧力分布形、電流分布形の関数として定まる。このような解析を具体的にを行うには、平衡計算コード、安定性解析コードを駆使

して大量の数値計算を行うことが必要である(図3)。安定性解析コードの代表的なものが Gruber らによる ERATO コード<sup>2)</sup>で、多くの研究者によってコード自身の研究<sup>3,4)</sup>とコードの利用<sup>5)</sup>が行われている。TRITON システムにも ERATO コードは組み込まれていて重要な役割を果たしている。

この種の大規模な計算コードを開発し、利用して行く上で大きな問題点の一つは、開発・利用を最も効率的に行う工夫である。この為、TRITON 計画では、コード開発を容易にする為の図形入出力システム ARGUS、コード整備を容易にする為の計算コード解析システム PLUTO、コードの利用を容易にする為のコード管理システム HARMONIA、Fortran 機能拡張フリプロセッサ EOS を備えている。これらを利用する事によって少いマンパワーで予想以上の効率を上げているが、これから各システムについては別の機会に詳述する。

### 3. 新しい計算法の開発・利用

TRITON 計画の対象としている問題の中には、精度や計算時間についての要請から新しい解法の開発が必要とされるもの、その問題の性質上従来の数値解法によっては原理

的に解が得られないので新しい解法を必要とするもの、などがある。3.1-3.2は、前者の例であり、3.3は、後者の例である。また、計算機の発達に関連して3.4は重要である。

### 3.1 MHD平衡計算コード"SELENE"

軸対称トラス・プラズマのMHD平衡は、2次元ポロイダル面内で、Grad-Shafranov方程式を解くことによつて得られる。通常の解法では、ポロイダル面内を矩形メッシュに分割し、差分方程式を作りこれを数値的に解く。外部コイルの電流と定められた問題等の場合には、例えば、 $100 \times 100$ メッシュ程度で、この方法によつても十分な精度を得ることが可能である。しかし、この方法による平衡をERATO計算等に用いる時には、場合によっては、 $500 \times 500$ 以上のメッシュを採用する必要があるが生じて来る。これは、ERATO計算では、磁気面( $\psi$ )を基本にした $\psi$ - $r$ 座標系を採用している為、矩形メッシュに依存する平衡解では、磁気軸付近や磁気面の混んだ領域で精度が著しく低下する為である。この為、SELENEコード<sup>6)</sup>では、有限要素法を採用し、磁気面を基準にしたメッシュを使い、逐次近似毎にメッシュの再構成を行つて解を求めている(カ4図)。

### 3.2 単一ヘリシティ抵抗性不安定性解析コード"AEOLUS-R1"

AEOLUSコードは、非線形MHD現象解析コードで

あつて、最終的には完全なMHD方程式系を3次元で解く事  
 を目指すものである。このコード群の中で、AEOLUS-R  
 と称されるものは、還元方程式系を用いて固定境界プラズマ  
 の抵抗性不安定性を解析するコード群である。このように簡  
 単化した場合でも、1ケースの計算時間は、世界最高速計算  
 機を用いても数時間以上を要するので、高速計算アルゴリズム  
 の開発は緊急を要する課題である。AEOLUS-R<sup>7)</sup>は、  
 円筒プラズマの場合、プラズマ変位を軸方向と角方向につい  
 てフーリエ展開し、異なるヘリシティ・モード間の結合が無い  
 として、単一ヘリシティのみのプラズマ挙動を解析する2次元  
 コードである。このコードは、物理現象解析の為の実用的  
 意味の他に高速アルゴリズムの開発を目的としており、その  
 目的を達成している。具体的には、この方程式系に現われる  
 拡散項に対して陰解法を、また、移流項に対して蛙とび法を  
 使った混合法を用いたことがその要点である。この方法によ  
 り、従来この種の問題に用いられていた陽的解法に比べて、  
 10倍程度の性能向上を達成することができた。この方法は、  
 多重ヘリシティ変位を扱う一般のAEOLUS-Rコード群に  
 対しても簡単に適用できる。

