数理解析研究所講究録
387巻 1980年 38-63

Analytic K-theory

早大 理工 大学院 神谷誠一郎

近年,様々な場合に対して「Riemann-Roch Theorem」が研究されてきているが,一般の compact $\mathbb{C}$-analytic mfd(及び complete variety over k)上の「Grothendieck-Riemann-Roch Theorem」は今だに無い。Atiyah-Hirzebruch('61)によって Embeddingの場合は示されているが,Projection に対しての証明がまだ無いのである。そしてそこで用いられているものは Higher Topological K-theoryなりAlgebraic K-theoryである。それでは Analytic cyclesの情報を提供してくれるような Higher analytic K-theory なるものはないのであろうか。このようなことを考えてみたのであるがよく判らない。それならいっそのこと,空間概念の方を代数幾何学における構成法に近づけてみてはどうかと考えてみると今から10年程前斉藤恭司氏が Stein space (及びalgebraicなscheme)の一般化としてAnalytic scheme の理論を展開していた。我々はこのAnalytic scheme 上に望むべき性質

を持った Higher Analytic K-theory を構成してみようというのであり，今回の話はその第一歩である。

岩橋の定理（1960）

> $\mathbb{C}$-analytic space $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して次は同値
>
> (i) $(X, \mathcal{O}_X)$ は Stein,
>
> (ii) $\rho_X : |X| \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{top.\mathbb{C}\text{-}alg.}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$ は homeo.
>
> $$x \longmapsto \rho_{X,x} := (f \longmapsto f(x))$$

の一般化としての

Forster-斉藤の定理（1967）

> $\mathbb{C}$-analytic space $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して次は同値：
>
> (i) $(X, \mathcal{O}_X)$ は Stein,
>
> (ii) ${}^\forall(T, \mathcal{O}_T)$; $\mathbb{C}$-analytic space に対し
>
> $$\rho : \mathrm{Hom}_{Esp.\mathbb{C}\text{-}an.}(T, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{top.\mathbb{C}\text{-}alg.}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(T)) ; \text{ homeo.}$$

より，Stein space $(X, \mathcal{O}_X)$ の analytic structure は topological ring $\mathcal{O}(X)$ によって完全にきまってしまうことがわかる。これを背景にして，Stein space に affine scheme の役割を演じさせることに依り，正則函数環よりさらに一般の位相環に対して analytic scheme が構成された。これを簡単に復習してみると，

<u>Definition.</u>

A ; commutative ring with unit とするとき

$q : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が semi-norm であるとは

(i) $(\forall a, b \in A)$; $q(a+b) \leq q(a) + q(b)$

(ii) $(\forall a, b \in A)$; $q(a \cdot b) \leq q(a) \cdot q(b)$

(iii) $q(0_A) = 0$, $q \neq 0$

また, semi-norm $q : A \to \mathbb{R}_+$ に対して

$\mathrm{rad}\, q : A \to \mathbb{R}_+$; $a \mapsto \mathrm{rad}\, q(a) := \lim_{n \to \infty} q(a^n)^{\frac{1}{n}}$

とおくとこれも semi-norm となり,次の同値な条件を満たす semi-norm q を <u>reduced</u> と呼ぶ;

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a \in A)$; $q(a^n) = q(a)^n$

(i)$^{\mathrm{bis}}$ $(\forall a \in A)$; $q(a) = \mathrm{rad}\, q(a)$

又,次の条件を満たす semi-norm q を <u>prime</u> と呼ぶ;

(ii) $(\forall a, b \in A)$; $q(a \cdot b) = q(a) \cdot q(b)$

2つの semi-norm $q_1, q_2 : A \to \mathbb{R}_+$ に対して

$q_1 \leq q_2 \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists c > 0)(\forall a \in A) : q_1(a) \leq c \cdot q_2(a)$

semi-norms の family τ_A が convex topology であるとは

(i) $q_1, q_2 \in \tau_A \Rightarrow \sup(q_1, q_2) \in \tau_A$

(ii) $q \in \tau_A$, $q' \leq q \Rightarrow q' \in \tau_A$

を満たす事とし, (A, τ_A) を convex ring と呼ぶ。

又, ${}_{(q)}A := A/\mathrm{Ker}(q)$ によって associated normed ring としたとき,その完備化を ${}_qA := {}_{(q)}\hat{A}$ とすれば, $A \xrightarrow{\mathrm{surj}} {}_{(q)}A \underset{\mathrm{inj}}{\hookrightarrow} {}_qA$ は dense image を持つ。このとき, convex ring (A, τ_A) に対して $({}_qA, q)_{q \in \tau_A}$ は Banach ring の inverse system となり, $\forall q \in \tau_A$ に対して

$(A,\tau_A) \longrightarrow (_{q}A, q)$ が連続であることから

$\iota : (A,\tau_A) \longrightarrow \varprojlim_{q\in\tau_A} (_{q}A, q)$

が定まる。ι が surjective のとき,(A,τ_A) は complete, ι が injective のとき, separated。separated, complete な convex ring のことを pro-Banach ring とも呼ぶ。そして convex ring (A,τ_A) に対して

$$\mathrm{Sred}(A,\tau_A) := \{ r : A \to \mathbb{R}_+ ;\ \text{reduced semi-norm} \mid (\exists q \in \tau_A) : r \leq q \}$$

$$\mathrm{Spec}(A,\tau_A) := \{ p : A \to \mathbb{R}_+ ;\ \text{prime semi-norm} \mid (\exists q \in \tau_A) : p \leq q \}$$

とおき, $\mathrm{Spec}(A,\tau_A)$ に1かるべき topology を与え, ringed space として見た $(\mathrm{Spec}(A,\tau_A), \tilde{A})$ であって,"ある条件"を満たすものを Stein Scheme (もしくは affine analytic scheme, affine analytic space) と呼び, この $(\mathrm{Spec}(A,\tau_A), \tilde{A})$ を貼り合わせて作った $(X, \mathcal{O}_X)$ が analytic scheme と呼ばれるものであった。ここで, (A,τ_A) が $(\mathbb{C},|\ |)$-algebra であれば, $\mathrm{Spec}(A,\tau_A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((A,\tau_A),(\mathbb{C},|\ |))$ となり, 特に (A,τ_A) が Banach $\mathbb{C}$-algebra であれば $\mathrm{Spec}(A,\tau_A)$ は maximal ideal space となる。

解析的背景

$(A, \|\ \|)$ を Banach $\mathbb{C}$-algebra, $\mathcal{M}(A)$ を maximal ideal space とすれば これは weak topology に関して compact となっている。又, $A^* \subset A$ を A の invertible elements とするとき, 次の事が知られている:

1) (Arens-Royden) : $H^0(\mathcal{M}(A),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\exp} A^*) \overset{(\text{Shilov})}{\models} \mathrm{Idemp}(A))$

$H^1(\mathcal{M}(A),\mathbb{Z}) \simeq A^*/\exp(A)$

写像の homotopy classes ; $[\mathcal{M}(A), GL_n(\mathbb{C})] \simeq GL_n(A)/GL_n^\circ(A)$

但し, $GL^\circ(A)$ は identity component.

2) (O. Forster) : Gelfand 変換 $\mathcal{G} : A \to C^\circ(\mathcal{M}(A)) : x \mapsto \mathcal{G}_A(x) := (f \mapsto f(x))$

は, semi-ring isomorphism :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\ \sim\ } & P(C^\circ(\mathcal{M}(A))) & \xrightarrow{\ \sim\ } & VB(\mathcal{M}(A)) \\ \| & & \| & & \| \\ \left\{\begin{array}{l}\text{projective} \\ A\text{-modules} \\ \text{of finite type}\end{array}\right\} & & \left\{\begin{array}{l}\text{projective } C^\circ(\mathcal{M}(A)) \\ \text{-modules of} \\ \text{finite type}\end{array}\right\} & & \left\{\begin{array}{l}\text{vector bundles} \\ \text{over } \mathcal{M}(A)\end{array}\right\} \end{array}$$

を induce する.

