数理解析研究所講究録
387巻 1980年 1-16

コムパクト Kähler 多様体の偏極族のモヂュライ空間

京大 数理研　藤木 明

1. コムパクトな C^∞ 多様体 X で (実)次元が偶数 $2n$ であるものを固定する。$\mathcal{C}(X)$ で X を underlying な C^∞ 多様体に持つようなコムパクト複素多様体の全体を，$M(X)$ で，$\mathcal{C}(X)$ に属するコムパクト複素多様体の複素解析的同値類を表す。

問題：$M(X)$ に自然な (Hausdorff) 複素空間の構造がはいるか？

但しここで'自然な'は次の意味に解釈する。

イ) $f: \mathcal{X} \to S$ を固有 かつsmoothな 正則写像で，$\mathcal{X}_s := f^{-1}(s)$ が $\mathcal{C}(X)$ に属するものとする時，$s \in S$ に対し $\mathcal{X}_s$ の同値類を対応させて得られる自然写像 $\rho = \rho_f: S \to M(X)$ は正則。

ロ) イ)を満たす複素構造の中で maximal, i.e., $M(X)'$ を $M(X)$ にイ)を満たす別の複素構造を入れたものとすると，恒等写像 $M(X) \to M(X)'$ は正則。

ロ)より自然な複素構造はもし存在すれば一意的である。

2. 上のような定式化のもとでは上記の問題は一般には

否定的である。

あ) <u>複素構造の jumping.</u> $f : \mathcal{X} \to D = \{s \in \mathbb{C} ;\ |s| < 1\}$ を固有かつsmoothな正則写像で $\mathcal{X}_s \cong \mathcal{X}_{s'}$, $s, s' \neq 0$; $\mathcal{X}_s \not\cong \mathcal{X}_0$, $s \neq 0$, なるものとする。もし $\mathcal{X}_s \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ なら自然写像 ρ_f $D \to \mathcal{M}(\mathcal{X})$ に関し，$\rho_f(D') =$ 1点 $\neq \rho_f(0)$, $D' = D - \{0\}$, となり $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ は $\rho_f(0)$ の近傍で複素(空間の)構造を持ち得ない。

例としては $\mathcal{X}_0$ が, ruled, あるいは Hopf の場合が知られている (cf. [10] [11])

一般に jumping がおこる $\mathcal{X}_0$ は何か？という問題に関して次の事実に注意しておく.

jumping $\longrightarrow$ $\dim \mathrm{Aut}\,\mathcal{X}_s < \dim \mathrm{Aut}\,\mathcal{X}_0$, $s \neq 0$, 特に $\dim \mathrm{Aut}\,\mathcal{X}_0 > 0$ ([8, Prop. 5.6]). 従って $\mathcal{X}_0$ が Kähler なら $\mathcal{X}_0$ は i) ruled か ii) $\mathrm{Aut}_0\,\mathcal{X}_0$ は複素トーラス (従って $\mathcal{X}_0$ は正則 Seifert fibering 空間 cf. [18]). (cf. [4]). 但し ii) の場合の jumping の例で i) に属さぬものの例を筆者は知らない。ここで $\mathrm{Aut}\,Y$ は一般に Y の双正則自己同形群のなす複素 Lie 群 (Y compact), $\mathrm{Aut}_0\,Y$ はその$\{e\}$の連結成分を表わす. また, ruled とは代数幾何では $\mathbb{P}^1 \times Z$ の形の多様体と双有理な多様体をさすのであるが一般の複素多様体に対しては次のように定義する.

<u>定義</u> X をコムパクト複素多様体とする. この時 X が <u>ruled</u> であるとは, あるコムパクト複素多様体 Z と Z 上の正則ベク

トル束 $E \to Z$ が存在し X が E に同伴な射影バンドル $\mathbb{P}(E) := E - \{0\}/\mathbb{C}^*$ と双有理形 (bimeromorphic) になる時をいう。 但し E の階数 > 1 とする。

