数理解析研究所講究録
388巻 1980年 114-133

アーベル多様体上のベクトル束のコサイクルの正規化について

名大 理　梅村 浩

§1. 代数幾何学におけるベクトル束

我々の研究の対象は，アーベル多様体上のベクトル束であるが，まず一般の代数多様体上のベクトル束の研究の現状を見ておこう．

階数1の場合は，直線束であり，古典的な linear system の理論と同等である．階数2以上のベクトル束を，代数幾何の立場から初めて研究したのは，A. Weil (Généralisation des fonctions abéliennes, J. Math. pures et appl. t. 17 (1938) 47–87) である．A. Weil が狙ったのは，非可換な類体論とも言うべきものである．即ち，曲線上の直線束を分類するのが Jacobi 多様体であり，Jacobi 多様体の理論は一変数代数函数体のアーベル拡大の理論＝類体論である．もし群を乗法群 $\mathbb{G}_m$ から非可換な群 GL_r に一般化するなら，つまり直線束の代りにベクトル束を考察すれば，非可換な

Jacobi多様体と呼ぶべきものが定義され，非可換な類体論のようなものが構成できるであろう．A. Weilのこの論文は意欲的な作品であり，«En tout cas, le champ est assez vaste qui s'offre là aux investigations des chercheurs de bonne volonté»という文章で終っている．その後40年以上経った現在A. Weilのアイディアは正しかったのだろうか．答えは，YesともNoとも言える．この様な方法で，非可換な類体論をつくるという考えは完全に失敗したと言ってよいと思われる．しかし，後でのべるように，曲線上のベクトル束の分類を与える多様体（現代的に言えばstable bundleのmoduli）が，例えばKricheverの仕事等に関係して大切なことが解って来た（本講究録の伊達氏の報告参照）．

現在，代数幾何学で行われているベクトル束の研究は，一般論としては，次に限られると思われる：1° 分類，2° Ampleベクトル束の理論，3° Gを半単純代数群，Pをその放物型部分群とし，G/P上のhomogeneousベクトル束の理論，Borel-Weilの定理に尽きると言える，4° Grothendieckによる，scheme上のBrauer群の理論．

分類について詳しく見てみよう．Gronthendieckは$\mathbb{P}^1$上のベクトル束を分類した（1957）．私もこのテーマに大いに

関係あるのであるが，Atiyahは楕円曲線（＝1次元のアーベル多様体）上のベクトル束を分類した（1957）．種数が2以上の代数曲線（＝コンパクト リーマン面）上のベクトル束の分類は，stableベクトル束のmoduliの研究となる．つまり，種数が2以上の代数曲線C，整数$r>0$，dを固定するとき，集合$\mathcal{E}(C;r,d)=\{C$上のベクトル束E / Eはstable，Eの階数$=r$，Eの次数$=d\}$に代数多様体の構造（stableベクトル束のmoduli）が入る．もし，$r=1$，$d=0$なら，$\mathcal{E}(C;1,0)$はCのJacobi多様体に他ならず，一般の$\mathcal{E}(C;r,d)$はJacobi多様体の拡張になっている．多様体$\mathcal{E}(C;r,d)$についても，詳しい研究が為されている．

以上，曲線上のベクトル束の分類について述べたが，高次元の多様体上にも，H-stableという概念が導入され，曲線の場合と同様に，ベクトル束のmoduliが存在することが証明されているが，moduli多様体の詳しい性質は研究されていない。Kricheverの仕事を，多変数に拡張しようとすれば，このmoduli多様体の研究が必要となるであろう．

§2 アーベル多様体上のベクトル束．

アーベル多様体上のベクトル束には，可換的性格の強いものとそうでないものがある．Atiyahは1次元アーベル多様

体上のベクトル束を分類したが，1次元のアーベル多様体上のベクトル束は可換的性質が強いのである．松島－森本[2]，[3]は，holomorphic connectionをもつベクトル束を研究した．