3) (O, Forster) : $K_0(A) \simeq K_0(\mathcal{M}(A))$ は ring iso.

4) (O, Forster) ; $H^2(\mathcal{M}(A), \mathbb{Z}) \simeq Pic(A) := \left\{\begin{array}{l}\text{isomorphism-classes of projective} \\ A\text{-modules of finite type of} \\ \text{rank } 1\end{array}\right\}$

(これらの事は最近, J.L.Taylor がもう少し詳しく議論している)

代数的背景

D. Quillen の Higher algebraic K-theory は約そ次の如きものである : commutative ring with unit A に対して projective left A-modules of finite type のなす category $\mathcal{P}_A$ を symmetric monoidal category, i.e. morphism は iso. $M \simeq M'$, operation は直和 $\oplus : \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A : (M, N) \mapsto M \oplus N$ とみれば, $\mathcal{P}_A$ の $\mathcal{P}_A$ による localization $\mathcal{P}_A^{-1} \cdot \mathcal{P}_A := \langle \mathcal{P}_A, \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_A \rangle$ は homotopy-associative, homotopy-commutative な H-space となりその

Geometric realization は $B(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A) \simeq \pi_0(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A) \times B(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A)_0$, かつ abel 群 $\pi_0(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A) \xrightarrow{\sim} K_0(A)$. 又, plus-construction に依って得られる $BGL(A) := B(\varinjlim_n GL_n(A))$ の universal な H-space $BGL(A)^+ \simeq B(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A)_0$ となっている。そこで, $\underline{K_i(A) := {}_{\mathrm{I}}K_i(\mathcal{P}_A) := \pi_i(B(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A)) = \pi_i(K_0(A) \times BGL(A)^+),\ i \geq 0}$ と定義される。一方 exact category $\mathcal{M}$ に対して category $Q(\mathcal{M})$ を

$$\mathrm{Ob}(Q(\mathcal{M})) := \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$$

$$\mathrm{Mor}_{Q(\mathcal{M})}(M, M') := \left\{ \begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "j"] & M' \\ M & \end{tikzcd} \right\} \Big/ \sim$$

但し

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "j"] & M' \\ M & \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd} N' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, two heads, "j'"] & M' \\ M & \end{tikzcd} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{tikzcd} M' \arrow[r, equal] & M' \\ N \arrow[u, tail, "i"] \arrow[r, "\sim", "\exists h"'] \arrow[d, two heads] & N' \arrow[u, tail, "i'"'] \arrow[d, two heads, "j'"'] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} N \overset{i}{\rightarrowtail} M' \\ \downarrow\!\!\downarrow j \\ M \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{Q(\mathcal{M})}(M, M')$ と $\begin{pmatrix} N' \overset{i'}{\rightarrowtail} M'' \\ \downarrow\!\!\downarrow j' \\ M' \end{pmatrix} \in \mathrm{Mor}_{Q(\mathcal{M})}(M', M'')$ との composition は

$$\left(\begin{tikzcd} N \times_{M'} N' \arrow[r, tail, "pr_2"] \arrow[d, two heads, "pr_1"'] & N' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, two heads, "j'"] & M'' \\ N \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "j"'] & M' & \\ M & & \end{tikzcd} \right) \in \mathrm{Mor}_{Q(\mathcal{M})}(M, M'')$$

と定義する。この時,

$\underline{{}_{\mathrm{II}}K_i(\mathcal{M}) := \pi_{i+1}(BQ(\mathcal{M}))}$ と定義され, $\mathcal{P}_A$ を exact category とみなせば $K_i(A) := {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathcal{P}_A) = \pi_{i+1}(BQ\mathcal{P}_A)$ だが, 実は,

1) ${}_{\mathrm{I}}K_i(\mathcal{P}_A) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathcal{P}_A)$, $K_0A \times BGL(A)^+ \simeq \Omega BQ(\mathcal{P}_A)$

2) $K_i(A) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i$(category of A-mod. with $\mathcal{P}_A$-resolutions of length $\leq n$), $^\forall n \geq 0$
特に A が regular なら $K_i(A) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Mod}f(A))$, 但し $\mathrm{Mod}f(A)$ は category of A-mod. of finite type.

3) Noetherian ring homo. $f: A \to B$ で $B_{[f]}$ が finite Tor dim. の時は
${}_{\mathrm{II}}K_i(\{M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}f(A)) \mid \mathrm{Tor}_n^A(B, M) = 0 \text{ for } n > 0\}) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Mod}f(A))$

4) (Devissage): Noetherian ring A の nilpotent two-sided ideal I に対して

$$_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A/I)) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A))$$

5) (Localization): Abelian category $\mathcal{A}$ の Serre subcategory $\mathcal{B}$ に対して

$$\cdots \to {}_{\mathrm{II}}K_1(\mathcal{A}) \to {}_{\mathrm{II}}K_1(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \to {}_{\mathrm{II}}K_0(\mathcal{B}) \to {}_{\mathrm{II}}K_0(\mathcal{A}) \to {}_{\mathrm{II}}K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \to 0$$ は exact.

6) Dedekind domain A とその quotient field k に対して

$$\to K_{i+1}(k) \to \coprod_{m \in \mathrm{Spm}(A)} K_i(A/m) \to K_i A \to K_i(k) \to \cdots \quad (\text{exact})$$

7) (Sherman): field k と Dedekind domain $k[t]$ に対して

$$0 \to K_i(k) \to K_i(k[t]) \underset{\text{split}}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \coprod_{m \in \mathrm{Spm}(k[t])} K_{i-1}(k[t]/m) \to 0 \quad (\text{exact})$$

8) Noetherian ring A に対して

i) ${}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A[t])) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A))$

ii) ${}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A[t,t^{-1}]) \simeq {}_{\mathrm{II}}K_i(\mathrm{Modf}(A)) \oplus {}_{\mathrm{II}}K_{i-1}(\mathrm{Modf}(A))$

さらに A が Regular ならば,

i)^{bis} $K_i(A[t]) \simeq K_i A$

ii)^{bis} $K_i(A[t,t^{-1}]) \simeq K_i A \oplus K_{i-1} A$

Not necessarily commutative ring A に対して

$NK_q A := \mathrm{Coker}(K_q A \to K_q A[t])$

$\mathcal{N}il_A$ を $\mathrm{Ob}(\mathcal{N}il_A) := \{(P,f) \mid P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_A),\ P \xrightarrow{f} P \text{ は nilpotent}\}$

なる exact category,

$\mathrm{Nil}_q(A) := \mathrm{Ker}(K_q(\mathcal{N}il_A) \to K_q A)$ とする時,

iii) $NK_q A \simeq \mathrm{Nil}_{q-1} A$

iv) $K_q(A[t,t^{-1}]) \simeq K_q A \oplus K_{q-1} A \oplus NK_q A \oplus NK_q A$

v) $0 \to K_q A \to K_q A[t] \oplus K_q A[t^{-1}] \to K_q A[t,t^{-1}] \to K_{q-1} A \to 0$ (exact)

9) Scheme$(X,\mathcal{O}_X)$ に対して，$K_iX := {}_{\text{II}}K_i$(category of vector bundles),

Noetherian scheme$(X,\mathcal{O}_X)$ に対して $G_iX := {}_{\text{II}}K_i$(category of coherent $\mathcal{O}_X$-Mod),

とおく時，

$(X,\mathcal{O}_X)$ が Regular, Noetherian, separated なら $K_iX \simeq G_iX$.