い) <u>極限の非一意性</u>。 $f_i : \mathcal{X}_i \to D$, $i = 1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像で, $\mathcal{X}_{1s} \cong \mathcal{X}_{2s}$, $s \neq 0$, $\mathcal{X}_{10} \not\cong \mathcal{X}_{20}$ なるものとする。この時, $M(\mathfrak{X})$ は点 $\rho_{f_i}(0)$ において Hausdorff でない。つまり $(\rho_{f_1}(0), \rho_{f_2}(0)) \in M(\mathfrak{X}) \times M(\mathfrak{X})$ は対角集合 $\Delta \subseteq M(\mathfrak{X}) \times M(\mathfrak{X})$ の閉包に含まれるが Δ 自身には含まれない。 jumping はこの特別の場合とみなしうることに注意する。実際 f_1 として(あ)の f を f_2 としては自然写像 $\mathcal{X}_s \times D \to D$, $s \neq 0$, をとればよい。 従って(い)の例として $\mathcal{X}_0$: ruled, Hopf なるものが存在することになる。また $\mathcal{X}_0$ が $\mathbb{P}(E)$ の形の時は 'elementary transformation' を用いて(あ)に属さない(い)の例が比較的簡単に構成できる例がある。 jumping と異り, $\mathcal{X}_0$ が general type の Moishezon 多様体でも(い)の現象がおこる例がある。cf.[15, 最後の例]

う) <u>無限自己同形群</u> compact 複素多様体 X に対し $\overline{\mathrm{Aut}}\, X = \mathrm{Aut}\, X / \mathrm{Aut}_0 X$ とおく。 一般に $\# \overline{\mathrm{Aut}}\, X = \infty$ の時は X に対応する点で $M(\mathfrak{X})$ は複素構造を持たない。(例えば) X が複素トーラス, K3 曲面の時にこのような現象が生じる。 今, 簡単のため $\mathrm{Aut}_0 X = \{e\}$ とすると, X の Kuranishi 族 $f : \mathcal{X} \to S$, $\mathcal{X}_0 \cong X$ (fixed isomorphism) $0 \in S$, において $\mathrm{Aut}\, X \cong \mathrm{Aut}\, \mathcal{X}$ (但し右辺は $\mathcal{X}_0$ に沿う

germとして，x_0をx_0にうつす$\mathfrak{X}$の自己同形群を考えたもの）であり[17]，これと自然準同形 $\alpha: \mathrm{Aut}\,\mathfrak{X} \to \mathrm{Aut}\,S$ を合成して $\beta: \mathrm{Aut}\,X \to \mathrm{Aut}\,S$ を得る。$\#\mathrm{Aut}\,X=\infty$ の時，β の像 H に対しても一般に $\#H=\infty$ であり，自然写像 $\rho_f: S \to \mathcal{M}(X)$ は S/H を経由することと合わせて最初に述べた事実が得られる。

<u>注</u> $\#\overline{\mathrm{Aut}}\,X=\infty$ を回避する方法として rigidification という考え方がある．すなわち X と X 上の代数的な構造，例えばコホモロジー群 $H^i(X,\mathbb{Z})$，の対 $(X, H^i(X,\mathbb{Z}))$ を考えると $\overline{\mathrm{Aut}}(X, H^i(X,\mathbb{Z})) < +\infty$ になる場合がある。複素トーラス，K-3曲面の時は，$i=2$ ととれば，$\overline{\mathrm{Aut}}(X, H^2)=\{e\}$ となることも知られている．さらにこれらを用いてこれらの対全体に自然な複素多様体の構造がはいることが示されている．（K-3曲面に対しては[1]参照，また rigidification の統一的な取り扱いについては[9, exposé 7]）

3. 以後我々はコンパクト Kähler 多様体のみを主な考察の対象とする．

<u>定義</u> <u>偏極 Kähler 多様体</u>とは，compact 複素多様体 X と X 上の Kähler 類 $\omega \in H^2(X,\mathbb{R})$ の対である。2つの偏極 Kähler 多様体 (X,ω) と (X',ω') が<u>同値</u>であるとは，$f: X \to X'$ なる双正則写像が存在し $f^*\omega'=\omega$ となることとする．

$\mathcal{M}(\mathfrak{X})_\omega$ で (X, ω), $X \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$, の同値類の集合を表す。

