

Painlevé V 型タイプの方程式の τ 函数について

琉球大 理 毛織 泰子

1. $x=a_1, \dots, a_r$ に確定特異点, $x=\infty$ に 1 級不確定特異点をも
 \rightarrow 1 階線型常微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{d}{dx} Y = \left(\sum_{j=1}^r \frac{B_j}{x-a_j} + C \right) Y$$

(B_j, C は $r \times r$ 定数行列, B_j は高々ランク 1, $C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r \end{pmatrix}$)

を考える。 $A = \text{diag} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{pmatrix}$ とし、 Q, P を各々 B_j の固有値 λ_j trace B_j に属する固有列ベクトル、固有行ベクトル ($j=1, \dots, r$) から成る行列とすれば (1.1) は

$$(1.2) \quad \frac{d}{dx} Y = (Q(x-A)^{-1}P + C) Y$$

と書ける。 $B_j = Q E_j P$, $E_j = \text{diag} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ の関係があり、(1.1) と (1.2)

は同等である。 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ を行列 $B = \sum_{j=1}^r B_j = QP$ の対角線要素

とすれば (これを $K = \text{diag} \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix} = \text{diag } B$ のように略記する) $\sum_{j=1}^r \kappa_j =$

$\sum_{j=1}^r \lambda_j$ である。 $K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}$ とおく。

この方程式 (1.1) 又は (1.2) のモノドロミー構造を変えない変形を考える [5], [6], [7], [11], [12], [13], [14], [15]。 (1.2) と

$$(1.3) \quad \mathcal{L} Y = 0, \quad \mathcal{L} = Q(x-A)Q^{-1} \left(\frac{d}{dx} - C \right) - B = \left(\frac{d}{dx} - C \right) Q(x-A)Q^{-1} - B'$$

$$(1.4) \quad B' = 1 + B - [QAQ^{-1}, C]$$

の形に書くとき、線型方程式 (1.3) に次の方程式

$$(1.5) \quad dY = \Omega Y, \quad \Omega = -QdA \cdot Q^{-1} \left(\frac{d}{dx} - C \right) + x dC + \textcircled{A}, \quad \textcircled{A}_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & (i=j) \\ (QP)_{ij} d \log(a_i - a_j) & (i \neq j) \end{cases}$$

(d は $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r \end{pmatrix}$ に関する外微分) を付け加えたホロ

ノミック系の完全積分可能条件は

$$(1.6) \quad d\mathcal{L} = \Omega^* \mathcal{L} - \mathcal{L} \Omega, \quad \Omega^* = \Omega - [QdA \cdot Q^{-1}, C] - [QAQ^{-1}, dC]$$

である。今 $Q = (Q_{ij}), P = (P_{ij})$ の Poisson bracket $\{$

$$(1.7) \quad \{Q_{ij}, P_{kl}\} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \{Q_{ij}, Q_{kl}\} = 0, \quad \{P_{ij}, P_{kl}\} = 0$$

と定義し、又 1 form ω を

$$(1.8) \quad \omega(A, C) = \frac{1}{2} \sum_{i+j} (PQ)_{ij} (PQ)_{ji} d \log(a_i - a_j) + \sum_{i,j} Q_{ij} P_{ji} d(a_j c_i) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i+j} (QP)_{ij} (QP)_{ji} d \log(c_i - c_j)$$

と定義すれば、Hamilton の運動方程式

$$(1.9) \quad dQ = \{Q, \omega\}, \quad dP = \{P, \omega\}$$

$$\text{i.e. } dQ = Q \textcircled{A}^* + dC \cdot QA + CQdA + \textcircled{A}Q, \quad dP = -\textcircled{A}^*P - APdC - dA \cdot PC - P \textcircled{A},$$

($\textcircled{A}^*_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & (i=j) \\ (PQ)_{ij} d \log(a_i - a_j) & (i \neq j) \end{cases}$) は積分可能条件 (1.6) を与え、(1.1) の

モノドロミ - 保存変形を記述する [6], [7], [8], [14]

(1.9) の解 Q, P に対し 1 form ω は closed: $d\omega = 0$ となり

$$(1.10) \quad \omega(A, C) = d \log \tau(A, C)$$

から τ 函数が定数倍を除いて一意に定まる [6], [7].

$Y(x)$ を (1.1) の確定特異点 $x = a_j$ における non trivial な指数 λ_j をもつ局所解 (列) ベクトル ($j=1, \dots, r$) から成る行列、 $Y^{(\infty)}(x)$ を不確定

特異点 $x=\infty$ に於ける指数 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ の形式解(列)ベクトルから成る行列で

$$(1.11) \quad Y^{(1)} = Q \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{(x-A)^{\Lambda+n}}{(\Lambda+n)!} e^{C(x-A)}, \quad Y_0 = 1,$$

$$Y^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(2)} (x-A)^{K-n} e^{Cx}, \quad Y_0^{(2)} = 1$$

の表示をもつものとする。これから再び

$$(1.12) \quad \Lambda = \text{diag } PQ, \quad K = \text{diag } QP$$

が従い、(1.9)から $d\Lambda = dK = 0$ 即ち $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \kappa_1, \dots, \kappa_r$ は(1.9)の積分定数である。

この方程式(1.2)に関して特徴的な一つのことは(1.3)の表示からわかるように、形式的 Laplace 変換

$$(1.13) \quad \frac{d}{dx} \mapsto \psi, \quad x \mapsto -\frac{1}{\psi}, \quad Y \mapsto \hat{Y}$$

に関して閉じていることである:

定理 1.1 方程式(1.2)は形式的 Laplace 変換(1.13)により

$$(1.14) \quad \frac{d}{d\psi} Z = (\hat{Q}(\psi - C)^{-1} \hat{P} - A) Z, \quad \hat{Q} = Q^{-1}, \hat{P} = -BQ, Z = Q^{-1} \hat{Y}$$

に変換される。即ち Laplace 変換は方程式の係数については

$$(1.15) \quad (Q, P, A, C) \mapsto (\hat{Q}, \hat{P}, C, -A)$$

の置きかえを意味する。(1.12)は(1.16)に変わる。

$$(1.16) \quad \text{diag } \hat{Q} \hat{P} = -(1+\Lambda), \quad \text{diag } \hat{P} \hat{Q} = -(1+K).$$

定理 1.2 \hat{Q}, \hat{P} は Q, P の正準変換である。従って変形方程式

(1.9) は変換(1.15)で変わらない。

(1.15)は(1.17)と(1.18)の合成である。

$$(1.17) \quad (Q, P, A, C) \mapsto (P, -Q, C, -A) \quad (\text{正準変換}),$$

$$(1.18) \quad (Q, P, A, C) \mapsto (-\hat{P}, \hat{Q}, A, C).$$

2. (1.4) と (1.14) から

$$(2.1) \quad Q' = -\hat{P} = (1 + QP - [QAQ^T, C])Q, \quad P' = \hat{Q} = Q^{-1}$$