$X := \operatorname{spec} A$ が Regular なら $K_iA \simeq K_i(\operatorname{Mod} f(A)) \simeq K_i(\operatorname{Spec} A) \simeq G_i(\operatorname{Spec} A)$.

10) Noetherian separated scheme X の closed subscheme Z, $U := X \setminus Z$ に対して

$$\to G_{q+1}U \to G_qZ \xrightarrow{i_*} G_qX \xrightarrow{j^*} G_qU \to \cdots \quad \text{(exact)}.$$

さらに open $V \subset X$ に対して

$$\to G_{q+1}(U\cap V) \to G_q(U\cup V) \to G_q(U) \oplus G_q(V) \to G_q(U\cap V) \to \cdots$$

11) Noetherian, separated scheme X の set of pt. of codim. p を X_p と書くと

$$E_1^{pq}(X) := \coprod_{x\in X_p} K_{-p-q}(k(x)) \Rightarrow G_{-p-q}(X)$$

なる spectral sequence がある.

12) 次は同値： $\mathcal{M}_p(X) := \{\mathcal{F} \in Coh(X) \mid \operatorname{codim}_X \operatorname{supp}(\mathcal{F}) \geqq p\}$ とする.

(i) X は very clean, i.e. $\forall p \geqq 0$, $\mathcal{M}_{p+1}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}_p(X)$ は zero map

$${}_{\text{II}}K_n(\mathcal{M}_{p+1}(X)) \to {}_{\text{II}}K_n(\mathcal{M}_p(X)) \text{ for } \forall n \geqq 0 \text{ を induce する.}$$

(ii) $\forall q$, $E_2^{pq}(X) = 0$ if $p \neq 0$ & edge homo. $G_{-q}X \simeq E_2^{0q}(X)$.

(iii) $\forall n \geqq 0$,

$$0 \to G_nX \to \coprod_{x\in X_0} K_n k(x) \xrightarrow{d_1} \coprod_{x\in X_1} K_{n-1} k(x) \to \cdots\cdots \quad \text{(exact)}.$$

13) (Gersten)： $\underline{\underline{G}}_{n,X}$ を $U \mapsto G_nU$ に associate した sheaf とする時

$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ is very clean for $\forall x \in X$ なら，

$$E_2^{pq}(X) \simeq H^{p,-q}_{\text{Bloch}}(X) := H^p(X, \underline{\underline{G}}_{-q,X}).$$

したがって Brown-Gersten's spectral sequence

$$E_2^{pq}(X) = H^{p,-q}_{Bloch}(X) := H^p(X, \underline{\underline{G}}_{-q,X}) \Rightarrow G_{-p-q}(X)$$

が得られる。

14) (Sherman) : i) $E_2^{pq}(X) \simeq E_2^{pq}(X[t])$ 但し $X[t]$ は affine line over X

ii) $X, X[t]$ が very clean なら $H^{pq}_{Bloch}(X) \simeq H^{pq}_{Bloch}(X[t])$

iii) X が regular で $X, X[t]$ が very clean なら $H^{pq}_{Bloch}(X[t, t^{-1}]) \simeq H^{pq}_{Bloch}(X) \oplus H^{p,q-1}_{Bloch}(X)$

15) (Gersten's conjecture) : Regular local rings are very clean?

16) Regular, Noetherian, separated scheme of finite type over a field は very clean. 従って

(vanishing theorem) : $H^{pq}_{Bloch}(X) := H^p(X, \underline{\underline{K}}_{q,X}) = 0$, for $p > q$

(Bloch's formula) : $H^{pp}_{Bloch}(X) := H^p(X, \underline{\underline{K}}_{p,X}) \simeq A^p(X)$ (= Chow group)

17) (Grayson) smooth, quasi-projective variety X に対して

$$\bigoplus_p H^{pp}_{Bloch}(X) := \bigoplus_p H^p(X, \underline{\underline{K}}_{p,X}) \simeq \bigoplus_p A^p(X) \quad \text{as a graded rings}$$

etc. といった様に Quillen の higher alg. K-groups は実り多い内容を持っている。ここで "localization" の操作を "completion" に置き換える事に依って Quillen の考え方に基づく higher analytic K-theory の構成も可能と考えており、解析幾何においても上の諸性質に対応する事が成立して欲しいのであるがまだ出来てはいない。ここでは次の Karoubi-Villamayor 流の考え方に従って analytic K-theory が構成されてゆく。Exact category $\mathcal{M}$ に対する negative な alg. K-groups $K_{-i}(\mathcal{M})$ はまだ構成されていないが、

Karoubi-Villamayor の考え方に従えば，任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して，analytic K-theory が構成できる．

Ring with unit A に対して <u>cone</u> C(A) を <u>permutants</u> と呼ばれる M＝(無限交代行列)×(Aの有限集合の元よりなる対角行列)なる形をした無限行列で生成される ring，$\tilde{A}:=\bigcup_n M_n(A)$ を高々有限個のAの元≠0よりなる行列の両側イデアル，$SA:=CA/\tilde{A}$ によってAの <u>suspension</u> を定義する。

18) (Karoubi-Gersten-Wagoner): $B_{GL(CA)}^{+}$ is contractible.

$$K_i(CA)=0 \quad (i\geqq 1).$$

19) (Gersten-Wagoner): fibre of $(B_{GL(CA)}^{+}\to B_{GL(SA)}^{+})\simeq K_0A\times B_{GL(A)}^{+}$

すなわち $K_0A\times B_{GL(A)}^{+}\to K_0A\times B_{GL(CA)}^{+}\to K_0A\times B_{GL(SA)}^{+}$ は fibration.

従って $\Omega B_{GL(SA)}^{+}\simeq K_0A\times B_{GL(A)}^{+}\ \left(\underset{\text{Quillen}}{\simeq} B(\mathcal{P}_A^{-1}\cdot\mathcal{P}_A)\underset{\text{Quillen}}{\simeq}\Omega BQ(\mathcal{P}_A)\right)$

$$K_{i+1}(SA)=K_iA \quad (i\geqq 0)$$

20) (Quillen): $BQ\mathcal{P}_A\to BQ\mathcal{P}_{CA}\to BQ\mathcal{P}_{SA}$ は fibration で Gersten-Wagoner's fibration の delooping.

21) (Karoubi): $K_{-i}^{KV}(A)=K_{-i}^{Bass}(A) \quad (i\geqq 0)$

但し $K_{-i}^{KV}(A):=K_0S^iA=K_1S^{i+1}A$

$K_{-i}^{Bass}(A):=L^iK_0A=\mathrm{Coker}\left(K_{-i+1}^{Bass}A[t]\oplus K_{-i+1}^{Bass}[t^{-1}]\to K_{-i+1}^{Bass}A[t,t^{-1}]\right).$

22) (Bass): Noetherian, regular ring A に対して $K_{-i}^{Bass}(A)=0 \quad (i>0).$

23) (Gersten-Wagoner): Ω-spectrum $E(A)=\{E(A)_n\}_{n\geq 0}$ を

$$E(A)_n:=K_0(S^nA)\times B_{GL(S^nA)}^{+} \quad (n\geqq 0)$$

によって定義すると，$E(A)_n \simeq \Omega E(A)_{n+1}$ で

$$\pi_i(E(A)) := \lim_{n\to\infty} \pi_{i+n}(E(A)_n) \qquad (i\in\mathbb{Z})$$

と置く時，

$$\pi_i(E(A)) = K_i(A), \quad \pi_{-i}(E(A)) = K^{KV}_{-i}(A) \qquad (i\geqq 0)$$