定義　コムパクトKähler多様体の偏極族とは，properかつsmoothな正則写像 $f: \mathcal{X} \to S$ と，元 $\tilde{\omega} \in \Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R})$ の対 $(f, \tilde{\omega})$ である*)。2つの偏極族 $(f, \tilde{\omega})$ と $(f', \tilde{\omega}')$ が同値とは双正則写像 $g: \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$，で $f = f' g$，$(f': \mathcal{X}' \to S)$，かつ $g^* \tilde{\omega}' = \tilde{\omega}$ となるものが存在する時をいう。*) さらに各 $s \in S$ に対し $\tilde{\omega}$ の誘導する類 $\tilde{\omega}_s \in H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{R})$ がKähler類であることを仮定する。

今 $(f, \tilde{\omega})$，$f: \mathcal{X} \to S$，をKähler多様体の偏極族とする時，各 s に対し，対 $(\mathcal{X}_s, \tilde{\omega}_s)$ の属する同値類を対応させることにより自然写像 $\rho_{(f,\tilde{\omega})}: S \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{X})_\omega$ が得られる。(但し $\mathcal{X}_s \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$ と仮定する)．

定義　$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{X})_\omega$ 部分集合とする。$\mathcal{F}$ に自然な複素(空間の)構造が入るとは次の2条件が満たされる(ような複素構造が $\mathcal{F}$ に入る)時をいう。

i) 任意の上のような対 $(f, \tilde{\omega})$ に対し，$\rho_{(f,\tilde{\omega})}(S) \subseteq \mathcal{F}$ なら．$\rho_{(f,\tilde{\omega})}: S \longrightarrow \mathcal{F}$ は正則。　ii)　i) をみたす複素構造の中で最大 (1. 参照)．

主定理の前に次の定義が必要である．

定義　X をコムパクト複素多様体とする。X が *quasi-ruled* とは，コムパクト複素多様体 Z，正則ベクトル束 $E \to Z$，(階数 $E > 1$) と $\overbrace{\text{有理形}}^{\text{上への}}$ 写像 $\lambda: \mathbb{P}(E) \to X$ で Z を経由しないものが存在する時をいう。

$R = \{(X, \omega) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})_\omega ;\ X : \text{ruled}\}$
$QR = \{(X, \omega) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})_\omega ;\ X : \text{quasi-ruled}\}$, とおく。

定理 1) $M(\mathcal{X})_\omega - QR$ に自然な Hausdorff 複素構造がはいる。
2) $^\exists B \subseteq R$, 部分集合で, $M(\mathcal{X})_\omega - B$ 上に自然な複素構造がはいる。

系 $f : \mathcal{X} \to D$ がコムパクト Kähler 多様体の偏極族から来ている時, もし f が複素構造の jumping を与えるなら (cf. 2.(あ)) $\mathcal{X}_0$ は ruled である。

注 一般に $M(\mathcal{X})_\omega$ には, 複素構造のあるなしに拘らず, 自然な位相が導入できる。この位相に関し QR は $M(\mathcal{X})_\omega$ の連結成分の和集合になっている。また自然写像 $\rho_{(f,\bar\omega)}$ は常に連続である。後者は次節における位相の定義から従う。前者は, これと次の定理よりの帰結である。

定理[6] $(f, \bar\omega) = (f : \mathcal{X} \to S, \bar\omega)$ を Kähler 多様体の偏極族とする。S は連結かつ, $\mathcal{X}_0$ が quasi-ruled, $0 \in S$, とする。この時任意の $s \in S$ に対し $\mathcal{X}_s$ は quasi-ruled. すなわち quasi-ruled の変形は quasi-ruled である。

さて以下で定理の証明をいくつかの特殊な定理に帰着させる方法を述べる。

4. $X \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ に対し X の同値類を対応させる自然写像を

$\pi: \mathcal{C}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X})$ で表す。さらに $\mathcal{AC}(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ 上の概複素構造の全体を表わそう。T を $\mathcal{X}$ の接束とする時，$\mathcal{X}$ 上の概複素構造とは，C^∞ ベクトル束 $\mathrm{End}\,T$ の $\mathcal{X}$ 上の切断 σ で $\sigma^2 = -(\mathrm{identity})$ を満たすものに他ならない。考えを明確にするため σ としては C^∞ なもののみ考えることにする：$\mathcal{AC}(\mathcal{X}) = \{\sigma \in \Gamma_\infty(\mathcal{X}, \mathrm{End}\,T);\ \sigma^2 = -id_T\}$