とおけば、変換 (1.18) は (2.1) $(Q, P) \mapsto (Q', P')$ の変換であり、
逆変換は (2.2) で与えられる。

$$(2.2) \quad Q = P'^{-1}, \quad P = P'(-1 + Q'P' + [P'^{-1}A'P', C]).$$

Q, P, A, C で定義される量 $F = f(Q, P, A, C)$ に対して $F' = f(Q', P', A, C)$
と書く。例えば $B = QP$ に対して $B' = Q'P'$ で、これは (1.4) と
一致する。

(1.8) と (2.1) から恒等式

$$(2.3) \quad \omega' - \omega = \text{trace} (QAQ^T dC + Q^T CQ dA)$$

を得。これと (2.1) とから

$$(2.4) \quad (\text{trace } P'dQ' - \omega') - (\text{trace } PdQ - \omega) = d(\text{trace } Q^{-1}(Q' - CQA) + \log \det Q)$$

を得る。 $Q = P'^{-1}$ と Q' とは独立だから (2.4) は (2.1) 即ち (1.18) が正
準変換であることを示している。

$$(2.5) \quad \Lambda' = \text{diag } P'Q' = 1 + \Lambda, \quad K' = \text{diag } Q'P' = 1 + K$$

だから (1.9) の解 Q, P に対して (2.1) の変換で、 $x = a_j$ での指数

$\lambda_j, 0, \dots, 0$ は $\lambda_{j+1}, 0, \dots, 0$ ($j=1, \dots, r$), $x = \infty$ での指数 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ は $\kappa_1 + 1,$

$\dots, \kappa_r + 1$ になる。 (2.1) の変換は、他方、線型方程式 (1.2) の変

換 (Schlesinger 変換 [2], [12], [14], [15])

$$(2.6) \quad Y' = Q(x-A)Q^{-1}Y$$

(その逆変換は (1.3) の第 2 式から

$$(2.7) \quad Y = P^{-1}Q^{-1}(x-C)Y' \quad)$$

により、係数の間の変換としても得られる:

定理 2.1 *Schlesinger* 変換 (2.6) により方程式 (1.3) 及び (1.5) は

$L'Y' = 0$ 及び $dY' = Q'Y'$ に変換される。特に (1.2) は

$$(2.8) \quad \frac{d}{dx} Y' = (Q'(x-A)^{-1}P' + C)Y' = \left(\sum_{j=1}^r \frac{B_j'}{x-a_j} + C \right) Y'$$

に、解 (1.11) は

$$(2.9) \quad Y'(x) = Q' \sum_{n=0}^{\infty} Y_n' \frac{(x-A)^{1+\Lambda+n}}{(1+\Lambda+n)!} e^{C(x-A)}, \quad Y_0' = 1,$$

$$Y^{(m)'}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(m)'} (x-A)^{1+K-n} e^{Cx}, \quad Y_0^{(m)'} = 1$$

に変換され、 Q', P' は (2.1) で与えられる。

変形方程式 (1.9) から $d \log \det Q = \text{trace} (QAQ^{-1}dC + Q^{-1}CQdA)$ となる。

(2.3) と比較して $d \log \tau' - d \log \tau = d \log \det Q$ 。故に、 τ 函数

の定数倍を適当に正規化して

定理 2.2 (2.10) $\frac{\tau'}{\tau} = \det Q$ 。

方程式 (1.2) は対角行列 D_1, D_2 による変換:

$$(2.11) \quad Y \mapsto D_1 Y, \quad Q \mapsto D_1 Q D_2^{-1}, \quad P \mapsto D_2 P D_1^{-1} \quad (\text{従って } QP \mapsto D_1 Q P D_1^{-1}, \quad PQ \mapsto D_2 P Q D_2^{-1})$$

の自由度がある。このとき $\det Q \mapsto \frac{\det D_1}{\det D_2} \det Q$ となるので (2.10)

で、 τ 函数の定数倍に影響がある。

$Q, P, F = f(Q, P, A, C)$ (resp. Y) から (2.1) (resp. (2.6)) により

n 回変換したものを $Q^{(n)}, P^{(n)}, F^{(n)} = f(Q^{(n)}, P^{(n)}, A, C)$ (resp. $Y^{(n)}$) と書く。

$n=1, 2, \dots$ に対し $F^{(n)} \in F, F'', \dots$ のように書くこともある。

$n \times n$ 行列 $R_n \stackrel{\text{def}}{=} (R_{ij})_{i,j=0,1,\dots,n-1}$ を次のように定義する。

(2.12) R_{ij} は $r \times r$ 行列, $R_{00} = Q, R_{0,j+1} = C R_{0j}, R_{i+1,0} = R_{i0} A,$

$$R_{i+1,j} = R_{ij} A + j R_{i,j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} R_{i,j-1-k} P C^k Q \quad (j=1, 2, 3, \dots).$$

例. $R_3 = \begin{pmatrix} Q & CQ & C^2Q \\ QA & CQA+Q+QPQ & C^2QA+2CQ+CAPQ+QPCQ \\ QA^2 & CQA^2+2QA+QPA+QAPQ & C^2QA^2+4CQA+2Q+CAPQA+CQAPQ+QPCQA+QAPCQ+3QPQ+QPAQ \end{pmatrix}$

R_n の分解:

(2.13) $_n$
$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ QAQ^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ QA^{n-1}Q^{-1} & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ dAA^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ dA^{n-2}A^{-1} & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Q' & Q'' & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Q^{-1}CQ & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1}C^2b \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

と定理 2.2 より (2.10) と同じ定数倍の正規化 τ .

定理 2.3 (2.14) $\frac{\tau^{(n)}}{\tau^{(0)}} = \det R_n^*$.

逆変換 (2.7) は $Q^{-1}Y = Q^{-1}(A-C)Q^{-1}Q^{-1}Y'$ と書ける。これを Laplace

変換 (7)

(2.14) $Z = \hat{Q}(Y-C)(\hat{Q})^{-1}Z'$ 一般に $Z^{(-1+n)} = \hat{Q}^{(n)}(Y-C)(\hat{Q}^{(n)})^{-1}Z^{(n)}$

を得る。定理 2.3 と同様に

(2.15) $(-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\tau^{(-n)}}{\tau^{(0)}} = \det R_n^*, R_n^* = R_n |_{(Q,P,A,C) \mapsto (P,-Q,C,-A)}$

も成り立つ。

行列 M の第 i_1, \dots, i_k 行と第 j_1, \dots, j_k 列 ($i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_k$) とからできる k 次の小行列式を M_{IJ} ($I \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_k), J \stackrel{\text{def}}{=} (j_1, \dots, j_k)$) と書くとき

Q, P の任意の小行列式 $Q_{IJ}^{(n)}, P_{IJ}^{(n)}$ の特異性について.

定理 2.4 $S_j \in Q^{(I)}, P^{(J)}, \tau^{(I)}$ の特異点の全体とするとき, $\tau^{(n)} P_{IJ}^{(n)}, \tau^{(n)} Q_{IJ}^{(n)}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; k=0, 1, \dots, r; k=\#(I)=\#(J)$) は全 $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で正則である。($k=0$ のとき $\tau^{(n)} P_{IJ}^{(n)}, \tau^{(n)} Q_{IJ}^{(n)}$ は共に $\tau^{(n)}$ である.)