### 3.3 MHDスペクトル解析の為の新しい計算法

ERATOコードは、低モード数線形MHD不安定性解

析の爲の信頼すべき計算コードとして広く利用されているが、このコードの開発の過程においてMHDスペクトルを数値的に正しく表現することは通常の有限要素法によつては不可能で一要素内の関数値と微分量が同じ次数をもつような基底による混合有限要素法によることが必要である事が経験的に示され<sup>8)</sup>その数学的意味付けが行われ<sup>9)</sup>。これらは最初円柱プラズマを対象とし $E$ -次元問題に関してスペクトル汚染の問題としてとらえられ(図5図)、上記方法を使う事により正しい解を得る事に成功した後、トーラス・プラズマを対象とする二次元問題に適用されてERATOコードの完成に至つたのである。ERATOコードによる計算結果は、多くの場合、物理的にきわめて妥当なものであると考えられているが、解の収束性等に関して、特に数学的には、未知の問題が多い。最近ようやく二次元問題に関する数学的研究が始ま<sup>10)</sup>た。

### 3.4 ベクトル・プロセッサー向きの最適化

ERATO および AEOLUS に関しては、ベクトル・プロセッサー向きのコードへの変換が進められている。それについて、FACOM 230/75 APU において満足すべき結果が得られている<sup>4,11)</sup>。現在までのところ新しいアルゴリズムの開発よりもむしろベクトル・プロセッサー向きのコー

ディングの最適化に重点がおかれている。

#### 4. まとめ

計算需要と計算機能力の増大によって大規模で複雑な計算が行われるようになって来たが、この結果、必然的にフーズマ物理の外にある広い分野との研究協力の必要性が増大して来た。これは、計算の巨大化につれて本来フーズマ物理研究者の担当である“問題のモデル化と計算結果の解釈”という作業以外の部分に費やされる努力の量がきわめて大きくなって来たことによる。こゝでは、このような異同作業の接点にあたる部分の問題について簡単に述べて来たつもりである。

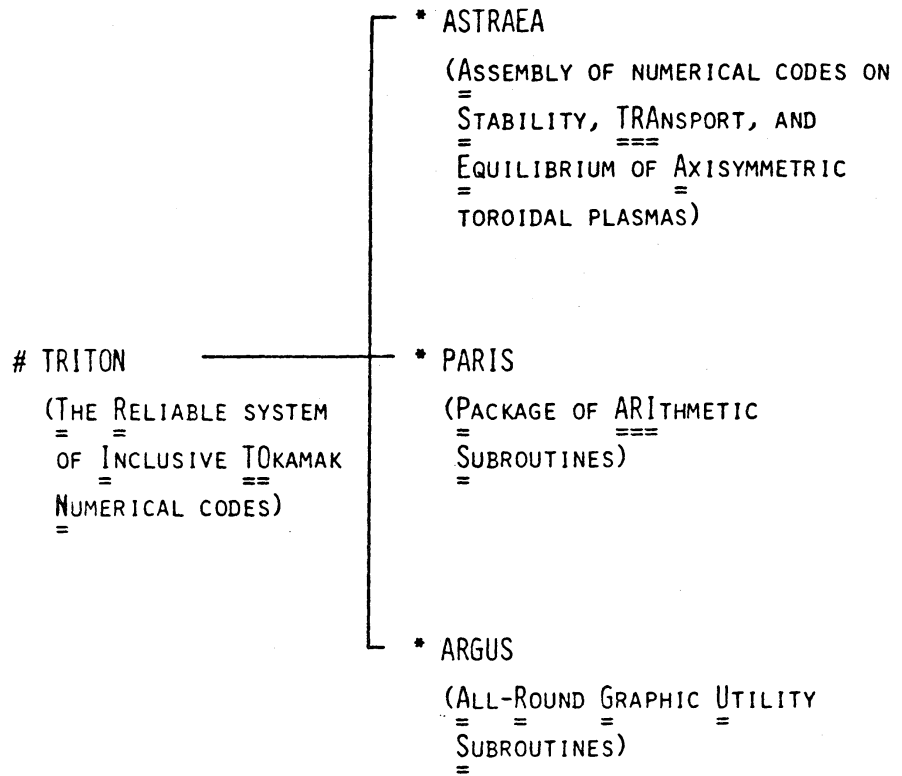
なお、こゝで述べて来た事は、全て TRITON 計画の遂行にあたって得た経験に基づいている。この計画に関係している安積正史、栗田源一、滝塚知典（原研）、松浦俊彦、田中幸夫（富士通）の各氏に深く感謝する。また、ERATO に関する議論について R. Gruber（ローザンヌ工科大）氏には、TRITON 計画に関する終始渡らぬ御教訓と有益な議論について田中正俊核融合研究部次長に感謝する。



