

擬凸領域の境界上の局所コホモロジーの双対性定理

早大 理工 部 敏昭

$D$  を  $n$  ( $\geq 2$ ) 次元解析空間  $X$  の中の相対コンパクトな閉集合で, その境界  $B = \partial D$  は余次元 1 の部分多様体とする. すなわち  $B$  の近傍は  $X$  の regular な点ばかりからなっているとす. さらに  $B$  は<sup>強</sup>擬凸な境界であると仮定する. あるいは  $D$  が強擬凸な閉集合であるとも言ってもよい.  $\Omega^p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , で  $X$  上の正則微分形式をあらわす. 次の諸結果が示された.

$\mathcal{F}$  を  $X$  上の連接層とすると,

$$(0.1) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^q(B, H_B^1 \mathcal{F}) < \infty, \\ \text{for } 0 < q < \text{prof } \mathcal{F} - 1.$$

$$(0.2) \quad (H^q(B, H_B^1 \mathcal{F}))' \cong \text{Ext}^{n-q-1}(B; H_B^1 \mathcal{F}, H_B^1 \Omega^n) \\ \text{for } q < \text{prof } \mathcal{F} - 1.$$

ここに  $\mathcal{F}$  のセクト  $\prime$  は位相的双対をあらわし, また

$H_B^1 \mathcal{F}$  は  $B$  に台をもつ 1 次の局所コホモロジーの層である。

Serre - Malgrange duality theorem は次のように述べられる。  $V$  を次元  $n$  の複素解析多様体,  $\mathcal{F}$  をその上の連接層とする。このとき  $H^p(V, \mathcal{F})$  に Frechet-Schwartz 空間の位相の高位相を,  $\text{Ext}_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \mathbb{C}^n)$  に Dual of Frechet-Schwartz 位相の高位相を導入しこれらに associate した Hausdorff 空間について

$(H^p(V, \mathcal{F})_{\text{sep}})' \cong \text{Ext}_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \mathbb{C}^n)_{\text{sep}}$  が成り立つようにできる。同様に  $H_c^q(V, \mathcal{F})$  上に QDFS 空間の位相を,  $\text{Ext}^{n-q}(V; \mathcal{F}, \mathbb{C}^n)$  上に QFS 空間の位相を導入し

$(H_c^q(V, \mathcal{F})_{\text{sep}})' \cong \text{Ext}^{n-q}(V; \mathcal{F}, \mathbb{C}^n)$  を成り立たせることができる。

さて上の  $D$  が多様体となっているとき, アンドレオッチ = グラウエルの結果より

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q > 0,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_c^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q < \text{prof } \mathcal{F},$$

を知っているから, これらコホモロジーの空間は当然 Hausdorff であり, したがって

$$(0.3) \quad H^z(D, F)' \cong \text{Ext}_c^{n-z}(D, F, \mathbb{R}^n),$$

$$(0.4) \quad H_c^z(D, F)' \cong \text{Ext}^{n-z}(D, F, \mathbb{R}^n),$$

( $z < \text{prof } F$ )

が成立する。

(0.2) (0.3) (0.4) の3つの双対性は次のような関係にある: 列

$$\cdots \rightarrow H^{z-1}(B, H_B^1 F) \rightarrow H_c^z(D, F) \rightarrow H^z(D, F) \rightarrow H^z(B, H_B^1 F) \rightarrow \cdots$$

は完全であり, その双対

$$\cdots \leftarrow \text{Ext}^{n-z}(B, H_B^1 F, H_B^1 \mathbb{R}^n) \leftarrow \text{Ext}^{n-z}(D, F, \mathbb{R}^n) \leftarrow$$

$$\text{Ext}_c^{n-z}(D, F, \mathbb{R}^n) \leftarrow \text{Ext}^{n-z-1}(B, H_B^1 F, H_B^1 \mathbb{R}^n) \leftarrow$$