定理（松島，森本）．Aをアーベル多様体，EをA上のベクトル束とすると，次は同値である．

(1) Eはholomorphic connectionをもつ．

(2) Eは基本群の表現から得られる．

(3) xをAの任意の点とすると，EはT_x^*Eと同型である．
ここでT_xはAからAへの多様体の同型であり，点aを$a+x$へ写す．

彼らは，この条件を満たすベクトル束を分類している．この条件を満たすbundleは，基本群($\simeq \mathbb{Z}^{2g}$，$g=\dim A$，)の表現で得られるので，可換性の強いベクトル束であると言える．

$\varphi : A' \longrightarrow A$をアーベル多様体のisogeny（つまり，$\varphi$ surjective，$\mathrm{Ker}\,\varphi$ 有限）とする．L'をA'上の直線束とする，direct image $\varphi_* L'$はA上のベクトル束となる．この様にして得られるベクトル束を，直線束のisogenyによるdirect imageとなるベクトル束と呼ぶことにする．

定理(小田, 森川). Aを2次元のアーベル多様体, EをA上のベクトル束で, $H^0(A, \mathrm{End}\, E) \cong \mathbb{C}$, つまり$E$は自明でない自己準同型を持たないとする. 次は同値である.

(1) Eは直線束の isogeny による direct image となる.

(2) ベクトル束 $\mathrm{End}\, E$ の第2 Chern 類は 0 である.

この型のベクトル束は, 直線束と isogeny の組合せであり, 可換的であるといえる. 楕円曲線上には, この2つの型, 基本群の表現で得られるもの, 直線束の isogeny による direct image となるもの, しか本質的に存在しない. Atiyah が楕円曲線上のベクトル束を分類するのに成功したのは, この理由による. 2次元以上のアーベル多様体上では, 様子が全く異なるのである. それと関係して, 次の事柄を思い出しておく: Gを半単純代数群, Pを放物型部分群とすると, G/P上の階数の低いベクトル束は少ないと思われる. これとは反対にアーベル多様体上には沢山のベクトル束が存在する. 列挙してみよう. 最初の2つは上に述べたものである.

(イ) 基本群の表現で得られるベクトル束.

(ロ) 直線束の isogeny による direct image.

(ハ) Lをアーベル多様体A上の直線束で, $H^1(A, L^{-1}) \neq 0$とする. $\mathcal{O}_A$をA上の自明な直線束として, extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

できまるベクトル束E. 条件$H^1(A, L^{-1}) \neq 0$は，自明でなりextensionが存在するための条件である．

(ニ) Aをg次元アーベル多様体，LをA上のample直線束，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$をLのsection $(n \geqq g+1)$で同時に消えないと仮定する．Eを次の商bundleとして定義する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow L^{\oplus n} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

ここで，左のinjectionは$1 \longmapsto (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$で定義する．

(ホ) Cを種類$g \geqq 2$のコンパクトリーマン面とする．C自身のn ケの直積$C^n = \underbrace{C \times \cdots \times C}_{n}$には自然にn次対称群が作用する．その作用で$C^n$を割って得られる多様体を，Cのn次対称積とよび$S^n(C)$で表わす．Cの1点Pを固定しておく．$\varphi: S^n(C) \longrightarrow J(C)$を次の様に定める；$S^n(C)$の元$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$に対して，$\varphi((P_1, \cdots, P_n)) \underset{\mathrm{def}}{=}$ C上のdivisor $P_1 + P_2 + \cdots + P_n - nP$の類．もし$n \geqq 2g-1$ならば，$J(C)$上のベクトル束$E_{n+1-g}$で，$E_{n+1-g}$の射影化が$S^n(C)$と同型になるものが存在する．$E_{n+1-g}$をPicardバンドルと呼ぶ．

(ハ)，(ニ)，(ホ)のベクトル束は，(イ)，(ロ)のベクトル束と違って，非可換性であり，性格がかなり異なっている．これらのベ

クトル束の研究については，Schwarzenberger（7），梅村(25)，(26)，(28)，Kempf(22)，(27)，向井(29)を参照されたい．(三)の型のベクトル束の一部と，Picard bundle については，moduliが決定されていることのみ述べておく．moduliの決定される高次元の場合の貴重な例であり，非線型微分方程式と関係していると思われるが，この方面からの考察は未だ行われていない．