References

- 1) M. Azumi, G. Kurita, T. Matsuura, T. Takeda, Y. Tanaka, and T. Tsunematsu, A fluid model numerical code system for tokamak fusion research, fourth international symposium on computing methods in applied sciences and engineering, 10-14, December 1979 Versailles.
- 2) R. Gruber, to be published in Comput. Phys. Commun.
- 3) Papers presented at the ERATO workshop, 19-21, November, 1979, Oak Ridge.
- 4) T. Tsunematsu, T. Takeda, T. Matsuura, M. Azumi, G. Kurita, and T. Takizuka, Stability analysis by ERATO code, JAERI-M 8616 (1979).
- 5) T. Tsunematsu, T. Takeda, G. Kurita, M. Azumi, R. Gruber, and F. Troyon, submitted to Plasma Physics.
- 6) T. Takeda and T. Tsunematsu, A numerical code SELENE to calculate axisymmetric toroidal equilibria, JAERI-M 8616 (1979).
- 7) 田中幸夫, 安積正史, 常松俊秀, 竹田辰興, 単一ヘリシティ抵抗性 MHD 不安定性解析のための高速度コード "AEOLUS-R1", JAERI-M 2656 (1980).
- 8) R. Gruber, Numerical computations of the magnetohydrodynamic spectrum for one and two dimensional equilibria using regular finite elements and finite hybrid elements, These no. 246 (1976) Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
- 9) J. Rappaz, Numer. Math. 15 28 (1977).
- 10) J. Descloux and G. Geymonat, On the essential spectrum of an operator relative to the stability of a plasma in toroidal geometry, Report of Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.

- 11) 松浦隆彦, フラズマ数値シミュレータに関するワーク・ショップ。  
名古屋 (1980).



オ1図 TRITONシステムの構成

SELENE	MHD equilibrium analysis
NOTUS ERATO	Linear ideal MHD stability analysis for the low wave number modes
BOREAS	Ballooning mode analysis for the high wave number modes
AEOLUS	Nonlinear MHD behavior analysis
APOLLO	2-dimensional tokamak transport analysis