24) (Gersten-Rector, Dror)：$\mathbb{Z}_\infty$ を integral completion functor of Bousfield-Kan とする時，$B_{GL(A)}^{+} \simeq \mathbb{Z}_\infty B_{GL(A)}$

25) (Wagoner)：Identity-preserving ring homo. $f: A\to B$ に対して $\Gamma(f)$ を次の pull-back diagramで定義する：

$$\begin{tikzcd} \Gamma(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & SA \arrow[d, "sf"] \\ CB \arrow[r, two heads] & SB \end{tikzcd},$$

又，inductive に $S^i f := S(S^{i-1}f): S^iA \to S^iB$ とおく。

$X(f) := (X_i(f))$ を
$$X_{-i}(f) := \Omega^i(K_0\Gamma(f)\times B_{GL(\Gamma(f))}^{+})$$
$$X_i(f) := K_0(\Gamma(S^if)\times B_{GL(\Gamma(S^if))}^{+}) \qquad (i\geqq 0)$$

で定義すると $X(f)$ は Ω-spectrum となり，relative K-group を

$$K_i(f) := \pi_i(X(f)) = \lim_{n\to\infty}\pi_{i+n}(X_n(f))$$

で定義する。このとき long exact sequence：

$$\cdots\cdots \to K_i(A) \to K_i(B) \to K_{i-1}(f) \to K_{i-1}(A) \to K_{i-1}(B) \to \cdots$$

がある。例えば ideal $I\subset A$ に対して $K_i(A,I) := K_i(A\twoheadrightarrow A/I)$ とおけば $\cdots\to K_i(A)\to K_i(A/I)\to K_{i-1}(A,I)\to K_{i-1}(A)\to\cdots\cdots$

§1. 岡の原理

Stein mfd $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して

1) $H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}})) \simeq \mathrm{Vect}^n_{hol}(X^{an})$

$H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}})) \simeq \mathrm{Vect}^n_{top}(X^{top})$

2) (Grauert): $H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}})) \underset{bij}{\simeq} H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}}))$

従って，これらのことより Grothendieck group に対して

3) $K_0^{an}(X^{an}) \simeq K_0^{top}(X^{top})$; ring iso.

4) For $N \gg 0$,

$$\begin{array}{ccc} [X^{an}, \mathrm{Grass}(n,N)]_{hol} & \xrightarrow{\sim} & [X^{top}, \mathrm{Grass}(n,N)]_{top} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathrm{Vect}^n_{hol}(X^{an}) & & \mathrm{Vect}^n_{top}(X^{top}) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H^1(X^{an}, GL_n(\mathcal{O}_{X^{an}})) & \simeq & H^1(X^{top}, GL_n(\mathcal{C}_{X^{top}})) \end{array}$$

5) (Grauert) $[X^{an}, GL_n(\mathbb{C})]_{hol} \simeq [X^{top}, GL_n(\mathbb{C})]_{top}$

従って Atiyah-Hirzebruch の K-group に対して

6) $K^1(X^{an}) \simeq K^1(X^{top})$, $K^{-1}(X^{an}) \simeq K^{-1}(X^{top})$ (Bott's periodicity)

次に ring with unit A に対して $GL_nA \hookrightarrow GL_{n+1}A$; $(*) \mapsto \begin{pmatrix} * & \\ & 1 \end{pmatrix}$ より

$GL(A) := \varinjlim_n GL_nA$ とおく時，Bass-Whitehead group $K_1(A)$ は，

$K_1(A) := GL(A)/[GL(A), GL(A)]$，但し $[\ ,\ ]$ は commutator subgroup,

と定義される。この時，

$K_1(\mathcal{O}_{X^{an}})$ を pre-sheaf $U \mapsto K_1(\Gamma(U, \mathcal{O}_{X^{an}}))$ に associate した sheaf,

$K_1(\mathcal{C}_{X^{top}})$ を pre-sheaf $U \mapsto K_1(\Gamma(U, \mathcal{C}_{X^{top}}))$ に 〃

とすれば，K_1, GL, $[GL, GL]$ は filtering direct limit と commute

する，i.e. $K_1(\mathcal{O}_{X^{an}})_x \simeq K_1(\mathcal{O}_{X^{an}, x})$, $K_1(\mathcal{C}_{X^{top}})_x \simeq K_1(\mathcal{C}_{X^{top}, x})$

$$GL_n(\mathbb{C})/[GL_n\mathbb{C}, GL_n\mathbb{C}] \simeq GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \quad \text{だから}$$

$$K_1(\mathcal{O}_{X^{an}}) \cong \mathcal{O}^*_{X^{an}}, \qquad K_1(\mathcal{C}_{X^{top}}) \cong \mathcal{C}^*_{X^{top}}$$

従って 2) の $n=1$ の場合として

7) $Pic(X^{an}) = H^1(X^{an}, K_1(\mathcal{O}_{X^{an}})) \underset{bij}{\simeq} H^1(X^{top}, K_1(\mathcal{C}_{X^{top}})) = Pic(X^{top})$

次に $E(A) := \left\{ \text{elementary matrix } e_{ij}(\lambda) := \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ によって生成される subgroup} \right\}$

とすると $E(A) \simeq [GL(A), GL(A)]$ で, Steinberg group $St(A)$ を

$$St(A) := \left\{ \begin{array}{c} x_{ij}(a),\ a \in A \\ 1 \leq i \neq j < +\infty \\ \text{で生成される} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} x_{ij}(a) \cdot x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b) & \\ [x_{ij}(a), x_{jl}(b)] = x_{il}(a \cdot b) & , i \neq l \\ [x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = 1 & , j \neq k,\ i \neq l \end{array} \right\}$$

と定義する時, Milnor group $K_2(A)$ は

$$K_2(A) := \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} St(A) & \twoheadrightarrow & E(A) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x_{ij}(a) & \longmapsto & e_{ij}(a) \end{array} \right)$$

と定義される。この時, $K_2(A) = \text{Center of } St(A)$ で, A が local ring の時は

$$\begin{tikzcd}
 & A^* \otimes_{\mathbb{Z}} A^* \arrow[d] & & SL(A) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & K_2(A) \arrow[r] \arrow[d] & St(A) \arrow[r] & E(A) \arrow[r] & 1 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

が判っており, K_2, St, E は filtering direct limit と commute するから, $SL(\mathcal{O}_{X^{an}})$, $St(\mathcal{O}_{X^{an}})$ etc. を $U \mapsto SL(\Gamma(U, \mathcal{O}_{X^{an}}))$, $U \mapsto St(\Gamma(U, \mathcal{O}_{X^{an}}))$ etc に associate した sheaf とすれば

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}^*_{X^{an}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}^*_{X^{an}} \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & K_2(\mathcal{O}_{X^{an}}) \arrow[r] \arrow[d] & St(\mathcal{O}_{X^{an}}) \arrow[r] & SL(\mathcal{O}_{X^{an}}) \arrow[r] & 1 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

8) (問題): $H^2(X^{an}, K_2(\mathcal{O}_{X^{an}})) \simeq H^2(X^{top}, K_2(\mathcal{C}_{X^{an}}))$ か?

