数理解析研究所講究録
386巻 1980年 75-88

一階双曲系の near-field 差分解，または人工境界法

甲南大 理　　田口友康

1. まえがきと結果

$\mathbb{R}_x^n$ における線形双曲系の初期値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x), & u=u(t,x) \text{ は } m\text{-ベクトル} \\ u(0) = u_0(x) \end{cases}$$

に対して，有限個のメッシュ点を用いて解 $u(t,x)$ を近似するスキームを提案する。方法は　　$\mathbb{R}_x^n$ を n 次元立方体 Ω $\Omega\subset\mathbb{R}_y^n$ に1対1に写す座標変換 $G: y = Gx$ によって (1) を Ω 上の方程式にかきかえたものに fractional-stepwise の差分法を適用するのが要点である。

Ω 上で得られるこの差分解を $v_h(t,y)$ とし，これを $x\in\mathbb{R}_x^n$ にかき直したものを $u_h(t,x)$ と記すとき，(1) に対する適当な仮定と，後に示す安定条件の下で誤差評価

$$(2)\quad \max_{t\in[0,T]}\left[\int\cdots\int_{\mathbb{R}_x^n} \Phi(x)\left|u_h(t,x)-u(t,x)\right|^2 dx\right]^{1/2} \le C_{T,\Phi}\, h^s$$

がなりたつ。ここで s は差分の accuracy の次数，$\Phi(x)$ は

$$\Phi(x)=\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i),\qquad \phi(x_i)=\begin{cases}1, & \text{原点の近傍}\\ O\left(|x_i|^{-\frac{(2s+1)q}{q-1}}\right), & |x_i|\to\infty\end{cases}$$

の重み関数である。ただし q は G を定義するパラメータで $q\geqq 3$ とする。

(2) から直ちに

$$(2')\quad \max_{t\in[0,T]}\left[\int\cdots\int_D |u_h(t,x)-u(t,x)|^2dx\right]^{1/2}\leq C_{T,D}\,h^s,$$

$D\subset\mathbb{R}_x^n$ は任意の有界領域

すなわち L^2_{loc} 収束が導かれる。

さて G として原点の近傍が等長変換になる変換をとり（応用上これが自然），その領域を D_0 とする。ここで Ω を $\mathbb{R}_x^n$ の n 次元立方体とみなおそう。そして $v_h(t,x)$，$x\in\Omega\subset\mathbb{R}_x^n$，自身を (1) の Ω における"数値解"とみなすと，(2') により $v_h(t,x)$ は D_0 上で $u(t,x)$ に L^2 収束する近似解である。このことから，われわれの方法は (1) に対して $\partial\Omega$ を"人工境界"とし，D_0 上の L^2 収束を保証する近似解法とみなすことができる。Lax-Wendroff 系スキームを用いた数値実験によると，原点近傍に"振動源"をもつ問題に対して D_0 上では数値的な再現性が良好である。また $\partial\Omega$ に近い領域では outgoing wave が吸収されていく様子が

観察される([67])

以下の議論のために次の仮定をおく。

(i) $A_i(x)$, $i=1,\cdots,n$, は $m\times m$ 行列で，有界で滑らか，かつ遠方で定数行列 $A_{i\infty}$ となる。そして (1) は regularly hyperbolic とする。

(ii) $f=f(x)$ と $u_0=u_0(x)$ は有界で滑らかな m ベクトルで，無限遠でゼロになる。

(iii) 解 $u(t,x)$ は L^2 に属し，収束の評価のためにさしあたり，t, x それぞれにつき $s+1$ 階まで一様に有界な導関数をもつ。

2. 座標変換

$\mathbb{R}^n_y$ の n 次元立方体 $\Omega=\overbrace{\omega\times\cdots\times\omega}^{n}$ $(\omega=(-1,1)\in\mathbb{R}^1)$ を考え，$G: \mathbb{R}^n_x\to\Omega$ なる写像として

$$y = Gx$$

$$\left|\begin{array}{l} x_i=\displaystyle\int_0^{y_i}\frac{dy_i}{a(y_i)}, \qquad y_i\in\omega \\ a(\eta)\in C_0^p(\bar\omega), \qquad p=\max(4, n+2) \\ 0< a(\eta)\le 1, \qquad \eta\in\omega \\ a(\eta)\sim(1-|\eta|)^g, \quad g\ge 3. \end{array}\right.$$