オ1表 ASTRAEAサブシステムの構成コード

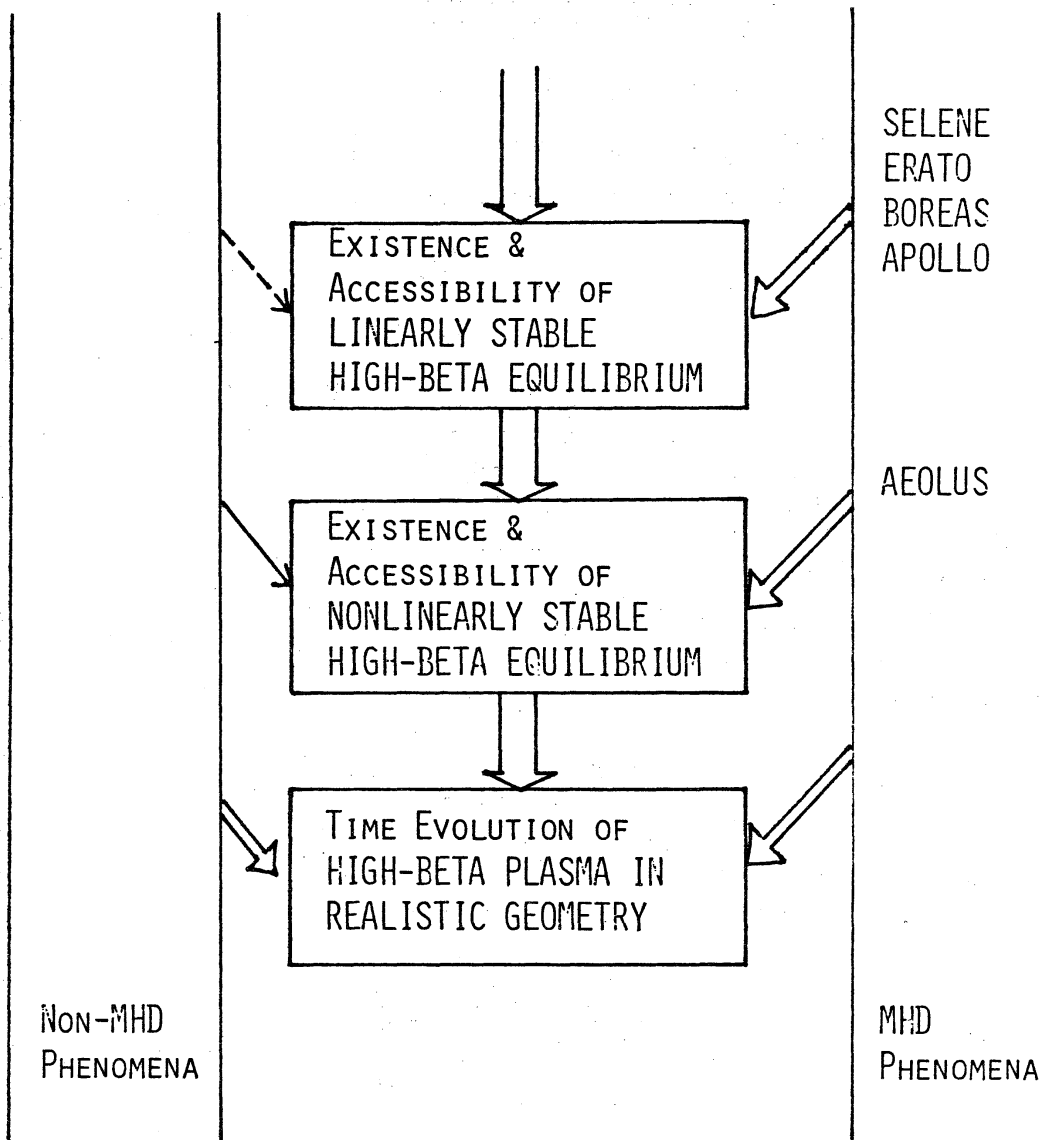


図2 図 TRITON計画の目標