さらに一般にQuillenのhigher alg. K-groupsに対して

$$H^p(X^{an}, K_p(\mathcal{O}_{X^{an}})) \simeq H^p(X^{top}, K_p(\mathcal{C}_{X^{top}}))\ \text{か?}$$

Bloch's formulaを考慮に入れると, $H^p(X^{an}, K_p(\mathcal{O}_{X^{an}}))$はanalytic cyclesの情報を, $H^p(X^{top}, K_p(\mathcal{C}_{X^{an}}))$はtopological cyclesの情報を持っていると思われる。勿論analytic cyclesとtopological cyclesとは異っており, その食違いの様子がK-theoryの立場から判り, 又これらcyclesの"良いequivalence relation"が見つかれば面白いと思われる。

§2, Path ring, Loop ring, Cone and Suspension

以后, convex ringはすべてHausdorff topologyを備えているものとする。

1) (A,τ), (B,τ_B)を二つのconvex ringsとする時,

$\varphi: (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ が bounded morphism

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$

(i) $\varphi: A \to B$ は ring homo.

(ii) $(\exists C>0)(\forall q\in\tau_B)(\exists c'>0)(\forall x\in A): q(\varphi(x)) \le C\varphi^* q(x) + c' \operatorname*{Inf}_{\varphi^* q \le p} p(x)$.

但し, この時のφはBanach ring homo. $(\varphi^*_q A, \varphi^* q) \longrightarrow (_q B, q)$とみる

2) pro-Banach ring (A,τ_A)に対して

$$(A,\tau_A)\{x\} := \{ f(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n \mid a_n \in A,\ (\forall q\in\tau_A): \sum_{n\ge 0} q(a_n) < +\infty \}$$

とおくと, これは $q(f) := \sum_{n\ge 0} q(a_n) < +\infty$ なる semi-normをもち

pro-Banach ring となる.

3) $(A,\mathcal{T}_A)\{x\} \overset{h_0}{\underset{h_1}{\rightrightarrows}} (A,\mathcal{T}_A)$ なる二つの morphism を
$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in (A,\mathcal{T}_A)\{x\}$ に対して

$$h_0(f(x)) := a_0 , \quad h_1(f(x)) := \sum_{n\geq 0} a_n$$

とおけばこれらは bounded morphisms.

4) $E(A,\mathcal{T}_A) := \mathrm{Ker}(h_0)$, $\Omega(A,\mathcal{T}_A) := \mathrm{Ker}(h_0) \cap \mathrm{Ker}(h_1)$ は $(A,\mathcal{T}_A)$ の subalgebra となり, $(A,\mathcal{T}_A)$ より induce された semi-norms によって, pro-Banach rings となる。$E(A,\mathcal{T}_A)$ を path ring, $\Omega(A,\mathcal{T}_A)$ を loop ring と呼ぶ。

5) 順々に, $(A,\mathcal{T}_A)\{x_1,\ldots,x_n\} := (A,\mathcal{T}_A)\{x_1,\ldots x_{n-1}\}\{x_n\}$ とおくと
$(A,\mathcal{T}_A)\{x_1,\ldots,x_n\} = \{f(x_1,\ldots,x_n) = \sum a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_1\cdots i_n} \in A, (\forall q\in\mathcal{T}_A) : \sum_{i_1,\ldots,i_n} q(a_{i_1\cdots i_n}) < \infty\}$
となっていて, $\|f(x_1\cdots x_n)\|_q := \sum_{i_1\cdots i_n} q(a_{i_1\cdots i_n})$ なる semi-norm を持つ pro-Banach ring となる。

6) $M_\infty(A,\mathcal{T}_A) := \{M = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid a_{ij}\in A, (\forall q\in\mathcal{T}_A)\ \sup_j \sum_{i\geq 0} q(a_{ij}) < +\infty\}$
は, $\|M\|_q := \sup_j \sum_{i\geq 0} q(a_{ij})$ なる semi-norm を持つ pro-Banach ring.

7) $M \in M_\infty(A,\mathcal{T}_A)$ が permutant
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $M =$ (無限交代行列) $\times$ (A の有限集合の元よりなる対角行列) の形.
とし.
$C(A,\mathcal{T}_A) := \{M \in M_\infty(A,\mathcal{T}_A) \mid M = \sum_{i\geq 0} M_i, M_i は permutant\}$
とおけば, $M_\infty(A,\mathcal{T}_A)$ の closed subalgebra となっており, A の cone と呼ばれる. ($C(A)$ の semi-norms $\|\ \|_q$ に関する completion.)

8) $M_n(A,\tau_A):=\{M=(a_{ij}),1\le i,j\le n \mid a_{ij}\in A, (\forall q\in\tau_A): \|M\|_q:=\sup_{i,j} q(a_{ij})<+\infty\}$
とおき，$M_n(A,\tau_A)\hookrightarrow M_{n+1}(A,\tau_A): M\mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる埋込みにより
$M(A,\tau_A):=\varinjlim_n M_n(A,\tau_A)$ とおき，$(A,\tau_A)^{\sim}:=\overline{M(A,\tau_A)}\subset M_\infty(A,\tau_A)$
を (A,τ_A) の <u>stabilized algebra</u> と呼ぶ。これは $C(A,\tau_A)$ の closed ideal.

9) Quotient algebra $S(A,\tau_A):=C(A,\tau_A)/(A,\tau_A)^{\sim}$ を (A,τ_A) の <u>suspension</u> と呼ぶ。

§3. Homotopy.

1) 二つの pro-Banach ring (A,τ_A), (B,τ_B) に対して，bounded morphisms $(A,\tau_A) \underset{\varphi_1}{\overset{\varphi_0}{\rightrightarrows}} (B,\tau_B)$ において，φ_0 と φ_1 とが <u>simply homotopic</u> とは
$(\exists\, \varphi:(A,\tau_A)\to(A,\tau_A)\{x\}$; bounded morphism) s.t. $h_0\cdot\varphi=\varphi_0$, $h_1\cdot\varphi=\varphi_1$
又は，$h_0\cdot\varphi=\varphi_1$, $h_1\cdot\varphi=\varphi_0$．但し $h_0(\sum a_n x^n):=a_0$，$h_1(\sum a_n x^n):=\sum a_n$．

2) さらに φ_0,φ_1 が <u>homotopic</u> とは $(\exists\, \psi_0,\psi_1,\dots,\psi_N:(A,\tau_A)\to(B,\tau_B)$: finite series of bounded morphisms): $\psi_0=\varphi_0$，$\psi_N=\varphi_1$，ψ_i と ψ_{i+1} とは simply-homotopic $\forall i=1,\dots,N-1$．

3) pro-Banach ring (A,τ_A) が <u>contractible</u> とは $1_A:(A,\tau_A)\to(A,\tau_A)$ が homotopic to zero と定義する。例えば path ring $E(A,\tau_A)$ は contractible.

4) pro-Banach ring (A,τ_A) に対して $(A^n,\tau_A^n)=(A,\tau_A)^n$ を考える。これは有限個の族であるから $(\bigoplus_n A,\bigoplus_n \tau_A)\simeq(\prod_n A,\prod_n \tau_A)$ で左辺は $(q^{\oplus n})(x):=\sum_{i=1}^n q(x_i)$，右辺は $(\Pi q)(x):=\sup_i q(x_i)$，$(x_1,\dots,x_n)\in A^n$ なる semi-norms を持つのであった。このとき，A-係数行列

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : (A,\tau_A)^n \to (A,\tau_A)^n \quad \in M_n(A,\tau_A)$$

に対して，その determinant $\det M \in A$ を考える．
(A,τ_A) が separated, complete であるから，

M が invertible $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A,\tau_A)) : \mathfrak{p}(\det M) \neq 0$

$GL_n(A) := \{ M = (a_{ij}) \in M_n(A,\tau_A) \mid a_{ij} \in A,\ M \text{ は invertible} \}$

とおくと
$$\begin{array}{ccc} M_n(A,\tau_A) & \xrightarrow{\det} & A \\ \cup & & \cup \\ GL_n(A) & \longrightarrow & \underset{(\text{open})}{A^*} := \{\text{invertibles}\} \end{array}$$
によって