(記号〜は $\eta=\pm1$ の近傍で，定数倍をのぞき左辺が右辺に一致することをあらわすものとする。)

なるものをとる。 $B_i(y)\equiv A_i(G^{-1}y)$, $g(y)\equiv f(G^{-1}y)$

$v_0(x) \equiv u_0(G^{-1}y)$， $v(t,x) \equiv u(t, G^{-1}y)$ とおけば (1) より

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i B_i \dfrac{\partial v}{\partial y_i} + g \\ v(0) = v_0 \end{cases} \qquad a_i = a(y_i)$$

が導かれる。以下 (3) の差分をとりあつかう。

3. 差分近似

$\bar{\omega} = [-1, 1]$ を $2N_a$ 等分した長さを h とし，$\bar{\Omega}$ にメッシュ巾 h の一様な差分格子点 $y_{(\mu)}$ をとる。$y_{(\mu)}$ は

$$y_{(\mu)} = h\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$$

$$\mu_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_a\},\quad e_i = {}^t(0, 0, \dots, 0, \overset{i\text{成分}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n) : \text{multi-index}$$

である。また時間の区間 $[0, T]$ にメッシュ巾 $k = \lambda h$ (λ は正のパラメータ) の格子点 $t_\nu = \nu k$, ($\nu = 0, 1, \dots$, をとる。以下 ν, (μ) を省略して，格子点 $(t_\nu, y_{(\mu)})$ を (t, y) のように記そう。また引数の記法として，格子点 (t, y) からの displacement がある変数のみを明示することにしよう：

例 $$\begin{cases} v(t, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i + h, y_{i+1}, \dots, y_n) = v(y_i + h) \\ v(t+k, y_1, \dots, y_n) = v(t+k) \end{cases}$$

など。

（差分スキーム）　次の形のものを考察する．

$$
(4)\quad
\begin{cases}
v_h(t+k) = \mathcal{L}_h v_h(t) + k\, d_h(t), & y_{(\mu)} \in \Omega \\
\text{境界条件} & \\
\quad v_h(t) = 0, & y_{(\mu)} \in \partial\Omega \\
\text{初期条件} & \\
\quad v_h(0) = v_0, & y_{(\mu)} \in \bar{\Omega}.
\end{cases}
$$

ここに

$$
\mathcal{L}_h = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in P} \alpha_{i_1\cdots i_n} L_{i_1,h}\cdots L_{i_n,h}
$$

$$
0 \le \alpha_{i_1\cdots i_n} \le 1, \quad \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in P} \alpha_{i_1\cdots i_n} = 1
$$

P は $(1,\cdots,n)$ の置換の集合．

$L_{i,h}$ は $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a_i B_i \dfrac{\partial v}{\partial y_i}$ を近似する one-step の差分近似作用素．

$L_{i,h}$ は具体的に

<u>Scheme I</u>　（Friedrichs-Lax 型で，$\bar{v}_h$ を修正したもの．）

$$
\begin{cases}
L_{i,h} v_h = \bar{v}_h + \dfrac{\lambda}{2} a_i B_i \{ v_h(y_i+h) - v_h(y_i-h) \} \\
\text{ただし}\quad \bar{v}_h = (1-a_i) v_h + \dfrac{a_i}{2} \{ v_h(y_i+h) + v_h(y_i-h) \} \\
d_h = g \\
\quad \alpha_{i_1\cdots i_n} = \dfrac{1}{n!}, \quad (i_1,\cdots,i_n) \in P.
\end{cases}
$$

Scheme II

$$
\begin{cases}
L_{i,h} v_h = \text{modified Lax-Wendroff (one-dimensional)} \\
d_h = \frac{1}{2}(g + g(t+k)) + \frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i B_i \{ g(y_i + h) - g(y_i - h) \}. \\
\alpha_{i_1 \cdots i_n} = \frac{1}{n!}, \quad (i_1, \cdots, i_n) \in P.
\end{cases}
$$