も完全となる。

この論文では概略を記す。詳しくは文献 [2] を見ていただきたい。

### §1. Ext 函手

$(X, A)$  を環付空間。  $Z$  を  $X$  の局所閉集合。

$j: (Z, B = A|_Z) \hookrightarrow (X, A)$  を inclusion とする。

(1.1.) finite presentation  $A$ -加群  $F$  に対し,

$$j_* j^*(\text{Hom}_A(F, \mathcal{K})) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_A(j_* j^* F, j_* j^* \mathcal{K})$$

が, 任意の  $A$ -加群  $\mathcal{K}$  につき成立つ。

$Z$  を開集合とする。開集合  $U$  に対し,  $U$  内の閉集合で

$\cup_n \mathbb{Z}$  に含まれるようなものの全体を  $\mathbb{P}_U(\cup_n \mathbb{Z})$  と書く.

$G \in \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbb{Z})$  に対し  $j_! G \in \mathcal{A}\mathcal{B}(X)$  を

$$T(U, j_! G) = T_{\mathbb{P}_U(\cup_n \mathbb{Z})}(\cup_n \mathbb{Z}, G)$$

で定義する.

$F \in \mathcal{A}\mathcal{B}(X)$  に対し

$$R^p j_!(F|_{\mathbb{Z}}) = 0, \quad p > 0,$$

$$H^p(X, j_!(F|_{\mathbb{Z}})) \cong H_{\mathbb{P}_X(\mathbb{Z})}^p(\mathbb{Z}, F|_{\mathbb{Z}})$$

が成り立つ.

$X$  paracompact とする.  $D$  開  $\subset X$ ,

$B = \partial D$  とする.

$$i: B \hookrightarrow X, \quad j: D \hookrightarrow X$$

を inclusions とする.  $\Rightarrow$  とき  $F \in \mathcal{A}\mathcal{B}(X)$  に対し 列

$$0 \rightarrow j_!(F|_D) \rightarrow j_*(F|_D) \rightarrow i_*(j_*(F|_D)|_B) \rightarrow 0$$

は完全である.

補題 1.2.  $F$  finite presentation  $A$ -加群,

$g: A$ -加群で  $g|_D$  が  $j_*$ -acyclic となる

とき  $R^p j_*(g|_D) = 0, \quad p > 0,$  とする.  $\Rightarrow$  とき

次の列は完全:

$$\begin{aligned}
 \cdots &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_X(D)}^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\
 &\rightarrow \text{Ext}^p(B; j_*(\mathcal{F}|_D), j_*(\mathcal{G}|_D)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_X(D)}^{p+1}(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\
 &\rightarrow \cdots
 \end{aligned}$$

補題 1.3.  $\mathcal{F}$  を finite presentation  $A$ -加群,  
 $\mathcal{G}$  を  $A$ -加群で  $(\mathcal{G}|_D)$  が  $j_*$ -acyclic  
 とする. また  $\mathcal{U}$  を  $B$  の近傍の開被覆 とする.

このとき

$$\text{Ext}^p(B; j_*(\mathcal{F}|_D), j_*(\mathcal{G}|_D))$$

を abutment とする スペクトル列で, その  $p$  項  
 が

$$E_2^{p,0} = H^p(\mathcal{U} \cap B, \text{ext}_A^0(j_*(\mathcal{F}|_D), j_*(\mathcal{G}|_D)))$$

で与えられるものが存在する, ここに  $\text{ext}_A^0(M, L)$

は

$$V \mapsto \text{Ext}_A^0(V; M, L)$$

で定義される presheaf (system of coefficients) である.

§2. 擬凸領域の境界上およびその内部, 外部に  
おけるコホモロジー.