系 2.5 τ と $\tau^{(n)}$ が $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で互いに素ならば, $\tau^{(n)} Q^{(n)} P^{(n)}$ は $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ の外で正則である.

(2.6) と (2.14) を

$$(2.16) \quad \begin{pmatrix} Y(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ -QAQ^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(x) \\ xY(x) \end{pmatrix}, \quad ((Z'(y))^{-1}, Z(y)^{-1}) = ((Z'(y))^{-1}, \eta(Z'(y))^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & -Q^{-1}CQ \\ & 1 \end{pmatrix}$$

のように書き直す (Z は $Z^{(n)}$ の略記), (2.13)₂ の逆行列 $R_2^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -Q^{-1}CQ \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & Q' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \\ -QAQ^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{を使うと (2.16) は}$$

$$\begin{aligned} ((Z'(y))^{-1}, \eta(Z'(y))^{-1}) R_2^{-1} \begin{pmatrix} Y(x) \\ xY(x) \end{pmatrix} &= ((Z'(y))^{-1}, Z(y)^{-1}) \begin{pmatrix} Q & \\ & Q' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} \\ &= (Z'(y))^{-1} Q^{-1} Y(x) + Z(y)^{-1} Q^{-1} Y(x) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \sum_{i,j=0}^1 (R_2^{-1})_{ij} y^i x^j = Z'(y) \left((Z'(y))^{-1} Q^{-1} Y(x) + Z(y)^{-1} Q^{-1} Y(x) \right) Y(x)^{-1}$$

にまとめられる. 一般の n のときには

$$(2.17) \quad \sum_{i,j=0}^{n-1} (R_n^{-1})_{ij} y^i x^j = Z'(y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (Z^{-(1+k)}(y))^{-1} (Q^{(n)})^{-1} Y^{(n)}(x) \right) Y(x)^{-1}$$

となる. この恒等式の右辺は $(R_n^{-1})_{ij}$ の母函数の役割を果たしている.

3. 3節では, 最も簡単な $P=0$ の場合を考察する. このとき

$$(3.1) \quad \omega=0, \quad \text{故に } \tau = \text{const.} \text{ で, これを 1 に正規化する.}$$

$$(3.2) \quad \textcircled{0} = \textcircled{0}^* = 0, \quad dQ = dC \cdot QA + CQdA, \quad \text{故に } Q_{ij}(A, C) = e^{C \cdot Q_j} Q_{ij}(0, 0).$$

(3.3) $dY = (Cdx + x dC)Y$, 故に (1.11) を考慮して $Y(x; A, C) = e^{Cx}$.

よして $R_n = (R_{ij})_{i,j=0,1,\dots,n-1}$ は (3.4) で与えられる.

$$(3.4) \quad R_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} k! \binom{i}{k} \binom{j}{k} C^{i-k} Q A^{j-k}.$$

例 $R_4 = \begin{pmatrix} Q & CQ & C^2Q & C^3Q \\ QA & CQA+Q & C^2QA+2CQ & C^3QA+3C^2Q \\ QA^2 & CQA^2+2QA & C^2QA^2+4CQA+2Q & C^3QA^2+6C^2QA+6CQ \\ QA^3 & CQA^3+3QA^2 & C^2QA^3+6CQA^2+6QA & C^3QA^3+9C^2QA^2+18CQA+6Q \end{pmatrix}.$

このとき $\Lambda^{(n)} = K^{(n)} = \begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & n \end{pmatrix} \quad (n=0,1,2,\dots)$ であり、特異点 $x=a_1,$

\dots, a_r は全て見かけの特異点. 従って $Y(x)$ のモノドロミー構造

は trivial になり、 τ 函数の変換公式-定理 2.3- は

$$(3.5) \quad \tau^{(n)} = \det R_n, \quad R_n \text{ は (3.4) で, } Q \text{ は (3.2) で各々与えられる.}$$

となる.

ここで更に $r=2$ の場合に (3.5) の τ 函数を実際に計算してみる. 4節で述べるように $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と取る. 又

(2.11) を考慮して (3.2) から $Q = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \xi = \text{const. } e^t$ と取る. この

とき (3.4) の $2n \times 2n$ 行列 $R_n = (R_{ij})_{i,j=0,1,2,\dots,2n-1}$ の行と列を同時に

並べかえて作ると $\tilde{R}_n = (Y_{ij})_{i,j=0,2,\dots,2n-2,1,3,\dots,2n-1}$ は

$$(3.6) \quad \tilde{R}_n = \left[\begin{array}{c|c} F_n G_n \xi - G_n F_n & G_n \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline F_n & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0! \\ \vdots \\ (n-1)! \\ 0! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{array} \right]$$

の形をしている, 但し

$$(3.7) \quad F_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (n) & & 1 \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 \end{bmatrix}, \quad G_n = \begin{bmatrix} 1 & t & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & t & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & t \end{bmatrix}$$

とし、又 $J_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & (-1)^n \end{bmatrix}$ とする. $J_n^2 = 1, F_n^{-1} = J_n F_n J_n, G_n^{-1} =$

$J_n G_n J_n, \det F_n = \det G_n = 1$ を使うと

$$(3.8) \quad \det(F_n G_n \xi - G_n F_n) = \det(\xi - J_n F_n^{-1} G_n F_n G_n^{-1} J_n) = \det(\xi - (F_n J_n G_n)^2)$$

となる。(3.6) から $\det \tilde{R}_n = (0! 1! \dots (n-1)!)^2 \det(\xi - (F_n J_n G_n)^2)$ だから

$$(3.9) \quad \varphi^{(n)}(\lambda; t) = \det(\lambda - F_n J_n G_n) : F_n J_n G_n \text{ の特性多項式}$$

と おく と (3.5) から

$$(3.10) \quad \tau^{(n)}(\xi; t) = (1! \dots (n-1)!)^2 (-)^n \varphi^{(n)}(\sqrt{\xi}; t) \varphi^{(n)}(-\sqrt{\xi}; t)$$