さて $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ の元をより正確に，複素多様体 X と C^∞-diffeomorphism $\varphi: \mathcal{X} \to X$ の対と考えよう。すると $(X, \varphi) \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ に対し，X の定める概複素構造を φ で $\mathcal{X}$ へうつしたものを対応させることにより，自然な inclusion $\mathcal{C}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{AC}(\mathcal{X})$ が得られる。但し対 (X, φ) と (X', φ') は双正則写像 $h: X \to X'$ が存在して $h\varphi = \varphi'$ となる時 $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ の同じ元を定めると考えている。

さてここでは詳しく述べないが $\mathcal{AC}(\mathcal{X})$ には自然な位相が導入される。([2][12] 参照，但し位相は一意的ではない) $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ に $\mathcal{AC}(\mathcal{X})$ の部分空間としての位相，さらに $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ には $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ から π により誘導される等化位相をいれる。この位相を $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ の自然位相と呼ぼう。実際 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ は上記のような $\mathcal{AC}(\mathcal{X})$ の位相のとり方によらず一意的に上の方法で位相が定まることが示される。(5. の補題参照)

一方 π は次のように解釈される。$\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の diffeomorphism 群とすると $\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ は自然に集合 $\mathcal{AC}(\mathcal{X})$ に作用しその作用で $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ は不変である。すなわち $\psi \in \mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ に対し $\sigma \cdot \psi$ は標準同形

$\varphi^*\mathrm{End}\,T \cong \mathrm{End}\,T$ により $\mathrm{End}\,T$ の切断とみなされる。($\alpha \in \mathcal{A}\ell(\mathcal{X})$)
作用の定義よりただちに

<u>補題</u>　i) $M(\mathcal{X}) = \mathcal{C}(\mathcal{X})/\mathrm{Diff}(\mathcal{X})$　ii) $X=(\mathcal{X},\alpha) \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ に対し $\pi^{-1}\pi(\mathcal{X},\alpha) \cong \mathrm{Diff}\,\mathcal{X}/\mathrm{Aut}\,X$.

従って π は群による商空間への軌道(orbit)写像であり，各点の isotropy 群が複素解析的な自己同形群になることがわかる。

5. 補題の i) を考慮して 1. でのべた問題を一般化する。3. でのべた偏極族による定式化は一般化された問題の特殊な場合であることが従う。

まず $\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ の部分群 G で $G \supseteq \mathrm{Diff}^0\mathcal{X}$ なるものを固定する。ここに $\mathrm{Diff}^0\mathcal{X}$ は $\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ の適当な位相に関する e の連結成分を表わす。$M(\mathcal{X},G) = \mathcal{C}(\mathcal{X})/G$ とおく。従って $(X,\varphi) \sim (X',\varphi')$ in $M(\mathcal{X},G) \longleftrightarrow {}^{\exists}h: X \to X'$ なる正則同形 s.t. $\varphi'^{-1}h\varphi \in G$，である。

<u>定義</u>　G-族(複素多様体の)とは，proper かつ smooth な正則写像 $f: \mathfrak{X} \to S$ で $\mathfrak{X}_s \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $s \in S$, なるものと，C^∞-ファイバー束としての f の構造群の G への reduction μ の対 (f,μ) である。対 (f,μ) と (f',μ') が同形とは，双正則同形 $g: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ で，$f'g = f$ となりまた g が μ, μ' により定められた G-ファイバー束としての同形を与えているようなものが存在する時をいう。

定義より (f,μ) が G-族であれば各 s に対し $\mathfrak{X}_s$ の G-同値類が自

然に定まり，Sにこれを対応させることにより自然写像 $\rho_{(f,\mu)}$:
$S \longrightarrow M(\mathcal{X},G)$ が定まる。

<u>定義</u> $M(\mathcal{X},G)$ に自然な複素構造がはいるとは次の条件をみたす複素構造が $M(\mathcal{X},G)$ にはいる時をいう。

i) 上のような任意の (f,μ) に対し自然写像 $\rho_{(f,\mu)}$ は正則.

ii) i)を満たす複素構造の中で最大。

さらに一般に $\mathfrak{F}$ が $M(\mathcal{X},G)$ の部分集合である場合，$\mathfrak{F}$ に自然な複素構造がはいるということが同様にして定義される.（i)において (f,μ) を $\rho_{(f,\mu)}(S) \subseteq \mathfrak{F}$ なるものに話を限る.)