§3 コサイクルの正規化について

アーベル多様体上の直線束という幾何学的対象には，解析的にはテータ函数が対応しており，表現論的にはHeisenberg群が対応している．直線束は容易にベクトル束へ，一般化される．それでは，アーベル多様体上のベクトル束に対応して非可換なテータ函数を定義するのは可能であろうか．あるいは，表現論的な方法でアーベル多様体上のベクトル束を統制することはできるのであろうか．表にすると次の様になる．

群論	幾何	解析	表現論
G_m	アーベル多様体上の直線束	テータ函数	Heisenberg群
GL_r	アーベル多様体上のベクトル束	?	?

(ハ), (ニ), (ホ)のベクトル束が表現論的に, 直線束と全く異なっていることは, 梅村[25]に示されている. この報告では, 非可換なテータ函数を考える際に, 最も本質的な障害となる, コサイクルの正規化について述べてみたいと思う.

まず, 古典的なテータ函数, つまりアーベル多様体の直線束の場合を復習しておく. Γを$\mathbb{C}^g$の lattice とする. Γの任意の元γに対して, $\mathbb{C}^g$上の正則函数$f_\gamma(z)$が与えられており次の条件を満すとき, $\{f_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$は cocycle であるという:
条件 (1) $f_\gamma(z)^{-1}$も$\mathbb{C}^g$上で正則, (2) 任意のγ, $\gamma'\in\Gamma$について, 等式 $f_{\gamma+\gamma'}(z)=f_\gamma(z+\gamma')f_{\gamma'}(z)$ が成立する.

例. $\tau\in\mathfrak{S}_g \underset{df}{=} \{\sigma\in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\sigma=\sigma,\ \mathrm{Im}\,\sigma$は正定$\}$とする.
$\Gamma=\mathbb{Z}^g+\mathbb{Z}^g\tau$は$\mathbb{C}^g$の lattice である. $m, n\in\mathbb{Z}^g$に対して, $f_{m+n\tau}(z)=\mathbf{e}(-\frac{1}{2}n\tau{}^tn-nz)$とおけば, $\{f_{m+n\tau}(z)\}_{m+n\tau\in\Gamma}$は cocycle である. ここで $\mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}$である.

さて, $\{f_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$を cocycle とすると, $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$への$\gamma\in\Gamma$の作用を $(z,v)\longmapsto(z+\gamma, f_\gamma(z)v)$ で定めると, 群Γが$\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$に作用することがわかる. 一方この$\Gamma$の作用は projection $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}^g$, $\mathbb{C}^g$上へのΓの作用と可換なので, $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$を

Γで割ることによって，複素トーラス$\mathbb{C}^g/\Gamma$上の直線束が得られる．複素トーラス$\mathbb{C}^g/\Gamma$上のすべての直線束が，この方法で得られることが，わかっている．

$\{\rho_\gamma^{(1)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{\rho_\gamma^{(2)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$を2つのcocycleとする．$\mathbb{C}^g$上の正則函数$f(z)$で次の条件を満たすものが存在するとき，$\{\rho_\gamma^{(1)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{\rho_\gamma^{(2)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$はcohomologousであるという：条件(1) $f(z)^{-1}$も$\mathbb{C}^g$上正則，(2)任意の$\gamma\in\Gamma$について，$\rho_\gamma^{(1)}(z)=f(z+\gamma)\,\rho_\gamma^{(2)}(z)\,f(z)^{-1}$が成立する．

次の定理が成り立つ．

定理．$\{\rho_\gamma^{(1)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{\rho_\gamma^{(2)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$を2つのcocycleとする．$\{\rho_\gamma^{(1)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$の定義する直線束と$\{\rho_\gamma^{(2)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$の定義する直線束が同型である必要十分条件は，$\{\rho_\gamma^{(1)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$と$\{\rho_\gamma^{(2)}(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$がcohomologousであることである．以上をまとめて，

$$\{\text{cocycles } \{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}\}/\text{cohomologous} \underset{1:1}{\simeq} \{\mathbb{C}^g/\Gamma\text{上の直線束}\}/\text{同型}.$$