である。(3.10) の定数 τ かつ $(1! \dots (n-1)!)^2$ は (4.22) の正規化を使之

$$\text{は } \tau < \tau_* \text{ なる: } \tau_*^{(n)}(\xi; t) = (-)^n \varphi^{(n)}(\sqrt{\xi}; t) \varphi^{(n)}(-\sqrt{\xi}; t).$$

$$F_n J_n G_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 1 & t-1 & \frac{t^2-t}{2} & \dots & \vdots \\ 1 & t-2 & \frac{t^2-2t+1}{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t-(n-1) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{だから (3.9), (3.10) の計算を突} \\ \text{行して次の結果を得る。}$$

$$(3.11) \quad \varphi^{(1)} = 1, \quad \varphi^{(2)} = \lambda - 1, \quad \varphi^{(3)} = \lambda^2 - t\lambda - 1, \quad \varphi^{(4)} = \lambda^3 - (\frac{1}{2}t^2 - t + 1)\lambda^2 - (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)\lambda + 1,$$

$$\varphi^{(5)} = \lambda^4 - (\frac{1}{6}t^3 - t^2 + 2t)\lambda^3 - (\frac{1}{12}t^4 + t^2 + 2)\lambda^2 + (\frac{1}{6}t^3 + t^2 + 2t)\lambda + 1,$$

$$\varphi^{(6)} = \lambda^5 - (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + 2t^2 - 2t + 1)\lambda^4 - (\frac{1}{144}t^6 - \frac{1}{24}t^5 + \frac{7}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 2t + 2)\lambda^3$$

$$+ (\frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{24}t^5 + \frac{7}{24}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + t^2 - 2t + 2)\lambda^2 + (\frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 2t^2 + 2t + 1)\lambda - 1.$$

$$(3.12) \quad \tau_*^{(1)} = 1, \quad \tau_*^{(2)} = \xi - 1, \quad \tau_*^{(3)} = (\xi - 1)^2 - t\xi, \quad \tau_*^{(4)} = (\xi - 1)^3 - 3t\xi(\xi - 1) + t^2\xi(\xi + 1) - \frac{1}{4}t^4\xi(\xi - 1),$$

$$\tau_*^{(5)} = (\xi - 1)^4 - 6t\xi(\xi - 1)^2 + 4t^2\xi(\xi - 1)(\xi + 1) - \frac{1}{6}t^4\xi(11\xi^2 - 4\xi + 1) + \frac{1}{3}t^2\xi(\xi - 1)(\xi + 1) - \frac{1}{24}t^6\xi(\xi^2 - 8\xi + 1) + \frac{1}{144}t^8\xi^2,$$

$$\tau_*^{(6)} = (\xi - 1)^5 - 10t\xi(\xi - 1)^3 + 10t^2\xi(\xi - 1)^2(\xi + 1) - \frac{5}{3}t^4\xi(\xi - 1)(4\xi^2 + \xi + 4) + \frac{1}{4}t^2\xi(\xi + 1)(9\xi^2 - 10\xi + 9) - \frac{31}{12}t^6\xi(\xi - 1)^3$$

$$+ \frac{1}{24}t^4\xi(\xi + 1)(\xi^2 - 12\xi + 1) - \frac{1}{2^6 3^2}t^8\xi(\xi - 1)(\xi^2 - 8\xi + 1) - \frac{5}{144}t^6\xi^2(\xi + 1) + \frac{11}{2^6 3^3}t^8\xi^2(\xi - 1) - \frac{1}{2^6 3^3}t^6\xi^2(\xi + 1) + \frac{1}{2^2 3^4}t^8\xi^2(\xi - 1).$$

4. 4 節では $r=2$ の場合に話を限定する。(1.10) の $\tau(A, C)$, (1.8)

の $\omega(A, C)$ で $\Pi \rightarrow X - \eta - A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ と特殊化するこゝと $\Pi = \delta'$

$$(4.1) \quad \tau_{\Pi}(t) = \tau((t_0), (1_0)), \quad \omega_{\Pi}(t) = \omega((t_0), (1_0)); \quad \tau_{\Pi}(t) = \tau((1_0), (t_0)), \quad \omega_{\Pi}(t) = \omega((1_0), (t_0))$$

と おく。 $t \frac{d}{dt} (c_1 - c_2)(a_1 - a_2)$ と取るこゝ $\kappa_1 + \kappa_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ より

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad \omega(A, C) &= \omega_{\text{I}}(t) + \kappa_1 d(c_1 a_2) + \lambda_1 d(c_2 a_1) + (\kappa_2 - \lambda_1) d(c_2 a_2) + (\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1) d \log(c_1 - c_2), \\
&= \omega_{\text{II}}(t) + \kappa_1 d(c_1 a_2) + \lambda_1 d(c_2 a_1) + (\kappa_2 - \lambda_1) d(c_2 a_2) - (\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1) d \log(a_1 - a_2), \\
\tau(A, C) &= e^{\kappa_1 c_1 a_2 + \lambda_1 c_2 a_1 + (\kappa_2 - \lambda_1) c_2 a_2} (c_1 - c_2)^{(\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1)} \tau_{\text{I}}(t), \\
&= e^{\kappa_1 c_1 a_2 + \lambda_1 c_2 a_1 + (\kappa_2 - \lambda_1) c_2 a_2} (a_1 - a_2)^{-(\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1)} \tau_{\text{II}}(t),
\end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \omega_{\text{II}}(t) = \omega_{\text{I}}(t) + (\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1) d \log t, \quad \tau_{\text{II}}(t) = t^{(\kappa_1 - \lambda_1)(\kappa_2 - \lambda_1)} \tau_{\text{I}}(t)$$

である。従って $\omega(A, C), \tau(A, C)$ は本質的に 1 変数 $t = (c_1 - c_2)(a_1 - a_2)$ の 1 form であり、函数である。 $Q(A, C), P(A, C), Y(x; A, C)$ の 1 変数 t への reduction もでき、

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad e^{c_2 a_2} Q(A, C) &= e^{c_2 a_2} (c_1 - c_2)^{-K} Q_{\text{I}}(t) e^{c_2 A} (c_1 - c_2)^{\Lambda} = e^{c_2 a_2} (a_1 - a_2)^K Q_{\text{II}}(t) e^{c_2 A} (a_1 - a_2)^{-\Lambda}, \\
e^{-c_2 a_2} P(A, C) &= e^{-c_2 A} (c_1 - c_2)^{-\Lambda} P_{\text{I}}(t) e^{-c_2 a_2} (c_1 - c_2)^K = e^{-c_2 A} (a_1 - a_2)^{\Lambda} P_{\text{II}}(t) e^{-c_2 a_2} (a_1 - a_2)^{-K}, \\
e^{-c_2(x-a_2)} Y(x; A, C) &= e^{c_2 a_2} (c_1 - c_2)^{-K} Y_{\text{I}}((c_1 - c_2)(x - a_2); t) = e^{c_2 a_2} (a_1 - a_2)^K Y_{\text{II}}\left(\frac{x - a_2}{a_1 - a_2}; t\right),
\end{aligned}$$

$$(4.5) \quad Q_{\text{II}}(t) = t^{-K} Q_{\text{I}}(t) t^{\Lambda}, \quad P_{\text{II}}(t) = t^{-\Lambda} P_{\text{I}}(t) t^K, \quad Y_{\text{II}}(x; t) = t^{-K} Y_{\text{I}}(tx; t).$$

I, II のどちらにするかは問題に応じて選択すればよい。以後 II: $A = ({}^1_0), C = ({}^t_0)$ の場合で話を進めることにし、添字 II は省略する。

このとき方程式 (1.9), (1.3), (1.5) は

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & (QP)_{12} \\ (QP)_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{t} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (QP)_{12} \\ (QP)_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad \left(\left(x - \frac{1}{dt} \frac{Q_{11}}{Q_{21}} \right) \begin{pmatrix} Q_{22} & -Q_{12} \\ \frac{d}{dt} - ({}^t_0) \end{pmatrix} - QP \right) Y &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} Y &= \begin{pmatrix} x & \frac{1}{t} (QP)_{12} \\ \frac{1}{t} (QP)_{21} & 0 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}$$