<u>Gの例.</u> イ) A を $\mathcal{X}$ の任意の代数構造とする。たとえば $A = \pi_1(\mathcal{X})$,（基本群) $H^*(\mathcal{X})$ 等々. この時 $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Diff}\,\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Aut}(A))$ とおく。この場合 $M(\mathcal{X},G) = \{(X, A_X)\}/\sim$, ここで $(X,A_X)\sim(X',A_{X'})$ とは $\exists$ 双正則同形 $h: X \longrightarrow X'$ s.t. $h^*A_{X'} = A_X$ (or $h_*A_X = A_{X'}$) を意味する。

ロ) $\omega \in H^2(\mathcal{X},\mathbb{R})$ を固定し，$G = G_\omega = \{g \in \mathrm{Diff}\,\mathcal{X};\ g^*\omega = \omega\}$ とする.
この時 $M(\mathcal{X},G) = \{(X,\omega_X);\ \omega_X \in H^2(X,\mathbb{R})\}/\sim$,（同値類は 3. の定義と同様の意味）となる。

今,部分集合 $\mathfrak{F} \subseteq M(\mathcal{X},G)$ を固定する. G-族 (f,μ) において $\rho_{(f,\mu)}(S) \subseteq \mathfrak{F}$, $(f: \mathcal{X} \longrightarrow S)$, となる時, (f,μ) を $\mathfrak{F}$-族ということにする.

G を上の例の G_{ω} とし $\mathfrak{F}=\{(X,\omega_X);\ \omega_X:\text{Kähler class}\}$ とすると，$\mathfrak{F}$ 族とは，コムパクト Kähler 多様体の偏極族（3. 定義）に他ならない。

6. $\mathfrak{F}\subseteq M(\mathcal{X},G)$, $G\subseteq \mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$, を固定する。

定義　$\mathfrak{F}$ が analytic $\longleftrightarrow$ 任意の G-族 $(\mathfrak{f},\mu)$ に対し $S_{\mathfrak{F}}:=\rho^{-1}_{(\mathfrak{f},\mu)}(\mathfrak{F})$ は S 内の解析的部分集合。

一般に $\rho_{(\mathfrak{f},\mu)}|_{S_{\mathfrak{F}}}: S_{\mathfrak{F}}\to\mathfrak{F}$ を $\bar{\rho}_{(\mathfrak{f},\mu)}$ と書く。以後 $\mathfrak{F}$ は analytic と仮定する。さて $X\in\pi_G^{-1}(\mathfrak{F})\subseteq\mathcal{C}(\mathcal{X})$ を固定する。ここに $\pi_G:\mathcal{C}(\mathcal{X})\to M(\mathcal{X},G)$ は自然な射影。$\mathfrak{f}:\mathfrak{X}\to S$, $\mathfrak{X}_0\cong X$, $0\in S$, を（被約）Kuranishi 族とする。$\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}\subset G$ により $\mathfrak{f}$ は自然に G 族 $(\mathfrak{f},\mu)$ となる。従って $S_{\mathfrak{F}}\subseteq S$ が定義され仮定によりこれは解析的部分集合である。

補題　1) $\bar{\rho}_{(\mathfrak{f},\mu)}: S_{\mathfrak{F}}\to\mathfrak{F}$ は開写像，2) $\bar{\rho}^{-1}_{(\mathfrak{f},\mu)}(\bar{\rho}_{(\mathfrak{f},\mu)}(0))=\{0\}$.