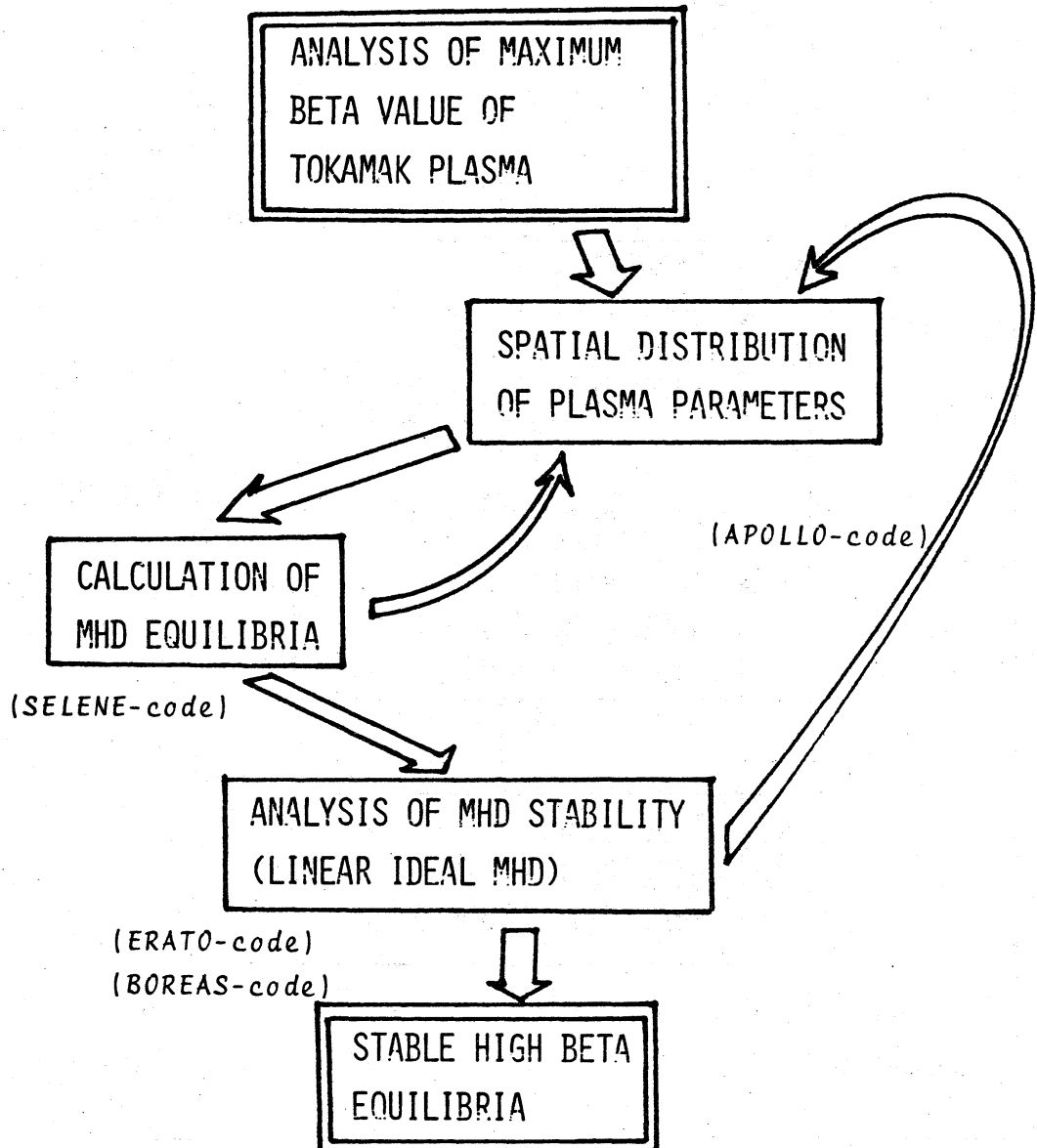
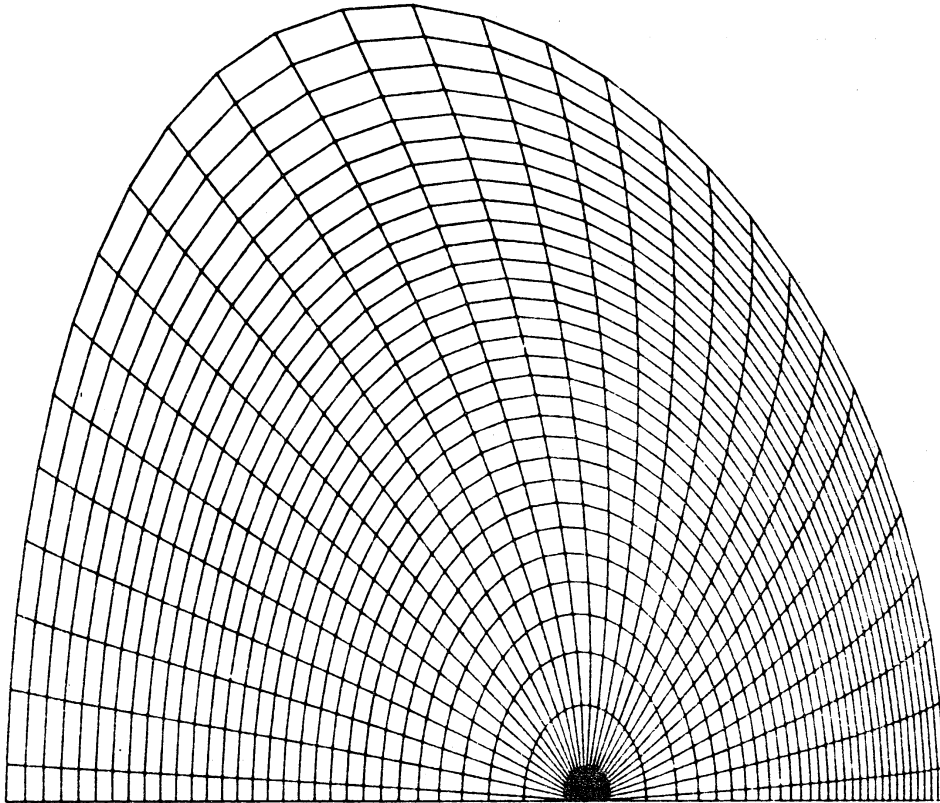
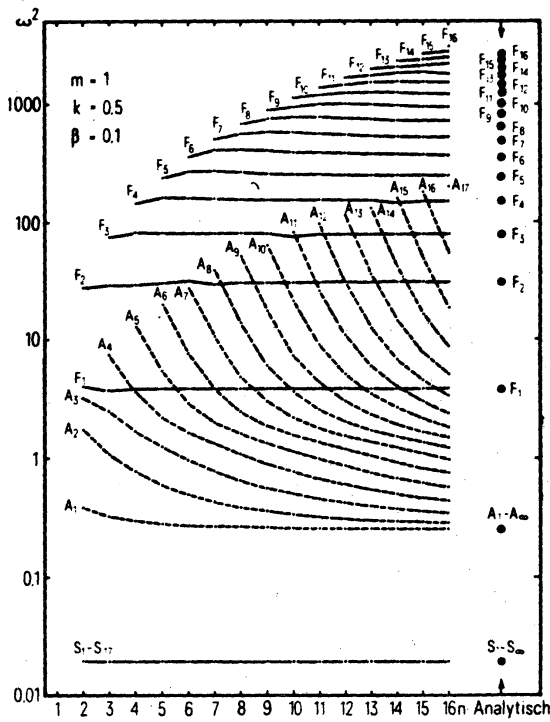