を考える。

4. 安定条件と収束

擬差分作用素の理論（Yamaguti-Nogi [1], Schintani-Tomoeda [3] 等）を応用する。まず $y \in \Omega$ で定義されている諸関数を $y \in R_y^n$ 上の関数になるよう定義域を拡張する：

$$
\begin{cases}
\hat{B}_i(y) \equiv \begin{cases} B_i(y), & y \in \Omega \\ A_{i\infty}, & y \in R_y^n - \Omega \end{cases} \\
\hat{g}_i(y) \equiv \begin{cases} g(y), & y \in \Omega \\ 0, & y \in R_y^n - \Omega \end{cases} \\
\hat{v}_0(y) \equiv \begin{cases} \hat{v}_0(y), & y \in \Omega \\ 0, & y \in R_y^n - \Omega \end{cases}
\end{cases}
$$

$$\hat{a}(\eta) = \begin{cases} a(\eta), & \eta \in \omega \\ 0 & \eta \in R^1 - \omega \end{cases}$$

$$\hat{a}_i(y) = \hat{a}(y_i) \times \hat{\sigma}(y')$$

ただし $y_i \in \omega$, $y' = (y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n) \in R_y^{n-1}$

$\hat{\sigma}(y') \in C^\infty(R_y^{n-1})$ は support compact で

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\ \hat{\sigma}(y') \supseteq (\bar{\omega})^{n-1}, \\ 0 \leq \hat{\sigma}(y') \leq 1, \\ \hat{\sigma}(y') = 1 \quad \text{for } y' \in (\bar{\omega})^{n-1} \end{cases}$$

なるもの.

以下, 記号 ^ を省略する。 そして (3), (4) を R_y^n での方程式とみなす。 すると (3) の解 $v(t, y)$, (4) の解 $v_a(t, y)$ につき

$$v(t, y) \in L^2(R_y^n)\ ; \quad v(t, y) = 0, \quad y \in R_y^n - \Omega$$

$$v_a(t, y) \in L^2(R_y^n)\ ; \quad v_a(t, y) = 0, \quad y \in R_y^n - \Omega$$

となることに注意しよう。

<u>定理1 (安定性)</u>. Scheme I は $\lambda \leqq \min_{1 \leq i \leq n} \dfrac{1}{\sup_{x \in R_x^n} \rho(A_i)}$ で安定である。

Scheme II は $\lambda \leqq \min_{1 \leq i \leq n} \dfrac{2}{\sup_{x \in R_x^n} (A_i)}$ で安定である。 ここで $\rho(A_i)$ は A_i のスペクトル半径である。

（証明） $\|L_{i,h} v_h\| \leq (1+O(h))\|v_h\|$ となる条件であることを示せばよい。ところが擬差分作用素を用いる通常のやり方として次に定義されるような L^2 等価なノルム $|||\cdot|||$ で議論してよい：

$$|||v||| = \sum_j \mathrm{Re}(G_{i,h} \alpha_j v, \alpha_j v)$$

$\{\alpha_j^2\}$ は適当な 1 の単位分割.

$G_{i,h}$ は B_i の対角化行列 n_i から定義される正定値行列 $g_i = n_i^* n_i$ に付随する one-parameter family。

$|||\cdot|||$ を用いて，定理の条件が

$$|||v_h||| - |||L_{i,h} v_h||| \geq -O(h)|||v_h|||$$

となる為であることを示す。Shintani-Tomoeda [3] の定理 3.4 を適用しよう。$L_{i,h}$ の symbol を l_i とし

$$p_i \equiv g_i - l_i^* g_i l_i$$

が非負定値となる条件を求める.

Scheme I に対しては

$$l_i(y,\omega) = 1 - a_i(y)(1-\cos\omega_i) + i\lambda a_i B_i \sin\omega_i,$$

よって

$$p_i = n_i^* \{2a_i(1-\cos\omega_i)(1-a_i) + a_i^2 \sin^2\omega_i (1-\lambda^2 d_i^* d_i)\} n_i$$

$$d_i = n_i^{-1} d_i n_i = B_i.$$

したがって定理にのべた条件で p_i は非負定値となる。

Scheme II に対しては

$$l(y,\omega) = 1 + i\lambda a_i B_i \cos\omega_i \sin\omega_i - \frac{\lambda^2}{2} a_i^2 B_i^2 \sin^2\omega_i,$$