$(X, \theta)$  を reduced,  $\dim X \geq 2$ , なる解析空間.  $D$   
を相対コンパクト<sup>強</sup>擬凸閉集合,  $B = \partial D$  とする.

$$i: B \hookrightarrow X, \quad j \hookrightarrow X \quad \text{inclusion}$$

とする, Andreotti - Grauert の結果を書きなおすと  
次のように述べられる.  $\mathcal{F} \in \text{coh}(X)$  に対し

$$(2.1) \quad \begin{cases} R^p j_* (\mathcal{F}|_D) = 0 & , p > 0, \\ \underline{H}_B^p \mathcal{F} = 0 & p=0, 1 < p < \text{prof } \mathcal{F}, \\ & \dim \mathcal{F} < p \\ \underline{H}_B^1 \mathcal{F} = i_* (j_* (\mathcal{F}|_D)|_B). \end{cases}$$

ここに  $\Gamma_B \mathcal{F}$  を  $\Gamma(\mathcal{U}, \Gamma_B \mathcal{F}) = \Gamma_{\mathcal{U} \cap B}(\mathcal{U}, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}})$   
で定義される層とすると  $\Gamma_B$  は 写手:  $\text{Ab}(X) \rightarrow \text{Ab}(X)$   
だが, その  $p$  次導来写手  $R^p \Gamma_B$  を  $\underline{H}_B^p$  と  
書いている.

補題 1.2 より  $\mathcal{G}, \mathcal{F} \in \text{coh}(X)$  に対し

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_X(D)}^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ &\rightarrow \text{Ext}^p(B; \underline{H}_B^p \mathcal{F}, \underline{H}_B^p \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_X(D)}^{p+1}(D, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

が完全列と存在.

補題 1.3 より  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{coh}(X)$  に対し.

次のスライフトウ列がある。

$$E_2^{p,q} = H^p(U \cap B, \text{ext}_C^q(\mathcal{H}_B^p \mathcal{F}, \mathcal{H}_B^q \mathcal{G})) \Rightarrow \text{Ext}^r(B; \mathcal{H}_B^p \mathcal{F}, \mathcal{H}_B^q \mathcal{G}).$$

とくに  $\mathcal{F} \in \text{coh}(X)$  に対し

$$E_2^{p,q} = H^p(U \cap B, \mathcal{H}_B^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^r(B, \mathcal{H}_B^p \mathcal{F})$$

なるスライフトウ列がある。ここに  $\mathcal{H}_B^q(\mathcal{M})$  は

$$V \mapsto H^q(V, \mathcal{M})$$

なる presheaf。

$$\text{exact 列} \quad 0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_D) \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_D) \rightarrow i_*(j_*(\mathcal{F}|_D)|_B) \rightarrow 0$$

$\parallel$   
 $\mathcal{H}_B^p \mathcal{F}$

より presheaf の exact 列

$$\rightarrow \mathcal{H}_B^{q-1}(\mathcal{H}_B^p \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_B^q(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_B^q(j_* \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_B^q(\mathcal{H}_B^p \mathcal{F}) \rightarrow$$

が得られる。

以下  $\mathcal{U}$  を  $B$  の近傍  $N$  の開被覆で

$$\bullet \quad U_\lambda \cap B \neq \emptyset \quad \forall U_\lambda \in \mathcal{U}$$

$$\bullet \quad H^q(U_\lambda \cap D, \mathcal{F}) = 0 \quad q \geq 1, \quad \mathcal{F} \in \text{coh}(X)$$

$$\bullet \quad H_{\mathbb{Q}}^q(U_\lambda \cap D, \mathcal{F}) = 0, \quad q < \text{prof} \mathcal{F}, \quad q > \text{dim} \mathcal{F}$$

を満足するものとする。

$$\mathcal{F} \in \text{coh}(X).$$

$$R^p j_*(\mathcal{F}|_D) = 0 \quad p \geq 1, \quad \mathcal{F} \in \text{coh}(X) \quad \text{上} \text{の} \text{近} \text{傍} \text{ } \mathcal{U} \text{ 上}$$

$$\mathcal{H}_B^q(j_* \mathcal{F}) = 0 \quad q \geq 1 \quad \text{on the neighborhood of } \mathcal{U}.$$