となり、(1.8) は

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} \log \tau(t) = \frac{1}{t} (QP)_{12} (QP)_{21} + Q_{11} P_{11}$$

となる。

特に (4.6) は $y(t) = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$ に関して次の Painlevé V 型方程式に帰着される [6], [7].

$$(4.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma}{t} y - \frac{1}{2} \frac{y(y+1)}{y-1},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa_2)^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \kappa_1)^2, \quad \gamma = -(1 + \kappa_1 + \kappa_2).$$

τ 函数は、この y と

$$(4.10) \quad t \frac{d}{dt} \log \tau + \kappa_1(\lambda_1 - \kappa_2) = \frac{1}{4y(y-1)^2} \left\{ \left(t \frac{dy}{dt} \right)^2 - (ty - (y-1)(\lambda_1 - \kappa_2)y - (\lambda_1 + \kappa_1)) \right\} + \frac{\lambda_1 \kappa_1}{y}$$

と結ばれている。 τ の満たす方程式は広田 [3] の意味で

$$(4.11) \quad \begin{cases} D_t^2 \tau \cdot \tau + 2D_t \tau \cdot \dot{\tau} = 0, \\ [t^3 D_t^4 - t(t^2 + 2(2\lambda_1 + \kappa_1 - \kappa_2)t + (\kappa_1 - \kappa_2)^2 - 2)D_t^2 - 2\kappa_1(\lambda_1 - \kappa_2)(t + \kappa_1 - \kappa_2)] \tau \cdot \tau \\ + 2[4t^2 D_t^2 - (2\lambda_1 + \kappa_1 - \kappa_2)t - (\kappa_1 - \kappa_2)^2] \tau \cdot \dot{\tau} + 4t \dot{\tau} \cdot \dot{\tau} = 0 \end{cases}$$

で与えられる (cf. [9]; [15]).

定理 2.4 と系 2.5 から

$$(4.12) \quad Q^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(n)}} \begin{pmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & -\alpha_2^{(n-1)} \\ -\alpha_3^{(n-1)} & \alpha_1^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$Q^{(m)} P^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(m)}} \begin{pmatrix} (n+\kappa_1)\tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \beta_3^{(n)} & (n+\kappa_2)\tau^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P^{(m)} Q^{(n)} = \frac{1}{\tau^{(m)}} \begin{pmatrix} (n+\lambda_1)\tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \gamma_3^{(n)} & (n+\lambda_2)\tau^{(n)} \end{pmatrix}$$

とおける。このときこれらの量の間には

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \end{vmatrix} &= (n+\kappa_1)(\tau^{(n)})^2, & \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} &= (n+\kappa_2)(\tau^{(n)})^2, \\ \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \end{vmatrix} &= (n+\lambda_1)(\tau^{(n)})^2, & \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} &= (n+\lambda_2)(\tau^{(n)})^2, \\ \begin{vmatrix} \alpha_2^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} &= (\kappa_1 - \lambda_1)(\tau^{(n)})^2, & \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_4^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \end{vmatrix} &= (\kappa_2 - \lambda_1)(\tau^{(n)})^2, \\ \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \end{vmatrix} &= \beta_2^{(n)} \tau^{(n)}, & \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_4^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} &= \beta_3^{(n)} \tau^{(n)}, \\ \begin{vmatrix} \alpha_4^{(n-1)} & \alpha_2^{(n-1)} \\ \alpha_4^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \end{vmatrix} &= \gamma_2^{(n)} \tau^{(n)}, & \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \alpha_3^{(n-1)} \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \end{vmatrix} &= \gamma_3^{(n)} \tau^{(n)}, \end{aligned}$$

の関係がある。変換公式(2.1), (2.6), (2.11)から更に次の関係が得られる。これは $\tau^{(n)}, \beta_j^{(n)}, \gamma_j^{(n)}, \alpha_i^{(n)}, Y^{(n)}$ から順に $\tau^{(n+1)}, \beta_j^{(n+1)}, \gamma_j^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}, Y^{(n+1)}$ と計算するのに役立つ。

命題 4.1

(4.14) $\tau^{(n)} \tau^{(n+1)} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \end{vmatrix} .$

(4.15) $\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \beta_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t \alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t \alpha_3^{(n)} \alpha_4^{(n)} .$

(4.16)^{5*} $\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \gamma_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t \alpha_2^{(n)} \alpha_4^{(n)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_3^{(n)} \\ \tau^{(n+1)} & \gamma_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = -t \alpha_1^{(n)} \alpha_3^{(n)} .$

(4.16) $\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ (n+1+\kappa_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_1^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_3^{(n)} \beta_2^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ (n+1+\kappa_3)\tau^{(n+1)} & \alpha_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_4^{(n)} \beta_2^{(n+1)} ,$

$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ (n+1+\kappa_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)} \beta_3^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ (n+1+\kappa_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_4^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_2^{(n)} \beta_3^{(n+1)} .$

(4.16)^{*} $\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ (n+1+\lambda_1)\tau^{(n+1)} & \alpha_1^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_2^{(n)} \gamma_3^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ (n+1+\lambda_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)} \gamma_2^{(n+1)} ,$

$\begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ (n+1+\lambda_3)\tau^{(n+1)} & \alpha_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_4^{(n)} \gamma_3^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ (n+1+\lambda_2)\tau^{(n+1)} & \alpha_4^{(n+1)} \end{vmatrix} = \alpha_3^{(n)} \gamma_2^{(n+1)} .$

(4.17) $\begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \gamma_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1 - \lambda_1) \alpha_1^{(n)} \tau^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \gamma_2^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1 - \lambda_2) \alpha_2^{(n)} \tau^{(n+1)} ,$

$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \gamma_3^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1 - \lambda_2) \alpha_3^{(n)} \tau^{(n+1)} , \quad \begin{vmatrix} \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \gamma_2^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = (\kappa_1 - \lambda_1) \alpha_4^{(n)} \tau^{(n+1)} .$

(4.18) $Y^{(n+1)} = \left(x - \frac{1}{\tau^{(n)} \tau^{(n+1)}} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \alpha_3^{(n)} & -\alpha_2^{(n)} \end{pmatrix} \right) Y^{(n)} .$

命題 4.2

(4.19) $t^2 \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \frac{d\tau^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tau^{(n)}}{dt^2} \end{vmatrix} = -\beta_2^{(n)} \beta_3^{(n)} = \begin{vmatrix} \tau^{(n+1)} & (n+\kappa_2)\tau^{(n)} \\ (n+\kappa_1)\tau^{(n)} & \tau^{(n+1)} \end{vmatrix} .$

$\tau^{(n)} = t^{(n+\kappa_1)(n+\kappa_2)} \tilde{\tau}^{(n)} , \quad \tilde{\tau}^{(n)} = e^{\frac{1}{2}t^2} f_n$ とおけば(4.19)は

(4.20) $\begin{vmatrix} \tilde{\tau}^{(n)} & \frac{d\tilde{\tau}^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\tilde{\tau}^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tilde{\tau}^{(n)}}{dt^2} \end{vmatrix} = \tilde{\tau}^{(n-1)} \tilde{\tau}^{(n+1)} ,$

(4.21) $\begin{vmatrix} f_n & \frac{df_n}{dt} \\ \frac{df_n}{dt} & \frac{d^2f_n}{dt^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{vmatrix}$

に書き直される。(4.21)は戸田格子の方程式に他ならない[4].