上の定理より，$\mathbb{C}^g/\Gamma$上の直線束を定義する際，cocycleをcohomologousな範囲でとり替えて，できるだけ簡単なものにする（つまり正規化）することが望ましくなる．

以上のことは，直線束をベクトル束にしても同様に成り立つ． つまり，rを正整数とし，Γを$\mathbb{C}^g$の lattice とする．$\mathbb{C}^g$上の正則函数を成分にもつ $r\times r$ 行列 $\rho_\gamma(z)$ が各$\gamma\in\Gamma$に対して与えられており，次の条件を満たすとき，$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は階数rの cocycle であるという：条件(1) $\rho_\gamma(z)^{-1}$の各成分も$\mathbb{C}^g$上正則，(2) 任意の$\gamma,\gamma'\in\Gamma$に対して，$\rho_{\gamma+\gamma'}(z)=\rho_\gamma(z+\gamma')\rho_{\gamma'}(z)$.

直線束の場合と同様にして，cocycle $\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$は複素トーラス$\mathbb{C}^g/\Gamma$上に階数$r$のベクトル束を定める． 直線束の場合と同様に，$\mathbb{C}^g/\Gamma$上のすべての階数$r$のベクトル束は，cocycle によって定義されることが知られている． 2つの cocycle が cohomologous であるという定義も明らかである．直線束の場合の定義の$f(z)$を，正則函数を成分とする$r\times r$行列におきかえるだけである．

直線束の場合と同様な定理も成立する．

定理 $\{\rho^{(1)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$，$\{\rho^{(2)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ を2つの階数rの cocycle とする．$\{\rho^{(1)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ の定義するベクトル束と$\{\rho^{(2)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ の定義するベクトル束が同型である必要十分条件は，$\{\rho^{(1)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$と$\{\rho^{(2)}_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$が cohomologous であることである． したがって，$\{\text{cocycles } \{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}\}/\text{cohomologous} \underset{1:1}{\leftrightarrow} \{\mathbb{C}^g/\Gamma$上のベクトル束$\}/$同型．

直線束の正規化を与えるAppell-Humbertの定理をのべよう．$\mathbb{C}^g \supset \Gamma$をlatticeとする．$\Gamma$は固定しておく．$H: \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$をHermite形式で，$\mathrm{Im}\,H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$とする．$\alpha$は$\Gamma$から$\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$への写像であって，条件，$\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)e^{i\pi E(\gamma_1, \gamma_2)}$を任意の$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$について満たす．ここで，$E = \mathrm{Im}\,H$である．このようなHと$\alpha$が与えられたとき，$\rho_\gamma(z) = \alpha(\gamma)\, e^{\pi H(z,\gamma) + \frac{1}{2}\pi H(\gamma,\gamma)}$とおくと，$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma \in \Gamma}$はcocycleである．このcocycleによって定まる，$\mathbb{C}^g/\Gamma$上の直線束を$L(H, \alpha)$であらわす．

定理（Appell-Humbert）．次の1：1対応がある．

$$\{(H, \alpha) \mid H, \alpha \text{は上の条件を満たす}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{C}^g/\Gamma\text{上の直線束}\}$$
$$(H, \alpha) \longleftrightarrow L(H, \alpha).$$

この定理は，直線束を定義するcocycleが1意的に$\rho_\gamma(z) = \alpha(\gamma)\, e^{\pi H(z,\gamma) + \frac{1}{2}\pi H(\gamma,\gamma)}$と正規化できることを示している．Appell-Humbertの定理は難しい定理ではないが，非常に強力であり，$\mathbb{C}$上のアーベル多様体の理論の大部分を初等的な線型代数に還元してしまう．ベクトル束について同様な定理が証明できるのではないかと，誰しも思うであろうが，実際に試みてみると大変難しい問題であることがわ