$GL_n(A)$ に A より induce される convex topology を入れることができる。それは det を連続にする最弱位相．これを $GL_n(A,\tau_A)$ と書き，$GL_n(A,\tau_A) \hookrightarrow GL_{n+1}(A,\tau_A) : * \mapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって，

$GL(A,\tau_A) := \varinjlim_n GL_n(A,\tau_A)$ とおく．

§4. Serre fibration

1) Bounded morphism of pro-Banach rings $\varphi : (A,\tau_A) \to (B,\tau_B)$ が <u>Serre fibration</u> であるとは，$\forall n > 0$ に対して induced homo.

$$\varphi_* : GL((A,\tau_A)\{x_1 \cdots x_n\}) \longrightarrow GL((B,\tau_B)\{x_1 \cdots x_n\})$$

が次を満たす：$\forall \beta = \beta(x_1 \cdots x_n) \in GL((B,\tau_B)\{x_1 \cdots x_n\}) : \beta(0,\cdots,0) = 1$，に対して $(\exists \alpha = \alpha(x_1 \cdots x_n) \in GL((A,\tau_A)\{x_1 \cdots x_n\}))$: $\varphi_*(\alpha) = \beta$.

例えば path ring からの projection $pr : E(A,\tau_A) \to (A,\tau_A)$ は Serre fibration である．又 Serre fibrations の composition も Serre fibration である．

2) Serre fibration $\varphi : (A,\tau_A) \to (B,\tau_B)$ は surjective homo. である．

3) $\varphi:(A,\tau_A)\to(B,\tau_B)$ を Serre fibration, $u\in GL(A,\tau_A)$, $v=\varphi(u)$,
$\beta\in GL((B,\tau_B)\{x_1,\cdots x_n\})$ s.t. $\beta(0,\cdots,0)=v=\varphi(u)$ とする時,
$\exists\ \alpha\in GL((A,\tau_A)\{x_1,\cdots x_n\})$: $\varphi_*(\alpha)=\beta$, $\alpha(0,\cdots,0)=u$.

4) $\varphi:(A,\tau_A)\to(B,\tau_B)$ を Serre fibration とする時,
 i) $\tilde{\varphi}:(A,\tau_A)\{x\}\to(B,\tau_B)\{x\}$ は Serre fibration
 ii) $E\varphi: E(A,\tau_A)\longrightarrow E(B,\tau_B)$ は, 〃 .
 iii) $\Omega\varphi:\Omega(A,\tau_A)\to\Omega(B,\tau_B)$ は 〃 .

5) Serre fibration $\varphi:(A,\tau_A)\to(B,\tau_B)$ に対して fibre product

$$M(\varphi):=(A,\tau_A)\underset{(B,\tau_B)}{\times}((B,\tau_B)\{x\})$$

$$\begin{tikzcd} M(\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & (B,\tau_B)\{x\} \arrow[d, "m"] & \ni f(x) \arrow[d, mapsto] \\ (A,\tau_A) \arrow[r, "\varphi"'] & (B,\tau_B) & \ni f(0) \end{tikzcd}$$

を φ の <u>mapping cylinder</u> と呼ぶ。

$M(\varphi)$ は $(A,\tau_A)\times((B,\tau_B)\{x\})$ の subring で
 i) $\psi: M(\varphi)\to(B,\tau_B):(a,f(x))\mapsto f(1)$ は Serre fibration.
 ii) $p:M(\varphi)\to(A,\tau_A)$ は homotopy equivalence. その逆は
  $\iota:(A,\tau_A)\hookrightarrow M(\varphi):a\mapsto(a,\varphi(a))$ 但し $\varphi(a)$ は constant polynomial.

§5. fibration と cofibration

1) short exact sequence of pro-Banach rings

$$0\to(A',\tau_{A'})\longrightarrow(A,\tau_A)\xrightarrow{\varphi}(A'',\tau_{A''})\longrightarrow 0 \quad (*)$$

が <u>fibration</u> であるとは, φ が Serre fibration で, $\tau_{A'}$ が τ_A より induce されたものと equivalent であることとする。

2) epimorphism $\varphi:(A,\tau_A)\to(A'',\tau_{A''})$ が <u>strict</u> とは, $\tau_{A''}$ が

$(A,\tau_A)/\mathrm{Ker}(\varphi)$ の topology と equivalent であることとする時, short exact sequence (*) が <u>cofibration</u> であるとは, φ が strict で, $\tau_{A'}$ は τ_A より induce されたものと equivalent である事と定義する。

3) $0 \longrightarrow (A',\tau_{A'}) \longrightarrow (A,\tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'',\tau_{A''}) \longrightarrow 0$ が fibration なら

i) $0 \to E(A',\tau_{A'}) \to E(A,\tau_A) \xrightarrow{E\varphi} E(A'',\tau_{A''}) \to 0$ も fibration.

ii) $0 \to \Omega(A',\tau_{A'}) \to \Omega(A,\tau_A) \xrightarrow{\Omega\varphi} \Omega(A'',\tau_{A''}) \to 0$ 〃 .

4) $0 \longrightarrow (A',\tau_{A'}) \longrightarrow (A,\tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'',\tau_{A''}) \longrightarrow 0$ が cofibration なら

i) $0 \to E(A',\tau_{A'}) \to E(A,\tau_A) \xrightarrow{E\varphi} (A'',\tau_{A''}) \to 0$ も cofibration.

ii) $0 \to \Omega(A',\tau_{A'}) \to \Omega(A,\tau_A) \xrightarrow{\Omega\varphi} \Omega(A'',\tau_{A''}) \to 0$ 〃

iii) $0 \to C(A',\tau_{A'}) \to C(A,\tau_A) \xrightarrow{C\varphi} C(A'',\tau_{A''}) \to 0$ 〃

iv) $0 \to S(A',\tau_{A'}) \to S(A,\tau_A) \xrightarrow{S\varphi} S(A'',\tau_{A''}) \to 0$ 〃

§6. Admissible category

1) Full subcategory $\mathcal{C}$ of the category of pro-Banach rings (pro-Ban) が <u>possitively admissible</u> であるとは

i) $(A,\tau_A) \in Ob(\mathcal{C}) \implies E(A,\tau_A) \xrightarrow{pr} (A,\tau_A) \longrightarrow 0$ は $\mathcal{C}$ の diagram.

ii) $0 \longrightarrow (A',\tau_{A'}) \longrightarrow (A,\tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'',\tau_{A''}) \longrightarrow 0$ が fibration で

$(A,\tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'',\tau_{A''}) \to 0$ が $\mathcal{C}$ の diagram なら

$0 \to (A',\tau_{A'}) \longrightarrow (A,\tau_A)$ も $\mathcal{C}$ の diagram.

を満たすこと.