実際 1) は Kuranishi 族の構成 [12] からただちに従う。2) については [13] を参照。もっとも 2) は versality の開性から形式的にも従う。

系　$R_{\mathfrak{F}}=\{(s_1,s_2)\in S_{\mathfrak{F}}\times S_{\mathfrak{F}};\ \mathfrak{X}_{s_1}\cong\mathfrak{X}_{s_2}: G\text{-同形}\}$ とおくと $R_{\mathfrak{F}}$ は $S_{\mathfrak{F}}$ 上の同値関係であるが，次が成立する。$\bar{0}=\bar{\rho}_{(\mathfrak{f},\mu)}(0)\in\mathfrak{F}$ とおく。すると $\bar{0}$ の近傍 U が存在して $U=S_{\mathfrak{F}}/R_{\mathfrak{F}}$ となる。

<u>命題</u>　$\mathfrak{F}$が自然な複素構造を持つ $\longleftrightarrow$ 任意の $X\in\pi_G^{-1}(\mathfrak{F})$ に対し，対応する Kuranishi 族において $R_{\mathfrak{F}}$ は $S_{\mathfrak{F}}\times S_{\mathfrak{F}}$ の解析的部分集合．

$\longrightarrow$ は'自然な複素構造'の定義よりただちに従う．$\longleftarrow$ は，まず $R_{\mathfrak{F}}$ が解析的であると，上記補題の 2) より $R_{\mathfrak{F}}$ の定義する同値関係は有限かつ固有になることがわかる．よって $S/R_{\mathfrak{F}}$ に自然な複素構造を導入しうる．Kuranishi 族の versality の開性と合わせて $\mathfrak{F}$ に自然な複素構造がはいることがわかる．(上の系参照)

これまで得られたことをまとめると次のようになる．

<u>命題</u>　$\mathfrak{F}\subsetneqq M(\mathcal{X},G)$ とする。$\mathfrak{F}$ が自然な複素構造を持つためには，1) $\mathfrak{F}$ が analytic で，任意の $X\in\pi_G^{-1}(\mathfrak{F})$ に対し $R_{\mathfrak{F}}$ が解析的であればよい。さらに$\underbrace{\mathfrak{F}}^{\text{この時}}$が Hausdorff であるための必要十分条件は，「3) $(f_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow S_i, \mu_i)$ $(i=1,2)$ を $\mathfrak{F}$-族とする。$\{s_k^i\}$ を S_i の点列 $(k=1,2,\cdots)$ で s_0^i に収束するものとし，$\mathcal{X}_{s_k^1}\cong\mathcal{X}_{s_k^2}$，G-同形，が任意の k に関し成立するものとする。この時常に ${}^{\exists}$G-同形 $\mathcal{X}_{s_0^1}\cong\mathcal{X}_{s_0^2}$」が成立することである。

<u>7</u>　$G=G_\omega$，$\omega\in H^2(\mathcal{X},\mathbb{R})$ を <u>5</u> 例の通りとする。$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_\omega^0=\{(X,\varphi)\in M(\mathcal{X},G)\,;\ \omega_X$ Kähler class on X, X : not quasi-ruled$\}$ とする。<u>5</u> の最後の注意により定理の 1) のためには $\mathfrak{F}$ に自然な複素構造がはいることを示せばよい。　上の命題を考慮するとまず

示すべきことは：

命題　$\mathfrak{F}$ は analytic.

事実そのものは、implicit には知られている（[16, Chap. IX] 参照.）ここでは、$X \in \mathcal{M}_G(\mathfrak{F})$ に対し Kuranishi 族（但し被約）$f: \mathcal{X} \to S$, $X \simeq \mathcal{X}_0$, $0 \in S$, をとる時 $S_{\mathfrak{F}}$ をどのように定義するかということのみ述べる. $\omega_X \in H^2(X, \mathbb{R})$ を標準類とすると $R^2 f_* \mathbb{R}$ は定数層であるから一意的に切断 $\tilde{\omega} \in \Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R})$ が定まり $\tilde{\omega}_0 = \omega_X$ となる。$\mathbb{R} = \mathbb{R}_X \to \mathcal{O}_X$（自然な包含写像）により誘導される写像 $\Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R}) \to \Gamma(S, R^2 f_* \mathcal{O}_X)$ による $\tilde{\omega}$ の像を $\tilde{\omega}'$ とする。この時、$S_{\mathfrak{F}} = \{ s \in S \,;\, \tilde{\omega}'(s) = 0 \}$ である。言いかえれば $S_{\mathfrak{F}}$ は $\tilde{\omega}_s$ が $\mathcal{X}_s$ 上 (1,1) 型になるような点 s の集合に他ならない。