したがって上の exact 列より,  $\mathcal{F}$  が Cohen-Macaulay sheaf のとき

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) = 0 \quad q \neq 0, q \neq \text{prof } \mathcal{F} - 1$$

$$\mathcal{H}^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}_B^m(\mathcal{F}) \quad \text{但 } m = \text{prof } \mathcal{F}.$$

が  $\mathcal{U}$  の nerf に対して成り立つ。

上のスペクトル列とあわせて考え 次の結論を得る。

命題 2.2.  $\mathcal{U}$  を上の被覆,  $\mathcal{F}$  Cohen-Macaulay 層.  
に対し次が成り立つ:

$$(1) \quad H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^q(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F})) = 0 \quad q \neq 0, q \neq m-1$$

$$H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) = 0 \quad p \geq m$$

$$H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F})) = 0 \quad p \geq 1$$

$$\text{但 } m = \text{prof } \mathcal{F}$$

$$(2) \quad H^p(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) \cong H^p(B, \mathcal{H}_B^1 \mathcal{F})$$

$$\text{for } p \leq \text{prof } \mathcal{F} - 2$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow H^{m-1}(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) \rightarrow H^{m-1}(B, \mathcal{H}_B^1 \mathcal{F}) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^0(\mathcal{U} \cap B, \mathcal{H}_B^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F})) \rightarrow 0$$

は exact.

(Cartan-Eilenberg: Homological Algebra XV, 5.5 etc)

さらに追加成り立つ

$$(2.3) \quad \begin{aligned} H^p(U \cap B, \mathcal{H}_B^p \mathcal{F}) &\cong H^p(U \cap D, \mathcal{F}) \\ &\cong H^p(N \cap D, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

for  $p \leq m-2$ .

$$(\because \Gamma(V \cap B, \mathcal{H}_B^p \mathcal{F}) \cong \Gamma(V \cap D, \mathcal{F}), \quad V \in \mathcal{U}_{\text{mf}})$$

(2.4)

$$\begin{aligned} H^0(U \cap B, \mathcal{H}_B^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{F})) &\cong H^0(U \cap D, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^m(\mathcal{F})) \\ &\cong H_{\mathbb{R}}^m(N \cap D, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad H_{\mathbb{R}}^p(N \cap D, \mathcal{F}) = 0 \quad p \neq m.$$

### Traces

補題  $\mathcal{U}$  を上記の被覆とする.

(1) presheaf の列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^0) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^{m-1}) \\ \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

は  $\mathcal{U}$  の nerf 上  $\mathbb{Z}$  exact となる.

(2) presheaf の列

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^0) \rightarrow \mathcal{H}^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{H}^{m-1}(\mathcal{H}_B^1 \mathcal{R}^m) \rightarrow 0$$

は  $\mathcal{U}$  の nerf 上  $\mathbb{Z}$  exact である.

?

この補題より 次の exact 列の可換図が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^{n-1}(U, H_B^1 \Omega^{n-1}) & \rightarrow & H^{n-1}(B, H_B^1 \Omega^{n-1}) & \rightarrow & H^0(U, \mathcal{H}^{n-1}(H_B^1 \Omega^{n-1})) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^{n-1}(U, H_B^1 \Omega^n) & \rightarrow & H^{n-1}(B, H_B^1 \Omega^n) & \rightarrow & H^0(U, \mathcal{H}^{n-1}(H_B^1 \Omega^n)) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & = & H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Trace を,  $T^0: H^{n-1}(U, H_B^1 \Omega^n) \rightarrow H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$   
 で定義し, 命題 2.2.(1) と上の可換図の右端に注意して,