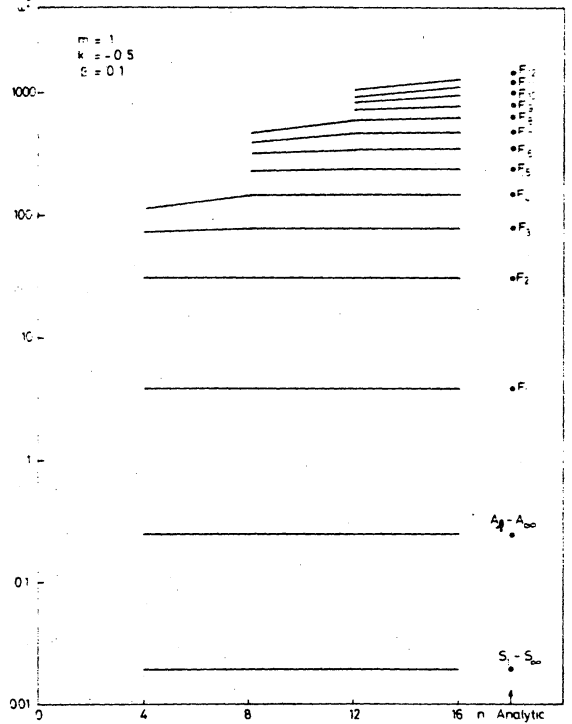
図3 最大  $\beta$  値を求める手順



ガ4図 SELENEコードのメッシュ構造



(a)



(b)

オ5図 MHDスペクトル汚染の例<sup>8)</sup>

(a) 通常の有限要素法によって求めた汚染されたスペクトル

(b) 混合有限要素法によって汚染の取り除かれたスペクトル

いずれの図も横軸はモード数、右端の黒丸は解析解