かる。 以下，何故，困難なのかを説明する． まず，一体具体的に書ける cocycle はどんなものがあるかを見ておく．

例 1. §2 の(イ)のベクトル束，基本群の表現で得られるベクトル束． この場合，ρ_γ は $\mathbb{C}^g$ 上の定数行列である．

2. §2 の(ロ)のベクトル束，直線束の isogeny による direct image. 特別な場合の具体的な表示を与えておこう． $g=1$，つまり楕円曲線上で考える． $\tau\in\mathbb{C}$ で $\mathrm{Im}\,\tau>0$ とする． $\Gamma=\frac{1}{2}\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau\subset\mathbb{C}$ とおく． $z\in\mathbb{C}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\rho_{\frac{m}{2}+n\tau}(z)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^n e\left(\frac{n^2}{2}\tau+nz\right),$$

とおくと，$\left\{\rho_{\frac{m}{2}+n\tau}(z)\right\}_{\frac{m}{2}+n\tau\in\Gamma}$ は cocycle である．

この 2 つのタイプのベクトル束以外のベクトル束を定義する cocycle を具体的に書くのは，余程の幸運に恵まれない限り不可能である． むしろ，一般には新しい函数（$e(z)$ とか，テータ函数とかいうものでないという意味）を導入しない限り不可能であると考えられる． つまり，cocycle が何らかの函数方程式を満たすとき正規化されていると述べるより他

方がなり．古典的には，Weilの次のformulationがある．$\Gamma \subset \mathbb{C}^g$をlattice，$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$を直線束のcocycleとする．任意の$\gamma$，$\gamma'\in\Gamma$について，$\rho_\gamma(z+\gamma')\rho_{\gamma'}(z)^{-1}$が$\mathbb{C}^g$上の定函数になるとき，Weilは$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$が正規化されていると考えた．

Appell-Humbertの定理を使えば，アーベル多様体上の直線束は，Weilの意味で正規化されたcocycleで定義されることがわかる．

注意．$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$を直線束のcocycle，$L$を$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$の定義する複素トーラス$T$上の直線束とする．$H^0(T, L)$は，$\mathbb{C}^g$上の正則函数$h(z)$で，$h(z+\gamma)=\rho_\gamma(z)h(z)$と任意の$\gamma\in\Gamma$についてなるものの全体と考えられる．例えば，cocycleの最初の例$\rho_{m+n\tau}(z)=e(-\frac{1}{2}n\tau{}^t n-nz)$の場合，古典的なテータ函数$\vartheta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e(\frac{1}{2}n\tau{}^t n+nz)$は，$\{\rho_{m+n\tau}(z)\}$から定義される直線束のsectionと考えられる．$h(z+\gamma)h(z)^{-1}=\rho_\gamma(z)$であるので，$\rho_\gamma(z)$は$h(z)$の差分である．したがってWeilの意味での正規という概念は，2回差分に関する条件である．

直線束の場合の定義をそのままベクトル束に拡張してみたらどうであろう．

定義 $\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ をベクトル束の cocycle とする．任意の $\gamma, \gamma'\in\Gamma$ について $\rho_\gamma(z+\gamma')\rho_\gamma(z)^{-1}$ が $\mathbb{C}^g$ 上の定数行列となるとき，$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は Weil の意味で正規化されていると言う．

直線束の場合のように，すべてのベクトル束が Weil の意味で正規化された cocycle で定義されるとよいのだが，そうはいかない．§2 の(イ)の型のベクトル束は $\{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，$\rho_\gamma(z)=\rho_\gamma$ は定数，で定義されるので，Weil の意味で正規化された cocycle で定義される．§2 の(ロ)の型のベクトル束も，Weil の意味で正規化された cocycle で定義される．しかし，次の定理が成り立つ．

定理（森川[24]）．E をアーベル多様体 A 上のベクトル束とする．さらに，$H^0(A, \mathrm{End}\,E)=\mathbb{C}$ とする．次の条件は同値である．

(1) E は，直線束の isogeny による direct image.