よって

$$p_i = n_i^* (\lambda a_i B_i)^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{4}(a_i B_i)^2 \right\} \sin^2\omega_i.$$

したがって定理にのべた条件で p_i は非負定値となる。

証明終り。

<u>定理２（収束性）.</u> Scheme I または Scheme II の解 $v_h(t,y)$ を R_x^n へ戻したものを $u_h(t,x)$ とかく。すなわち

$u_h(t,x) \equiv v_h(t, Gx)$.　そのとき，

$s+1$ 階まで連続で一様に有界な偏導関数をもつ解 $u(t,x)$ に対して (2) 式の誤差評価がなりたつ。

（証明）　$\psi(\eta) \in C_0^1(\bar{\omega})$ を

$$\begin{cases} 0 < \psi(\eta) \leq 1 & \eta \in \omega \\ \psi(\eta) \sim (1-|\eta|)^{\lambda}, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

のように選び，これを

$$\hat{\psi}(\eta) = \begin{cases} \psi(\eta), & \eta \in \omega \\ 0, & \eta \in R^1 - \omega \end{cases}$$

によって R^1 に拡張する。

重み関数として

$$\Psi(y) = \prod_{i=1}^{n} \hat{\psi}(y_i)$$

をとる。以下，記号 ^ を省略する。

$$\begin{cases} w_h \equiv \Psi(y)\, v_h, & v_h \text{ は（4）の解} \\ w \equiv \Psi(y)\, v, & v \text{ は（3）の解} \end{cases}$$

とおき，w_h のみたす式を導く。（4）の両辺に Ψ を乗ずると

$$w_h(t+k) = \Psi \mathcal{L}_h v_h + k \Psi d_h$$

となる。ここで，Scheme I, II について

$$(5)\quad \begin{cases} \Psi \mathcal{L}_h v_h \\ \quad = \mathcal{L}_h w_h + k \mathcal{M}_h w_h + k \mathcal{E}_h v_h \\ \| \mathcal{M}_h w_h \| \leq O(1) \| w_h \| \\ \| \mathcal{E}_h v_h \| \leq O(h^{q+r-1}) \| v_h \| \end{cases}$$

がなりたつ。（証明は後述。）また w について

$$v(t+k) - \mathcal{L}_h v - g = k h^s r$$

（右辺は truncation term）がなりたつから，

$w_h - w$ を e_h とおいて

$$e_h(t+k) = \mathcal{L}_h e_h + k \mathcal{M}_h e_h + k \mathcal{E}_h (v_h - v) - k h^s r.$$

が導かれる。よって

$$(6)\quad \| e_h(t+k) \| \le (1+O(h)) \| e_h \| + k\,O(h^{q+r-1}) \| v_h - v \| + k\,h^s \sup |\Psi r|^* |\Omega| .$$

$D_t^\sigma u$, $D_x^\sigma u$ $(\sigma \le s+1)$ が一様に有界であるとき，Ψr は

$$\begin{cases} r \geqslant q, & \text{Scheme I } (s=1) \\ r \geqslant 2q, & \text{Scheme II } (s=2) \end{cases}$$

は一様に有界となる。何となれば

$$\Psi r \sim a_i \psi_i \frac{\partial^{s+1} v}{\partial y_i^{s+1}}$$

$$= a_i \psi_i \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{s+1} u$$

$$= \frac{\psi_i}{(a_i)^s} \frac{\partial^{s+1} u}{\partial x_i^{s+1}} + \cdots$$

だが，

$$\frac{\psi_i}{(a_i)^s} \sim (|x|+c)^{-\frac{r}{q-1}} (|x|+c)^{-\frac{sq}{q-1}}$$

$$= (|x|+c)^{-\frac{r-sq}{q-1}} .$$

がなりたつから。 $\| v_h - v \|$ の L^2 有界性がわかっているので，(6) に離散 Gronwall lemma を適用すれば，$q+r-1 \geqslant s$ と仮定して，$\| e_h(t) \| = O(h^s)$ の収束が得られる。ここで $e_h(t, y)$ を $x \in R_x^n$ で書きかえよう。

$$\| e_h(t) \|^2 = \int \cdots \int_{R_y^n} |\psi (v_h - v)|^2 dy$$

$$= \int_{\Omega}\cdots\int |\psi(v_h - v)|^2 dy = \int_{R_x^n}\cdots\int \Phi |u_h - u|^2 dx$$