5 の最後の命題の 2) と 3) は同じ 1 つの定理からの帰結である。まず記号の準備をする。

a). $f_i : \mathcal{X}_i \to S$, $i = 1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像とする。この時複素空間 $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ と正則写像 $p: \mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \to S$ が存在し次の性質をみたす。各 $h \in \mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $s = p(h)$ に対し、同形 $h : \mathcal{X}_{1s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_{2s}$（同じ文字 h で表わす）が対応し、この対応は'正則'、かつ任意の同形 $\mathcal{X}_{1s} \simeq \mathcal{X}_{2s}$, $s \in S$, は上の形に表わされる。さらに f_i がともに G-族の場合 G-同形全体の部分集合を $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)_G \subseteq \mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ と表す。$G \supseteq \mathrm{Diff}\, X$ より $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)_G$ は $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の連結成分の和集合であることがわかる。（$\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ については [17] 参照）

b) $g: \mathcal{Y} \to S$ を固有正則写像とする. $\gamma: D_{\mathcal{Y}/S} \longrightarrow S$ を g に同伴な相対 Douady 空間とする. 従って $d \in D_{\mathcal{Y}/S}$ には $\mathcal{Y}_s$, $s = \gamma(d)$, の部分空間 Z_d が対応するわけである (cf. [5]).

c) a) において $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 \times_S \mathcal{X}_2$, $g: \mathcal{Y} \to S$ を自然写像とする. この時 $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ は各 h に対しその graph $\Gamma_h \subseteq \mathcal{Y}_{\beta(h)} \cong \mathcal{X}_{1\beta(h)} \times \mathcal{X}_{2\beta(h)}$ を対応させることにより自然に $D_{\mathcal{Y}/S}$ の部分空間とみなされる。実際 $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \subseteq D_{\mathcal{Y}/S}$ は Zariski open, である. また f_i が G-族の時は a) の最後の注意により $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)_G$ も $D_{\mathcal{Y}/S}$ 内で Zariski 開集合となる。

さて上の記号で, 次が示せる。

<u>定理</u> $f_i: \mathcal{X}_i \to \underbrace{S}_{i=1,2}$ を $\mathcal{F}$-族とする。この時 $\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)_G$ は S 上固有である。

<u>系</u> $S_0 = \{ s \in S ;\ \mathcal{X}_{1s} \cong \mathcal{X}_{2s}\ G\text{-同形} \}$ とおくと S_0 は S 内で解析的.

実際 $S_0 = \beta(\mathrm{Isom}_S(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)_G)$ であり系は Remmert により従う.

上の定理から上に述べた 2) 3) がどのようにしてでるかをみておく。

2) $\tilde{S}_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathcal{F}}$, $P_i: S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathcal{F}} \to S_{\mathcal{F}}$ を各々第 i 成分への射影とする ($i = 1, 2$). $\tilde{f}_i: \tilde{\mathcal{X}}_i \to \tilde{S}_{\mathcal{F}}$ を, $f_{\mathcal{F}}: \mathcal{X}_{S_{\mathcal{F}}} \to S_{\mathcal{F}}$ を P_i により引き上げた族とする。ここに $f_{\mathcal{F}}$ は Kuranishi 族を $S_{\mathcal{F}}$ へ制限したもの.

$\tilde{f}_i$ は子-族であるから系により $\tilde{S}_1 := \{(s_1, s_2) ; \mathfrak{X}_{s_1} \cong \mathfrak{X}_{s_2}$ G-同形$\} =$ R_f は解析的である。

3) $f_i : \mathfrak{X}_i \to S_i$, $i = 1, 2$, を 3) の条件の如くとする。$S = S_1 \times S_2$, $p_i : S \to S_i$ を射影とする。$\tilde{f}_i : \tilde{\mathfrak{X}}_i \to S$ を p_i により f_i を S に引き上げて得られる子-族とする。系により $S_1 = \{(s_1, s_2) ; \mathfrak{X}_{s_1} \cong \mathfrak{X}_{2 s_2} : G$-同形$\}$ は解析的，特に S_1 は S の閉集合である。従って $(s_k^1, s_k^2) \in S_1$ より $(s_0^1, s_0^2) \in S_1$ が従う。