(2) E は，Weil の意味で正規化された cocycle で定義される．

§2 で，見たように，アーベル多様体上には，もっと非可換なベクトル束(ハ)，(ニ)，(ホ)の型のものが存在する．したがって，Weil の意味での正規化では十分でないことがわかる．

それならば，もっと高次の差分を考えたらどうであろうかと思うところであるが，もう1回上げるだけでも計算が大変で今のところ成功した人はいない．Appell–Humbertの定理はKähler geometryに基づいており，Kähler geometryは次の形式でsl_2の表現論である: $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\Lambda$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\longrightarrow L$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow(n-p)x$, xはp-form, nは考える多様体の次元．したがって，もっと次元の大きな，半単純Lie環を作用させて，Kähler geometryを一般化することによって，Appell–Humbertの定理を一般化できるのではないであろうか(森川寿氏のアイディア)．

Weilの意味の正規化は強すぎたので，もっと弱い定義を捜さなければならない．

定義 $\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ を階数rのベクトル束のcocycleとする．$\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$が，弱い意味で正規化されているとは，$GL_r$に$\rho_\gamma(z), \gamma\in\Gamma$を付加して得られる群$GL_r\langle\rho_\gamma(z)\rangle_{\gamma\in\Gamma}$が$GL_r$上有限生成であることをいう．

補題. Weilの意味で正規化されていれば，弱い意味で正規化されている．

定理. $\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ をベクトル束の cocycle, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g}$ を Γ の base とする. 次は同値である.

(1) $\{\rho_\gamma(z)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は, 弱い意味で正規化されている.

(2) $1\le i, j\le 2g$ に対して, GL_r, $\rho_{\gamma_1}(z)^{\pm 1}, \rho_{\gamma_2}(z)^{\pm 1}, \cdots$ $\rho_{\gamma_{2g}}(z)^{\pm 1}$ の語(word) $F^{(i,j)}(\rho_{\gamma_1}(z), \rho_{\gamma_2}(z), \cdots, \rho_{\gamma_{2g}}(z))$ があって, $\rho_{\gamma_i}(z+\gamma_j) = F^{(i,j)}(\rho_{\gamma_1}(z), \rho_{\gamma_2}(z), \cdots, \rho_{\gamma_{2g}}(z))$ が成り立つ.

注意. (2)と類似の函数方程式はE. Picardによって今世紀の初め, 楕円函数の一般化として考察されたが, まとまった結果はないようである.

弱い意味で正規化されるcocycleでどの程度のベクトル束が定義されるか, 分らないが, §2の(1)のタイプのベクトル束の幾らかが弱い意味で正規化されたcocycleで定義されることが示される. 証明はcocycleを具体的にテータ函数を使って表し, 定理の条件(2)の函数方程式をつくることによる.

Cocycleを具体的に書くことの困難なことを, §2の(三)の例で見てみよう. $g=2$, $n=3$とする. つまりEは,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow L^{\oplus 3} \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$
$$1 \longmapsto (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

で定義されている. $\mathbb{C}^2/\Gamma = A$, $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\pi} A$ とすると, π で $\mathbb{C}^2$ 上に持ち上げると, 上の exact sequence は,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi^* \mathcal{O}_A & \longrightarrow & \pi^* L^{\oplus 3} & \longrightarrow & \pi^* E & \longrightarrow & 0, \\ & & \| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}^{\oplus 3} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}^{\oplus 2} & & \\ & & 1 & \longmapsto & (\theta_1, \theta_2, \theta_3) & & & & \end{array}$$

となる. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は $\mathbb{C}^2$ 上ではテータ函数となる. $\pi^* L^{\oplus 3} \longrightarrow \pi^* E$ は 行列 $F(z) = \begin{pmatrix} f_{11}(z) & f_{21}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \\ f_{31}(z) & f_{32}(z) \end{pmatrix}$ で次の条件を満たすもの

で与えられている: 条件 (1) $f_{ij}(z)$ は $\mathbb{C}^2$ 上正則, (2) $\forall z \in \mathbb{C}^2$ について, $\operatorname{rank} F(z) = 2$, (3) $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) F(z) = 0$.

ところで, E の cocycle は, $\begin{pmatrix} f_{11}(z) & f_{21}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{pmatrix} = \Theta(z)$ とおいたとき, $\{\Theta(z+\gamma)\Theta(z)^{-1}\}_{\gamma \in \Gamma}$ で与えられる. したがって行列 $F(z)$ で簡単なものを求めるのが, cocycle を正規化することと同値である. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を, とくに都合よく選んでおけば, 条件 (1) (3) を満たす行列は, 例えば theta relation を使って容易につくれるが, (2) の条件がチェックできない.