2) Full subcategory $\mathcal{C}$ of the category of pro-Banach rings (pro-Ban) が <u>negatively</u>

admissible であるとは、

i) $(A,\tau_A)\in Ob(\mathcal{C}) \Longrightarrow 0\to (A,\tau_A)^{\sim}\longrightarrow C(A,\tau_A)$ は $\mathcal{C}$ の diagram.

ii) $0\longrightarrow (A',\tau_{A'})\longrightarrow (A,\tau_A)\longrightarrow (A'',\tau_{A''})\longrightarrow 0$ は cofibration で、

$0\longrightarrow (A',\tau_{A'})\longrightarrow (A,\tau_A)$ が $\mathcal{C}$ の diagram ならば

$(A,\tau_A)\longrightarrow (A'',\tau_{A''})\longrightarrow 0$ も $\mathcal{C}$ の diagram

を満たすこととする。

§7. Positive analytic K-theory

1) $\mathcal{C}\subset$ (pro-Ban) を positively admissible category とする時、

$\mathcal{C}$ 上の analytic K-theory とは、family $(K_n^{KV}, \partial^{n+1})_{n\geq 0}$ で、

$K_n^{KV}:\mathcal{C}\longrightarrow$ (Abelian groups) は functors, 又、$\mathcal{C}$ の

任意の fibration $0\longrightarrow (A',\tau_{A'})\longrightarrow (A,\tau_A)\rightarrow (A'',\tau_{A''})\longrightarrow 0$ に対し

$\partial_\varphi^{n+1}: K_{n+1}^{KV}(A'',\tau_{A''})\longrightarrow K_n^{KV}(A',\tau_{A'})$ は abel 群の morphism で、

次を満たすものをいう：

i) ∂_φ^{n+1} は次の意味で functorial ;

$\mathcal{C}$ の任意の diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A',\tau_{A'}) \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (A,\tau_A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (A'',\tau_{A''}) \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 & (\text{fibration}) \\
0 \arrow[r] & (B',\tau_{B'}) \arrow[r] & (B,\tau_B) \arrow[r, "\psi"'] & (B'',\tau_{B''}) \arrow[r] & 0 & (\text{fibration})
\end{tikzcd}$$

に対して、

$$\begin{array}{ccc} K^{KV}_{n+1}(A'', \tau_{A''}) & \xrightarrow{\partial^{n+1}_{\varphi}} & K^{KV}_{n}(A', \tau_{A'}) \\ {\scriptstyle K^{KV}_{n+1}(f'')}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle K^{KV}_{n}(f')} \\ K^{KV}_{n+1}(B'', \tau_{B''}) & \xrightarrow{\partial^{n+1}_{\psi}} & K^{KV}_{n}(B', \tau_{B'}) \end{array}$$

ii) 任意の fibration $0 \longrightarrow (A', \tau_{A'}) \longrightarrow (A, \tau_A) \xrightarrow{\varphi} (A'', \tau_{A''}) \longrightarrow 0$

に対して long exact sequence of abelian groups

$$\cdots \longrightarrow K^{KV}_{n+1}(A', \tau_{A'}) \longrightarrow K^{KV}_{n+1}(A, \tau_A) \longrightarrow K^{KV}_{n+1}(A'', \tau_{A''}) \xrightarrow{\partial^{n+1}_{\varphi}} K^{KV}_{n}(A', \tau_{A'}) \longrightarrow \cdots$$

がある。

iii) $(A, \tau_A) \in Ob(\mathcal{C})$ が contractible $\Longrightarrow$ $K^{KV}_n(A, \tau_A) = 0$ for $n > 0$

2) pro-Banach ring (A, τ_A) に対して

$\alpha \in GL(A, \tau_A)$ が identity に homotopic $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists \alpha(x) \in GL((A, \tau_A)[x])) : \begin{cases} \alpha(0) = 1 \\ \alpha(1) = \alpha \end{cases}$

$\alpha, \beta \in GL(A, \tau_A)$ が homotopic $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}\beta$ が identity と homotopic

3) $GL^{\circ}(A, \tau_A) := \{ \alpha \in GL(A, \tau_A) \mid \alpha$ は homotopic to identity$\}$

とする時，$GL^{\circ}(A, \tau_A)$ は $GL(A, \tau_A)$ の subgroup となり，かつ

$[GL(A, \tau_A), GL(A, \tau_A)] \subset GL^{\circ}(A, \tau_A)$.

この時，$\pi_0(GL(A, \tau_A)) := GL(A, \tau_A) / GL^{\circ}(A, \tau_A)$ とおく.

4) $\mathcal{C} \subset$ (pro-Ban) を positively admissible category とする時，

$(A, \tau_A) \in Ob(\mathcal{C})$ に対して

$K^{KV}_n(A, \tau_A) := \pi_0(GL(\Omega^{n-1}(A, \tau_A))) \quad (n \geqq 1)$

$K^{KV}_0(A, \tau_A) := K_0(A, \tau_A)$ (普通の Grothendieck group)

とおけば，$(K^{KV}_n, \partial^{n+1})_{n \geqq 0}$ は，$\mathcal{C}$ 上の positive analytic K-theory となっている。

5) pro-Banach ring (A, τ_A) が <u>flabby</u> とは, projective convex (A, τ_A)-(left) bimodule of finite type (M, τ_M) が存在して, $(M, \tau_M) \oplus (A, \tau_A) \simeq (M, \tau_M)$ となることとする。例えば, Infinite dim. Hilbert space H に対して $End(H)$ は flabby.

6) Flabby な pro-Banach ring (A, τ_A) に対して $K_n^{KV}(A, \tau_A) = 0$, $n \geq 0$

7) (problem 1) $K_{n+1}^{KV}(S(A, \tau_A)) \simeq K_n^{KV}(A, \tau_A)$ $(n \geqq 0)$ か?

8) (problem 2) $K_n^{KV}(C(A, \tau_A)) = 0$ for $n \geqq 1$ か?

9) (problem 3) (periodicity) (A, τ_A) が pro-Banach $(\mathbb{C}, 1, 1)$-(resp. $(\mathbb{R}, 1, 1)$-) algebra の時,
$K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{i+2}^{KV}(A, \tau_A)$, (resp. $K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_{i+8}^{KV}(A, \tau_A)$) か?

10) (problem 4) (density) $(A, \tau_A), (B, \tau_B)$ を二つの Bornological $(\mathbb{C}, 1, 1)$-algebras, $\iota : (A, \tau_A) \hookrightarrow (B, \tau_B)$ を continuous injection で

i) $Im(\iota)$ is dense in (B, τ_B)

ii) $M_n(A, \tau_A)$ を ι によって $M_n(B, \tau_B)$ の sub algebra とみなせば,
$GL_n(A, \tau_A) = GL_n(B, \tau_B) \cap M_n(A, \tau_A)$ for $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ ι は isomorphism $K_i^{KV}(A, \tau_A) \simeq K_i^{KV}(B, \tau_B)$ を induce するか?

11) (problem 5) pro-Banach ring (A, τ_A) に対し $A = A^\delta$ によって discrete topology を備えた ring, $GL(A)$ により, discrete topology を備えた group とする時, classifying space 間の map

$$B_{GL(A)} \longrightarrow B_{GL(A, \tau_A)}$$

は　$K_i(A) \xrightarrow{\rho_i} K_i^{KV}(A,\tau_A)$　を引きおこす．但しここで $K_i(A) := {}_I K_i(\mathcal{P}_A) = \pi_i(K_0 A \times B_{GL^+(A)})$　$i \geqq 0$　とする．

このmorphismは $i=0$ に対しては同型であるが

$0 \to A_0^* \to K_1(A) \to K_1^{KV}(A,\tau_A) \to 0$

なる exact sequence があるか？　ここで $A_0^* := GL_1^\circ(A)$.