さて定理は次の2つの定理からの容易な結論である。

<u>定理 A.</u> $\mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)_G^-$ を $D_{Y/S}$（上の c) の記号）内での $\mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)_G$ の閉包とする。この時 $\mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)_G^-$ は S 上固有である。

<u>定理 B</u>（松阪-Mumford の定理 [4, Theorem 2] のケーラー analogue）

$f_i : \mathfrak{X}_i \longrightarrow D = \{|t| < 1\}$, $i = 1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像とする。$\mathfrak{X}_i$ は Kähler で $\omega_i \in H^2(\mathfrak{X}_i, \mathbb{R})$ を対応する Kähler 類とする。今 $\Phi : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ なる D 上の双有理形写像で，$D' = D - \{0\}$ 上では $\mathfrak{X}_i' = f_i^{-1}(D')$ の間の同形を与えるものが存在するとする。この時さらに（$\mathfrak{X}_{10}$ が ruled でなく）$s \in D'$ に対し $\Phi_s^* \omega_{2s} = \omega_{1s}$ となるならば Φ は同形である。

ここに $\Phi_s : \mathfrak{X}_{1s} \to \mathfrak{X}_{2s}$ は Φ の誘導する同形，$\omega_{is} \in H^2(\mathfrak{X}_{is}, \mathbb{R})$ は ω_i により誘導される $\mathfrak{X}_{is}$ 上の Kähler 類。

定理 B は [5] において，Kähler 多様体の双有理形写像に関する一定理の応用として示された。定理 A は $h \in \mathrm{Isom}_S(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)_G$ の元に対応する $Y_{r(h)} = \mathfrak{X}_{1 r(h)} \times \mathfrak{X}_{2 r(h)}$ の部分空間つまり h のグラフ

の体積が t によらず不変なことと[3]の結果(命題2.10, 4.11)から導かれる。以上の詳細については[7]を参照されたい。

文献

1. Burns, D., and Rapoport, M., On the Torelli problem for kählerian K-3 surfaces, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 8 (1975), 235-274
2. Douady, A., Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/65
3. Fujiki, A., Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 14 (1978), 1-52
4. Fujiki, A., On automorphism groups of compact Kähler manifolds, Inventiones math. 44 (1978), 225-258
5. Fujiki, A., A theorem on bimeromorphic maps of Kähler manifolds, to appear
6. Fujiki, A., On deformation of ruled varieties. to appear
7. Fujiki, A., Coarse moduli for polarized family of compact Kähler manifolds, to appear.
8. Griffiths, Ph. A., Extension problem in complex analysis, In complex analysis in Minneapolis, 113 - 142, 1965
9. Grothendieck, A., Technique de construction en géométrie analytique, Sem. H. Cartan, 1960/1
10. Kodaira, K., and Spencer, D.C., On deformations of complex analytic structures, II,

Ann. of Math. 67 (1958), 403 - 466.

11 Kodaira, K. and Morrow, Complex manifolds, Holt, Rinehalt and Winston, 1971

12 Kuranishi, M., Deformations of compact complex manifolds, Les presses de l'Universite de Montreal 1971

13. Kuranishi, M., A note on families of complex structures, Global analysis, papers in honor of Kodaira, 309-313 (1969).

14 Matsusaka, T., and Mumford, D., Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. J. Math, 86 (1964), 668-684

15 Moishezon, B., On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions, II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat. 30 (1966), 621-656

16 Savarevic, I.R. et al., Algebraic surfaces, Steklov Institute of Math 75, English translation, Providence, Amer. Math. Soc. 1967

17 Schuster, H.W., Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume, Inventiones math. 9 (1970), 284-294

18. Suwa, T., Deformations of holomorphic Seifert fiber spaces, Inventiones math., 51 (1979), 77-102.

19. Wavrik, J.J., Obstructions to the existence of a space of moduli, Global Analysis, Papers in honor of Kodaira (1969) 403-414