$$T^p: H^{n-1-p}(U, \mathcal{H}^p(H_B^1 \Omega^n)) \rightarrow \mathbb{C}$$

を零写像として延長しておく。これは退化したスペクトル列の morphism

$$T^*: H^{n-1-p}(U, \mathcal{H}^p(H_B^1 \Omega^n)) \rightarrow \mathbb{C}$$

と等しい。この aboutement の trace

$$T: H^0(B, H_B^1 \Omega^n) \rightarrow \mathbb{C}$$

を induce する。

(2.4)  $H^{n-1}(U, H_B^1 \Omega^n) \cong H^{n-1}(N \cap D, \Omega^n)$  に注意する

これは  $T^0$  は

$$[\varphi]_m \mapsto \int_{(p=-\varepsilon)} \varphi \in H^{2n-1}(B_\varepsilon, \mathbb{C}) \cong H^{2n-1}(B, \mathbb{C})$$

で与えられる。ただし  $\varphi \in \Gamma(N \cap D, \mathcal{E}^{n, n-1})$ ,  $\bar{\partial}\varphi = 0$  は,  $[\varphi] \in H^{n,1}(N \cap D, \mathbb{R}^n)$  の代表である。

### §3 有限性と双対性

$\mathcal{U}$  を §2 で述べた covering of a n.b.d of  $B$ .

$$\Gamma(\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_p \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) \cong \Gamma(\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_p \cap D, \mathcal{F}),$$

$$\mathcal{F} \in \text{coh}(X),$$

により 右辺の FS 空間の構造を 左辺に入れ、こうして

$$\begin{aligned} & C^p(\mathcal{U} \cap B, H_B^1 \mathcal{F}), \quad \mathcal{F} \in \text{coh}(X), \\ & \hat{C}^p(\mathcal{U} \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) \quad (\text{左にコホモロジー}) \\ & \hat{Z}^p(\mathcal{U} \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) \quad (\text{左にコホモロジー}) \end{aligned}$$

にも FS-空間の構造が入る,

補題  $\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \mathcal{F} \in \text{coh}(X), \quad \forall p > 0,$

$$H^p(A_\varepsilon, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(D \cap N, \mathcal{F}) \quad \text{surjective}$$

但  $A_\varepsilon = \{x \in N; \rho(x) < \varepsilon\}$

これは Andreotti - Grauert と同様に見える。

定理,  $\mathcal{F} \in \text{coh}(X)$ .  $n > 2$

$$\dim H^p(B, H_B^1 \mathcal{F}) < \infty$$

$$0 < p < \text{codim } \mathcal{F} - 1.$$

証明

§2 に述べた covering  $\mathcal{U}$  をとり

$\dim H^p(U \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) < \infty$ ,  $\forall p > 0$ ,  
を示す。  $p < \text{codim } \mathcal{F} - 1$  に対しては

$$H^p(U \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) \cong H^p(B, H_B^1 \mathcal{F})$$

がわかっているからである。

上の補題の  $A_\varepsilon$  をとる。  $A_\varepsilon$  の有限サイズの被覆  $\mathcal{V} = (V_j)_{1 \leq j \leq l}$  をとり,  $D \cap N$  の被覆  $\{V_j \cap D\}_{1 \leq j \leq l}$  の refinement  $\mathcal{U} = (U_i)$  をとり, それにともなう細分子像を  $U_i \subset V_{\alpha(i)}$  とする。すると

$$\tau^*: \hat{C}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \longrightarrow \hat{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

はコンパクト写像となる。上記補題より

$$(\tau^*, \delta): \hat{Z}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \oplus \hat{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \hat{Z}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

が onto。あとは Schwartz の lemma に基づく  
の方法で

$$\dim H^p(U \cap D, \mathcal{F}) < \infty, \quad p > 0$$

$$\dim H^p(U \cap B, H_B^1 \mathcal{F}) < \infty, \quad p > 0.$$

次に 双対性定理を述べよう。

$$\mathcal{F}^{\sharp}: H_c^{\sharp}(N \cap D, \mathbb{R}^p) \longrightarrow H_c^{\sharp+1}(N \cap D, \mathbb{R}^p)$$