$\rho_2 : K_2(A) \longrightarrow K_2^{KV}(A,\tau_A)$　に対しては

$Im(\rho_2) = \pi_0(SL(\Omega(A,\tau_A)))$　か？

12) (problem 6) $f:(A,\tau_A) \to (B,\tau_B)$ を bounded morphism of pro-Banach rings とする時，relative K-group $K_i^{KV}(f)$ を構成せよ．

§8. Negative analytic K-theory

1) $\mathcal{C} \subset$ (pro-Ban) を negatively admissible category とする時，$\mathcal{C}$上の analytic K-theory とは family $(K_{-n}^{KV}, \partial^{-n})_{n\geq 0}$ で，

$K_{-n}^{KV} : \mathcal{C} \to$ (Abelian groups) は functors $(n \geq 0)$，$\mathcal{C}$の任意の cofibration $0 \to (A',\tau_{A'}) \xrightarrow{\varphi} (A,\tau_A) \to (A'',\tau_{A''}) \to 0$ に対して，$\partial_\varphi^{-n} : K_{-n}^{KV}(A'',\tau_{A''}) \longrightarrow K_{-n-1}^{KV}(A',\tau_{A'})$ は abel群の morphism で，次を満たすものをいう．

i) ∂_φ^{-n} は $\mathcal{C}$ の cofibration の category に関して functorial：

$\mathcal{C}$の任意の diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & (A',\tau_{A'}) & \xrightarrow{\varphi} & (A,\tau_A) & \to & (A'',\tau_{A''}) & \to 0 & \text{(cofibration)} \\
& \downarrow g' & \circlearrowleft & \downarrow g & \circlearrowleft & \downarrow g'' & & \\
0 \to & (B',\tau_{B'}) & \xrightarrow{\psi} & (B,\tau_B) & \to & (B'',\tau_{B''}) & \to 0 & \text{(cofibration)}
\end{array}$$

に対して
$$\begin{tikzcd} K^{KV}_{-n}(A'',\tau_{A''}) \arrow[r, "\partial^{-n}_{\varphi}"] \arrow[d, "K^{KV}_{-n}(g'')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K^{KV}_{-n-1}(A',\tau_{A'}) \arrow[d, "K^{KV}_{-n-1}(g')"] \\ K^{KV}_{-n}(B'',\tau_{B''}) \arrow[r, "\partial^{-n}_{\psi}"] & K^{KV}_{-n-1}(B',\tau_{B'}) \end{tikzcd}$$

ii) $\mathcal{C}$の任意のcofibration
$$0 \longrightarrow (A',\tau_{A'}) \xrightarrow{\varphi} (A,\tau_A) \longrightarrow (A'',\tau_{A''}) \longrightarrow 0$$
に対して次のlong exact sequenceがある。
$$\cdots\longrightarrow K^{KV}_{-n}(A',\tau_{A'}) \longrightarrow K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) \longrightarrow K^{KV}_{-n}(A'',\tau_{A''}) \xrightarrow{\partial^{-n}_{\varphi}} K^{KV}_{-n-1}(A',\tau_{A'}) \longrightarrow\cdots$$

iii) (A,τ_A)がflabby $\Rightarrow$ $K^{KV}_{-n}(A,\tau_A)=0$.

iv) $(A,\tau_A) \hookrightarrow (A,\tau_A)^{\sim}$ は $K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) \simeq K^{KV}_{-n}((A,\tilde{\tau}_A))$, $(n>0)$ をinduceする.

2) $\mathcal{C} \subset$ (pro-Ban) をnegatively admissible categoryとする時, $(A,\tau_A) \in Ob(\mathcal{C})$ に対して
$$K^{KV}_{0}(A,\tau_A) := K_0(A,\tau_A) \quad (\text{普通の Grothendieck group})$$
$$K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) := K_0(S^n(A,\tau_A))$$
とおけば, $(K^{KV}_{-n}, \partial^{-n})_{n\geq 0}$ は $\mathcal{C}$上のnegative analytic K-theoryとなっている.

3) (problem 7) (A,τ_A)をpro-Banach $(\mathbb{C},|.|)$-(resp $(\mathbb{R},|.|)$-) algebraとする時,
$$K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) \simeq K^{KV}_{-n-2}(A,\tau_A), \ (\text{resp. } K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) \simeq K^{KV}_{-n-8}(A,\tau_A))$$
となっているか?

4) (problem 8) pro-Banach ring (A,τ_A) に対して. $A=A_\sigma$ により

discrete topology の与えられた ring を表わすことにすれば

$$K^{KV}_{-n}(A_\delta) = K^{Bass}_{-n}(A) \qquad (n \geqq 0)$$

但し $K^{Bass}_{-n}(A) := \mathrm{Coker}(K^{Bass}_{-n+1}(A[t]) \oplus K^{Bass}_{-n+1}(A[t^{-1}]) \longrightarrow K^{Bass}_{-n+1}(A[t,t^{-1}])$

そこで.

$$K^{Bass}_{-n}(A,\tau_A) := \mathrm{Coker}\left[K^{Bass}_{-n+1}((A,\tau_A)\{t\}) \oplus K^{Bass}_{-n+1}((A,\tau_A)\{t^{-1}\}) \to K^{Bass}_{-n+1}((A,\tau_A)\{t,t^{-1}\})\right]$$

とおく時に

$$K^{KV}_{-n}(A,\tau_A) \simeq K^{Bass}_{-n}(A,\tau_A) \qquad (n \geqq 0)$$

となっているか? いずれにせよ. $S^n(A_\delta) \longrightarrow S^n(A,\tau_A)$

より $K^{Bass}_{-n}(A_\delta) \xrightarrow{\sigma_{-n}} K^{KV}_{-n}(A,\tau_A)$ が induce されるが.

この morphism を調べよ. 例えば, (A,τ_A) が pro-C^*-algebra

over $\mathbb{C}$ のとき

$$K^{Bass}_{-1}(A_\delta) \longrightarrow K^{KV}_{-1}(A,\tau_A) \longrightarrow 0$$

は exact か?

5) (problem 9) pro-Banach ring (A,τ_A) , i.e. $(A,\tau_A) \simeq \varprojlim_{q \in \tau_A} ({}_qA, q)$

に対して natural exact sequence

$$0 \longrightarrow \varprojlim^{(1)}_{q\in\tau_A} K^{KV}_{n+1}({}_qA,q) \longrightarrow K^{KV}_n(A,\tau_A) \longrightarrow \varprojlim_{q\in\tau_A} K^{KV}_n({}_qA,q) \longrightarrow 0$$

$(n \in \mathbb{Z})$ があるか? 但し. $\varprojlim^{(1)}$ は functor $\varprojlim$ の 1st

derived functor.

6) (problem 10) $(K^{KV}_n({}_qA,q))_{q\in\tau_A}$ がいつ Mittag-Leffler's condition

を満たし, $\varprojlim^{(1)}_{q\in\tau_A} K^{KV}_n({}_qA,q) = 0$ となるか?

7) (problem 11) Exact category $\mathcal{M}$ に対して analytic K-theory を作れ。

References

[1] Springer Lecture Notes in Math. No76, 136, 341, 342, 343, 551, 575, 725

[2] Arens, R.F ; The group of invertible elements of a commutative Banachalegbras, Studia Math.(Ser. Specjalna) Zeszyt 1 (1963) 21-23

[3] Bass, H ; Algebraic K-theory, Benjamin, 1968

[4] Forster, O ; Functiontheoretische Hilfsmittel im der Theorie der Kommutativeu Bauach-Algebren, Jber. Deutsch, Math. verein. 76 (1974) 1-17

[5] Karoubi-Villamayor ; K-théorie algebrique et K-théorie topologique I, II, Math. Scand. 28 (1971) 265-307, 32 (1973) 57-86

[6] Loday, J.L ; K-théorie algébrique et Representations de groupes. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e. t.9 (1976) 309-377

[7] Milnor, J ; Introduction to algebraic K-theory, princeton.

[8] Royden. H.L ; Function algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 281-298

[9] Saito, K ; Convex rings and analytic schemes (修士論文)

[10] Taylor, J.L ; Topological invariants of the maximal idel space of a Banach algebra, Advances in Math, 19 (1976) 146-206

[11] Wagoner. J ; Delooping Classifying spaces in Algebraic K-theory. Topology vol. 11 (1972) 349-370

その他, alg. K-theory に関する論文は多数ある. [1] No341, 551 が基本的.