τ 函数の定数倍の正規化を(2.10)の代りに

$$(4.22) \quad \det Q^{(n)} = (n+k_1)! (n+k_2)! \frac{\tau_*^{(n+1)}}{\tau_*^{(n)}}$$

よすれば (4.19) は

$$(4.19)_* \quad t^2 \begin{vmatrix} \tau_*^{(n)} & \frac{d\tau_*^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\tau_*^{(n)}}{dt} & \frac{d^2\tau_*^{(n)}}{dt^2} \end{vmatrix} = (n+k_1)(n+k_2) \begin{vmatrix} \tau_*^{(n-1)} & \tau_*^{(n)} \\ \tau_*^{(n)} & \tau_*^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

となる。(4.19)* から 戸田方程式 (4.21) の変換は $f_n = a_n \tau_*^{(n)}$, $a_n = G(n+1+k_1) G(n+1+k_2) t^{-(n+k_1)(n+k_2)} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ によって与えられる。ここで $G(z)$ は G 函数で $\Gamma(z) = \frac{G(z+1)}{G(z)}$, $G(n+1) = 1! \cdots (n-1)!$ の性質をもつ [1]。

ここで f_n のみならず変換するフクター a_n も 戸田方程式を満足することを注意しておく。

変形方程式 (4.6) は 'τ 函数' [15] で書けば 次の二次形式をとる。

$$(4.23) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} - \alpha_1^{(n)} \tau^{(n)} = \frac{1}{t} \alpha_3^{(n)} \beta_2^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_4^{(n)} \beta_2^{(n)}, \\ \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_1^{(n)} \beta_3^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_2^{(n)} \beta_3^{(n)}, \\ \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_1^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_1^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_3^{(n+1)} \beta_2^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_2^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_4^{(n+1)} \beta_2^{(n)}, \\ \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_3^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \alpha_1^{(n+1)} \beta_3^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \alpha_4^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} + \alpha_4^{(n+1)} \tau^{(n)} = \frac{1}{t} \alpha_2^{(n+1)} \beta_3^{(n)}. \end{cases}$$

$$(4.24) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\beta_2^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{t} \beta_2^{(n)} \tau^{(n)} = -\alpha_2^{(n+1)} \alpha_1^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\beta_3^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{t} \beta_3^{(n)} \tau^{(n)} = -\alpha_4^{(n+1)} \alpha_3^{(n)}, \\ \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_2^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\gamma_2^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = -\alpha_4^{(n+1)} \alpha_2^{(n)}, & \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \gamma_3^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\gamma_3^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = -\alpha_3^{(n+1)} \alpha_1^{(n)}. \end{cases}$$

命題 4.3

$$(4.25) \quad \begin{vmatrix} \tau^{(n)} & \tau^{(n+1)} \\ \frac{d\tau^{(n)}}{dt} & \frac{d\tau^{(n+1)}}{dt} \end{vmatrix} = \alpha_1^{(n)} \alpha_4^{(n)}.$$

$$(4.26) \quad \tau^{(n)} \frac{d\tau^{(n)}}{dt} = \frac{1}{t} \beta_2^{(n)} \beta_3^{(n)} + \alpha_4^{(n+1)} \alpha_1^{(n)}.$$

$$(4.27) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} \\ \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} + \alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} = \frac{1}{t} \beta_2^{(n)} \tau^{(n+1)}, & \begin{vmatrix} \alpha_3^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t} \beta_3^{(n)} \tau^{(n+1)}, \\ \begin{vmatrix} \alpha_1^{(n)} & \alpha_4^{(n)} \\ \frac{d\alpha_1^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_4^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} + \alpha_1^{(n)} \alpha_4^{(n)} = \frac{1}{t^2} \begin{vmatrix} \beta_2^{(n)} & \beta_3^{(n)} \\ \beta_2^{(n+1)} & \beta_3^{(n+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} \\ \frac{d\alpha_2^{(n)}}{dt} & \frac{d\alpha_3^{(n)}}{dt} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

5. 5節では $r=2$ の場合の例を二つ挙げる。例1は 3節で τ 函数を計算した $P=0$ の場合であり、例2は $B_1=0$ の場合である。これら二つの例では、実際には、 $I: A=(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), C=(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ として考える方が簡単なので、(4.6), (4.7) に相当する方程式を書いておく。今 $dA=(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})dt, dC=0$ 従って $\tau \oplus = 0$ で、このとき (1.9), (1.1), (1.5) は次のようになる。

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (PQ)_{12} \\ (PQ)_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & (PQ)_{12} \\ (PQ)_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.2) \quad \frac{d}{dx} Y = \left(\frac{B_1}{x-t} + \frac{B_2}{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) Y, \quad \frac{\partial}{\partial t} Y = -\frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} Q_{11} & \\ & Q_{22} \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) Y.$$

例1. $P=0$.

このとき $QP=0, PQ=0$. 故に $K=\Lambda=0$. (4.5) から $Q_{II} = Q_I = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 従って (3.4) から $R_{n,II} = {}^t(R_{n,I})$ がわかり、(3.5) から $\tau_{II}^{(n)} = \tau_I^{(n)}$. これは (4.3) からも言えている。 (4.22) のように正規化した $\tau_*^{(n)}$ を使うと、この $P^{(0)}=0$ の場合、(4.12) は

$$(5.3) \quad Q^{(n)} = \frac{n!}{\tau_*^{(n)}} \begin{pmatrix} \xi \alpha^{(n)} & \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\alpha}^{(n)} & \alpha^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P^{(n)} = \frac{1}{(n-1)! \tau_*^{(n)}} \begin{pmatrix} \alpha^{(n)} & -\tilde{\alpha}^{(n)} \\ -\tilde{\alpha}^{(n)} & \xi \alpha^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$B^{(n)} = \frac{n}{\tau_*^{(n)}} \begin{pmatrix} \tau_*^{(n)} & -t \xi \beta^{(n)} \\ -t \beta^{(n)} & \tau_*^{(n)} \end{pmatrix}$$

の形をしていることがわかる。但し $p(\xi, t) \in \mathbb{C}[\xi, t]$, $\deg_{\xi} p = n$ (多項式 p の ξ に関する次数が n であることを $\deg_{\xi} p = n$ と記す) に対して、

$$(5.4) \quad \tilde{p}(\xi, t) = (-\xi)^n p(\xi^{-1}, -t)$$

と定義する。命題4.1 (の I の場合) から次の結果を得る。この場合の τ 函数の変換公式は [10] に与えられている。

$$(5.5) \quad \tau_*^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi, t], \quad \deg_{\xi} \tau_*^{(n)} = n, \quad \deg_t \tau_*^{(n)} = \left[\frac{n^2}{2} \right], \quad \tau_*^{(n)}(\xi, 0) = (\xi-1)^n, \\ \tau_*^{(n)}(0, t) = (-1)^n, \quad \tilde{\tau}_*^{(n)} = \tau_*^{(n)}.$$