アーベル多様体上のベクトル束に関する論文のリストを付けて, この報告を終るが, まだ本質的な仕事はこの方面で為されていない.

アーベル多様体上のベクトル束の論文のリスト

(1) M. F. Atiyah: Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. 7 (1957) 414 - 452.

(2) Y. Matsushima: Fibrés holomorphes sur un tore complexe, Nagoya Math. J. vol. 14 (1959) 1 - 24.

(3) A. Morimoto: Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connections holomorphes, Nagoya Math. J., Vol. 15 (1959), 83 - 154.

(4) A. Mattuck: Symmetric products and Jacobians, Amer. J., of Math. 83, (1961) 189 - 206.

(5) _________ : Picard bundles, Illinois J. of Math. 5, (1961) 550 - 564.

(6) G. Macdonald: Symmetric products of an algebraic curve. Toplolgy 1 (1962) 319 - 343.

(7) R. L. E. Schwarzenberger: Jacobians and symmetric products, Illinois J. of Math. 7 (1963) 257 - 268.

(8) ________________________ : The secant bundles of a projective variety, Preceedings London Math. Society 14 (1964) 369 - 384.

(9) A. Mattuck: Secant bundles on symmetric products, Amer. J. of Math. 87 (1965) 779 - 797.

(10) A. Mizuhara: On a P^1 - bundle over an avelian variety which is almost homogeneous Math. Japonicae 16 (1971) 105 - 114.

(11) T. Oda: Vector bundles on avelian surfaces, Inv. math. 13 (1971) 247 - 260.

(12) _____ : Vector bundles on an elliptic curve,Nagoya Math. J. 43 (1971) 41 - 72.

(13) H. Morikawa: A Note on holomorphic vector bundles over complex tori, Nagoya Math. J. 41 (1971) 101 - 106.

(14) __________ : A note on holomorphic vector bundles over quotient manifolds with respect to nilpotent groups, Nagoya Math. J. 48 (1972) 183 - 188.

(15) R. C. Gunning: Some special complex vector bundles over jacobian varieties, Inv. Math. 22 (1973) 187 - 210.

(16) H. Umemura: Some results in the theory of vector bundles, Nagoya Math. J. 52 (1973) 97 - 128.

(17) H. Umemura: A theorem of Matsushima, Nagoya Math. J. 54 (1974) 123 - 134.

(18) M. Miyanishi: Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles, Number Theory, algebraic Geometry, ... in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973) 73 - 93.

(19) A. Mizuhara: On homogeneous P^n - bundle over an Abelian veriety, J. Math. Soc, Japan 26 (1974) 377 - 388.

(20) Y. Matsushima: Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus. Nagoya Math. J. 63 (1976) 161 - 195.

(21) J. Hano: A geometrical characterization of a class of holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. 63 (1976) 197 - 202.

(22) G. Kempf: Some vector bundles on jacobian varieties, Proc. AMS 54 (1976) 179 - 180.

(23) _______ : A property of the periods of a prym differential, Proc. AMS 54 (1976) 181 - 184.

(24) H. Morikawa: A note on holomorphic matric automorphic factor with respect to a lattice in a complex vector space, Nagoya

Math. J. 63 (1976) 163 - 171.

(25) H. Umemura: On a certain type of vector bundles over an abelian veriety, Nagoya Math. J. 64 (1976) 31 - 45.

(26) _________ : On a property of symmetric products of a curve of genus 2, Proc. Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto (1977) 709 - 721.

(27) G. Kempf: Toward the inversion of Abelian integrals, I, II, Ann. of Math. 110 (1979), 243 - 273, Amer. J. of Math. 101 (1979) 184 - 202.

(28) H. Umemura: Moduli spaces of the stable vector bundles over abelian surfaces, Nagoya Math. J. 77 (1980) 47 - 60.

(29) S. Mukai: Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, to appear in Nagoya Math. J. (1981).