を次のように定義する。

$$\varphi \in \mathcal{T}(N \cap D, \mathbb{R}^{\sharp}), \quad \bar{\varphi} = 0 \text{ とする.}$$

函数  $u \in C^\infty$  を  $c_0 < d' < d < \infty$  に対し

$$u(x) = \begin{cases} 1 & d < \rho(x) < \infty \\ 0 & \rho(x) < d' \end{cases}$$

と定義する。但し  $\{c_0 < \rho < \infty\} = N \cap D$  である。

$$\bar{\gamma}^s(u\varphi) = f \in \mathcal{D}'(N \cap D, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{s+1})$$

が  $[f] \in H_c^{s+1}(N \cap D, \mathbb{R}^p)$  を定めており、これを

$$\gamma^s[\varphi] = [f] \quad \text{と} \quad \text{する。} \quad \text{well defined}$$

である。

次の命題が鍵となる。

命題

$$\gamma^s : H_c^s(N \cap D, \mathbb{R}^p) \longrightarrow H_c^{s+1}(N \cap D, \mathbb{R}^p)$$

は  $1 \leq s \leq n-2$  において bijectif である。

証明のための準備が長いのを略す。 [2]

我々は有限性定理の証明より

$$\dim H_c^s(N \cap D, \mathbb{F}) = \dim H_c^s(U \cap D, \mathbb{F}) < \infty$$

$s > 0$  を得るので、

« Serre duality » が成立つ： $s > 0$  に対し

$$(H_c^s(N \cap D, \mathbb{R}^p))' \cong H_c^{n-s}(N \cap D, \mathbb{R}^{n-p}).$$

上記命題とあわせ,

$$(H^{\delta}(N \cap D, \mathbb{R}^P))' \cong H^{n-\delta-1}(N \cap D, \mathbb{R}^{n-P})$$

$\delta > 0$

これより

定理  $0 < \delta < n-1$  に対し

$$(H^{\delta}(B, H_B^1 \mathbb{R}^P))' \cong H^{n-\delta-1}(B, H_B^1 \mathbb{R}^{n-P}).$$

系

$2 \leq \delta \leq n-2$  に対し

$$(H_B^{\delta}(X, \mathbb{R}^P))' \cong H_B^{n-\delta}(X, \mathbb{R}^{n-P}).$$

$\Gamma(B, H_B^1 \mathbb{R}^P) \cong H_B^1(X, \mathbb{R}^P)$  の双対については  
特別の考察を要するか, 最終的に 次が示される.

定理  $\mathcal{F} \in \text{coh}(X)$ .  $\delta \leq \text{prof } \mathcal{F} - 2$

に対し

$$H^{\delta}(B, H_B^1 \mathcal{F})' \cong \text{Ext}^{n-\delta-1}(B; H_B^1 \mathcal{F}, H_B^1 \mathbb{R}^n).$$

Open problem:  $H^{n-1}(B, H_B^1 \mathcal{F})$  は一般に無限次元だが separated DFS となることが示せるのではなにか (DFS はすでにわかっている)。すると

$$H^{n-1}(B, \mathcal{H}_B^1)^{\vee} \cong \text{Hom}(B; \mathcal{H}_B^1, \mathcal{H}_B^1 \otimes \mathbb{C}^n)$$

が成り立つか？

文献

[1] 郡 敏昭: Cohomologie de De Rham au bord  
d'un domaine fortement pseudoconvexe

Tokyo J. Math. Vol. 3 No. 1 pp. 37-74

[2] ———: Théorème de dualité pour la  
cohomologie locale au bord des ouverts fortement  
pseudoconvexes, Hokkaido Math. J. 投稿予定

[3] Andreotti - Grauert: Théorème de finitude pour la  
cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France  
90 (1962)