$\tau_*^{(n)}$ の計算結果は (3.12) の通りである。

$$(5.6) \quad \beta^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi, t], \quad \deg_{\xi} \beta^{(n)} = n, \quad \deg_t \beta^{(n)} = \left[\frac{n^2}{2} \right] + n, \quad \beta^{(n)}(\xi, 0) = (\xi-1)^n, \\ \beta^{(n)}(0, t) = (-1)^n F(-n, 2; -t) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{t^k}{(1+k)!}, \quad \tilde{\beta}^{(n)} = \beta^{(n)}. \\ \beta^{(0)} = 1, \quad \beta^{(1)} = \xi - 1 - \frac{1}{2}t(\xi+1), \quad \beta^{(2)} = (\xi-1)^2 - t(\xi-1)(\xi+1) + \frac{1}{6}t^2(\xi^2+4\xi+1) + \frac{1}{12}t^4\xi, \\ \beta^{(3)} = (\xi-1)^3 - \frac{3}{2}t(\xi-1)^2(\xi+1) + \frac{1}{2}t^2(\xi-1)(\xi^2+4\xi+1) - \frac{1}{24}t^3(\xi+1)(\xi^2+10\xi+1) + \frac{5}{12}t^4\xi(\xi-1) \\ - \frac{1}{6}t^5\xi(\xi+1) + \frac{1}{36}t^6\xi(\xi-1) - \frac{1}{288}t^7\xi(\xi+1).$$

$$(5.7) \quad \alpha^{(n)} \in \mathbb{Q}[\xi, t], \quad \deg_{\xi} \alpha^{(n)} = n, \quad \deg_t \alpha^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \alpha^{(n)}(\xi, 0) = (\xi-1)^n, \quad \tilde{\alpha}^{(n)} \neq \\ \text{同じ性質をもつ。}$$

$$\alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(1)} = \xi - 1 - t, \quad \alpha^{(2)} = (\xi-1)^2 - 2t(\xi-1) + \frac{1}{2}t^2(\xi+1) - \frac{1}{2}t^3\xi, \\ \alpha^{(3)} = (\xi-1)^3 - 3t(\xi-1)^2 + \frac{3}{2}t^2(\xi-1)(\xi+1) - \frac{1}{6}t^3(13\xi^2-8\xi+1) + \frac{1}{12}t^4\xi(7\xi+11) - \frac{1}{12}t^5\xi(\xi-2) + \frac{1}{24}t^6\xi, \\ \alpha^{(0)} = 1, \quad \alpha^{(1)} = \xi - 1 - t\xi, \quad \alpha^{(2)} = (\xi-1)^2 - 2t\xi(\xi-1) + \frac{1}{2}t^2\xi(\xi+1) + \frac{1}{2}t^3\xi, \\ \alpha^{(3)} = (\xi-1)^3 - 3t\xi(\xi-1)^2 + \frac{3}{2}t^2\xi(\xi-1)(\xi+1) - \frac{1}{6}t^3\xi(\xi^2-8\xi+13) - \frac{1}{12}t^4\xi(11\xi+7) + \frac{1}{12}t^5\xi(2\xi-1) - \frac{1}{24}t^6\xi^2.$$

$$(5.8) \quad \begin{vmatrix} \tau^{(m)} & \tau^{(n)} \\ \frac{d\tau^{(m)}}{dt} & \frac{d\tau^{(n)}}{dt} \end{vmatrix} = \xi (2\alpha^{(m)}\alpha^{(n)} - t^2(\beta^{(m\nu)})^2) \quad (\text{cf. [10]})$$

$$(5.9) \quad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(1)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(0)} \\ Y_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad Y_1^{(0)} = xu - \frac{t\xi}{\xi-1}(u-1), \quad Y_2^{(0)} = x - \frac{t}{\xi-1}(u-1),$$

$$u = \text{const. } e^x.$$

$$\underline{181} \quad B_1 = 0.$$

このとき Y の線型方程式 (5.2) は $\frac{d}{dx} Y = \left(\frac{B}{x} + (1, 0) \right) Y$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ の形をとり、確定特異点 $x=0$ での指数は $k_1+k_2 < 0$ である。変形方程式 (5.1) を解いて、

$$Q^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}(k_2\zeta + \eta) & 1 \\ -\zeta + \frac{1}{t}(k_2\zeta + \eta) & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{を得る。但し } \zeta, \eta \text{ は}$$

$$(5.10) \quad t \frac{d}{dt} \zeta = k_2 \zeta + \eta, \quad t \frac{d}{dt} \eta = (1+k_1)k_2 \zeta + (1+k_1+t)\eta$$

の解。即ち $\zeta = C_1 \cdot F(-k_2, -k_1-k_2; t) + C_2 \cdot t^{1+k_1+k_2} F(1+k_1, 2+k_1+k_2; t)$,

$$\eta = t \frac{d}{dt} \zeta - k_2 \zeta = (-k_2) (C_1 \cdot F(1-k_2, -k_1-k_2; t) + C_2 \cdot t^{1+k_1+k_2} F(2+k_1, 2+k_1+k_2; t))$$

(C_1, C_2 は定数) である。 $Q^{(0)}, P^{(0)}$ が求まったので Y の方程式 (5.2)

は具体的に書き下せる:

$$(5.11) \quad \left(\left(x - \frac{1}{t} \begin{pmatrix} k_2\zeta + \eta \\ (k_2-t)\zeta + \eta \end{pmatrix} \right) (1, -1) \left(\frac{d}{dx} - (1, 0) \right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1, k_2) \right) Y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Y = -\frac{1}{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}(k_2\zeta + \eta) \\ -\zeta + \frac{1}{t}(k_2\zeta + \eta) \end{pmatrix} (1, -1) \left(\frac{d}{dx} - (1, 0) \right) Y.$$

W, V と

$$(5.12) \quad \frac{d}{dx} W = W + V, \quad x \frac{d}{dx} V = k_1 W + (k_1+k_2)V$$

の解。即ち $W = C_3 \cdot F(-k_2, -k_1-k_2; x) + C_4 \cdot x^{1+k_1+k_2} F(1+k_1, 2+k_1+k_2; x)$,

$$V = \frac{d}{dx} W - W = -\frac{k_1}{k_1+k_2} (C_3 \cdot F(-k_2, 1-k_1-k_2; x) + C_4 \cdot x^{k_1+k_2} F(k_1, 1+k_1+k_2; x)) \quad (C_3, C_4: \text{定数})$$

とすれば $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} W+V \\ V \end{pmatrix}$ は (5.11) を満たす。

ここで $\tau_{II}^{(0)} = t^{k_1 k_2}$ 及び $\tau_{II}^{(1)} = t^{k_1 k_2} \zeta$ と (4.10) の結果から得ている