ただし

$$\Phi(x) \equiv \left[(\Psi(y))^2 \prod_{i=1}^{n} a(y_i) \right]_{y = Gx}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

$$\phi(x_i) = \psi(y_i)^2 a(y_i) \Big|_{y_i = (Gx)_i}$$

$$\sim (|x| + c)^{-\frac{2r+q}{q-1}}$$

ここで $r = sq$ とおくと

$$\phi(x_i) = O(|x_i|^{-\frac{(2s+1)q}{q-1}}), \quad \text{as } |x_i| \to \infty$$

となる。

(5) の証明．Scheme I の場合のみ述べる．

$$(7) \left| \begin{array}{l} \psi_i L_{i,h} v_h \\ = L_{i,h}(\psi_i v_h) + k M_{i,h}(\psi_i v_h) + k E_{i,h} v_h \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} M_{i,h}(\psi_{i,h}) = \alpha_h^+(y_i)\{\frac{I}{\lambda} + B_i(y)\}[\psi_i v_h](y_i + h) \\ \qquad\qquad + \alpha_h^-(y_i)\{\frac{I}{\lambda} - B_i(y)\}[\psi_i v_h](y_i - h) \\ \\ E_{i,h} v_h = \varepsilon_h^+(y_i)\{\frac{I}{\lambda} + B_i(y)\} v_h(y_i + h) \\ \qquad\qquad + \varepsilon_h^-(y_i)\{\frac{I}{\lambda} - B_i(y)\} v_h(y_i - h) \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_h^+(y_i) = \begin{cases} a_i(y)\dfrac{\psi(y_i)-\psi(y_i-h)}{h\,\psi(y_i+h)}, & -1 \le y_i \le 1-2h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\[2em] e_h^+(y_i) = \begin{cases} 0, & -1 \le y_i \le 1-2h \\ a_i(y)\{\psi(y_i)-\psi(y_i-h)\}/h, & \text{otherwise} \end{cases} \\[2em] \alpha_h^-(y_i),\ e_h^-(y_i) \text{ も 同様} \end{array}\right.$$

すると、$\begin{cases} |\alpha_h^+(y_i)|_\infty < +\infty & h\text{につき一様に} \\ |\alpha_h^-(y_i)|_\infty < +\infty & 〃 \end{cases}$,

$$\begin{cases} |e_h^+(y_i)|_\infty = O(h^{q+\lambda-1}) \\ |e_h^-(y_i)|_\infty = O(h^{q+\lambda-1}). \end{cases}$$

よって $\| M_{i,h}(\psi_i v_h) \| = O(1)\,\| \psi_i v_h \|$

$\| E_{i,h} v_h \| = O(h^{q+\lambda-1})\,\| v_h \|$

となる。

$$\Psi \mathcal{L}_h v_h = \left(\prod_{i=1}^n \psi_i\right) \sum_P \alpha_{i_1 \cdots i_n} L_{i_1,h} \cdots L_{i_n,h} v_h$$

$$= \sum_P \alpha_{i_1 \cdots i_n} (\psi_{i_1} L_{i_1,h})(\psi_{i_2,h}) \cdots (\psi_{i_n,h}) v_h$$

の右辺を (7) をつかって展開し、$\prod_{i=1}^n \psi_i v_h$ と v_h で整理すれば

(5) が得られる。

証明終り.

（文献）

1. M. Yamaguti and T. Nogi, An algebra of pseudo difference schemes and its application, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3 (1967), 151 - 166.

2. R. Vaillancourt, A strong form of Yamaguti and Nogi's stability theorems for Friedrichs' scheme, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5 (1969), 113 - 117.

3. H. Shintani and K. Tomoeda, Stability of difference schemes for nonsymmetric linear hyperbolic systems with variable coefficients, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 309 - 378.

4. M. Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sci., Kyoto Univ., Ser A, 32 (1959), 121 - 151.

5. T. Taguti, Finite defference schemes in the near field of linear hyperbolic systems, in preparation.

6. ———, Numerical solution to the elastodynamic equation in the half plane, in preparation.