$y^{(0)}$ 及び $y^{(1)}$ は Riccati 方程式 $t \frac{d}{dt} y^{(0)} = -t y^{(0)} - (y^{(0)} - 1)(k_2 y^{(0)} + k_1)$ 及び

$t \frac{d}{dt} y^{(1)} = t y^{(1)} + (y^{(1)} - 1)((1+k_2)y^{(1)} + (1+k_1))$ を満足している [10]

ことに注意する。(4.3) より $\tau_{II}^{(n)} = t^{k_1 k_2} \tau_I^{(n)}$ だから (4.19) の $\tau_I^{(n)}$

について書き直すと

$$(5.13) \quad \begin{vmatrix} \tau_I^{(n)} & t \frac{d\tau_I^{(n)}}{dt} \\ t \frac{d\tau_I^{(n)}}{dt} & t^2 \frac{d^2 \tau_I^{(n)}}{dt^2} - k_1 k_2 \tau_I^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_I^{(n+1)} & (n+k_2) \tau_I^{(n)} \\ (n+k_1) \tau_I^{(n)} & \tau_I^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

となる。(5.13) と命題 4.1 (の I の場合) から次の結果を得る。

$$(5.14) \quad \tau_I^{(0)} = 1, \quad \tau_I^{(1)} = \zeta, \quad \tau_I^{(2)} = ((1+k_1)\zeta - \eta)((1+k_2)\zeta + \eta) + t\zeta\eta,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(3)} = & (2+\kappa_1+\kappa_2)((1+\kappa_1)\zeta-\eta)^2 \left\{ (2+4\kappa_2+\kappa_1\kappa_2+\kappa_2^2)\zeta + (4+\kappa_1+\kappa_2)\eta \right\} + (1+\kappa_1)^2 \kappa_2 t (2+2\kappa_1+t)\zeta^3 \\ & + (1+\kappa_1)t \left\{ (12+11\kappa_1+5\kappa_2+3\kappa_1^2-\kappa_1\kappa_2+2\kappa_2^2) + (4+3\kappa_1-\kappa_2)t + t^2 \right\} \zeta^2 \eta \\ & - t \left\{ (12+12\kappa_1+6\kappa_2+4\kappa_1^2+2\kappa_2^2) + (1+2\kappa_1-\kappa_2)t \right\} \zeta \eta^2 + (\kappa_1-\kappa_2)t \eta^3. \end{aligned}$$

$$(5.15) \quad (4.12) \text{ の 記号 } z) \quad \alpha_1^{(-1)} = \kappa_2, \alpha_2^{(-1)} = 0, \alpha_3^{(-1)} = \kappa_1, \alpha_4^{(-1)} = 0; \alpha_1^{(0)} = \frac{1}{t}(\kappa_2\zeta + \eta), \\ \alpha_2^{(0)} = 1, \alpha_3^{(0)} = -\zeta + \frac{1}{t}(\kappa_2\zeta + \eta), \alpha_4^{(0)} = 1; \alpha_1^{(1)} = \frac{1}{t}((1+\kappa_1)\zeta - \eta)(\kappa_2\zeta + \eta) + \zeta\eta, \\ \alpha_2^{(1)} = (1+\kappa_1)\zeta - \eta, \alpha_3^{(1)} = \frac{1}{t}((1+\kappa_1+t)\zeta - \eta)(\kappa_2\zeta + \eta) - (1+\kappa_2)\zeta^2, \alpha_4^{(1)} = (1+\kappa_1+t)\zeta - \eta.$$

$$(5.16) \quad \beta_2^{(0)} = \kappa_2, \beta_3^{(0)} = \kappa_1; \beta_2^{(1)} = -\eta, \beta_3^{(1)} = (\kappa_1 - \kappa_2 + t)\zeta - \eta; \beta_2^{(2)} = -(1+\kappa_1)^2 \kappa_2 \zeta^2 - (1+\kappa_1) \times \\ (2+\kappa_1 - \kappa_2 + t)\zeta\eta + (2+\kappa_1)\eta^2, \beta_3^{(2)} = ((1+\kappa_1+t)^2 - (1+\kappa_1)(1+\kappa_2))\zeta^2 - \{(2+3\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_1\kappa_2 - \kappa_2^2) + (3+\kappa_2)t\}\zeta\eta \\ + (2+\kappa_2)\eta^2.$$

$$(5.17) \quad Y^{(n)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{と } \vec{v} \text{ と } \vec{w}. \quad Y_1^{(0)} = w+v, Y_2^{(0)} = v; Y_1^{(1)} = (x - \kappa_2 - \frac{\eta}{\zeta})w + xv, \\ Y_2^{(1)} = (t - \kappa_2 - \frac{\eta}{\zeta})w + xv; Y_1^{(2)} = (x - 1 - \kappa_1 - \kappa_2)(x-t)w + x(x-t)v + \frac{(1+\kappa_1)\zeta - \eta}{t} \left\{ \right. \\ \left. ((x-1-\kappa_1-\kappa_2)t + (1+\kappa_1)x)\zeta - x\eta \right\} w + xt\zeta v \}, Y_2^{(2)} = -(1+\kappa_1+\kappa_2)(x-t)w + x(x-t)v \\ + \frac{(1+\kappa_1+t)\zeta - (1+t)\eta}{t} \left\{ ((x-1-\kappa_1-\kappa_2)t + (1+\kappa_1)x)\zeta - x\eta \right\} w + xt\zeta v \}.$$

参考文献

- [1] E.W. Barnes, Quart. J. Math. 31 (1900) 264.
- [2] L. Schlesinger, J. Reine u. Angew. Math. 141 (1912) 96.
- [3] R. Hirota, Lect. Notes in Math. 515, Springer (1976) 40.
- [4] R. Hirota and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. Suppl. 59 (1976) 64.
- [5] K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear differential equations with irregular singular points, RIMS preprint 301 (1979).

- [6] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri and M. Sato, Density matrix of an impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent, RIMS preprint 303 (1979), Physica D1 (1980), in press.
- [7] M. Jimbo, T. Miwa, M. Sato and Y. Môri, Holonomic quantum fields — The unanticipated link between deformation theory of differential equations and quantum fields —, RIMS preprint 305 (1979).
- [8] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations I, II, preprint, Tokyo Univ. (1980).
- [9] 大石進一, 広田の方法. 逆散乱法, Bäcklund変換の間の関係について, RIMS講究録 375 (1980) 112.
- [10] 毛織泰子, Painlevé V型方程式の解について, 同上 74.
- [11] M. Jimbo and T. Miwa, Deformation of linear ordinary differential equations I, RIMS preprint 315 (1980).
- [12] M. Jimbo and T. Miwa, — II, RIMS preprint 316 (1980).
- [13] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I, RIMS preprint 319 (1980).
- [14] Y. Môri, On τ functions of a class of Painlevé type equations I, RIMS preprint 320 (1980).
- [15] M. Jimbo and T. Miwa, [13]と同題 II, RIMS preprint 327 (1980).