数理解析研究所講究録
388巻 1980年 72-83



# $\vartheta$-函数の性質について

横浜国大工学部　戸田盛和

## §1．非線形格子

扱いなれている1次元格子の波動においてどのような$\vartheta$-函数に出会うかという話から始める。相互作用ポテンシャル

$$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar \qquad (ab>0) \tag{1.1}$$

で結ばれた質点（質量$m$）からなる1次元格子を考え，$n$番目の質点の変位を$y_n$とする．上式で$r$は相互変位で，

$$r_n=y_{n+1}-y_n \tag{1.2}$$

を意味する。この力学系の全エネルギーは

$$H=\frac{m}{2}\sum_n \dot{y}_n^2+\sum\phi(r_n) \tag{1.3}$$

であるが，ここで$r_n$に共役な運動量$s_n$を導入すると

$$m\dot{y}_n=s_{n-1}-s_n \tag{1.4}$$

したがってハミルトニアンは

(1.5) $$H = \frac{1}{2m}\sum_n (s_{n-1} - s_n)^2 + \sum_n \phi(r_n)$$

となることが示される．よって運動方程式は（$^\cdot$は時間微分）

(1.6) $$\begin{cases} \dot{r}_n = \dfrac{\partial H}{\partial s_n} = -\dfrac{s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}}{m} \\ \dot{s}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial r_n} = -\phi'(r_n) \end{cases}$$

と書ける．ここで

(1.7) $$f_n(r_n) = -\phi'(r_n) = a(e^{-br_n} - 1)$$

は相互作用による力を意味する．

(1.6) で $s_n$ を消去すると $r_n$ に対する式

(1.8) $$m\frac{d^2 r_n}{dt^2} = a\left[2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}\right]$$

を得るが，これは (1.3) から得る $y_n$ に対する運動方程式を (1.2) で書きかえたものに過ぎない．

(1.6) で $r_n$ を消去すると $s_n$ に対する式を得る．すなわち (1.7) を考慮し (1.6) の第2式から

(1.9) $$r_n = -\frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{1}{a}\dot{s}_n\right)$$

これを (1.6) の第1式に代入して $s_n$ の運動方程式

$$(1.10)\qquad \frac{m}{b}\frac{d}{dt}\log\left(1+\frac{1}{a}\dot{s}_n\right)=s_{n+1}-2s_n+s_{n-1}$$

が得られる。さらに $s_n$ を $t$ で積分し

$$(1.11)\qquad S_n=\int^t s_n\,dt$$

とおくと

$$(1.12)\qquad r_n=-\frac{1}{b}\log\left(1+\frac{1}{a}\ddot{S}_n\right)$$

$$(1.13)\qquad \log\left(1+\frac{1}{a}\ddot{S}_n\right)=\frac{b}{m}\left(S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}\right)$$

また (1.11) の積分定数を適宜にとれば (1.4) から関係式

$$(1.14)\qquad m y_n=S_{n-1}-S_n$$

$$(1.15)\qquad m r_n=-\left(S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}\right)$$

を得る。

以下では単位を変換して

$$(1.16)\qquad a=b=m=1$$

にとる。運動方程式は

$$(1.17)\qquad \log\left(1+\ddot{S}_n\right)=S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}$$

となる。

ここまでは、この体系に外から圧力は加わっていないと考えてきた。外から一定の圧力 $f_{ext}$ が加わっているとするとこれはハミルトニアンに $f_{ext}\sum r_n$ をつけ加えることになる。そうしても $r_n$ に対する式(1.8)は変わらないが、$S_n$ に対する式は

(1.18) $$\log(a'+\ddot{S}_n)=S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}$$

となる。ここで

(1.19) $$a'=a+f_{ext}=1+f_{ext}$$

である。またこのとき(1.18)の左辺は相互変位

(1.20) $$r_n=-\frac{1}{b}\log(a'+\ddot{S}_n)$$

を表わすことになる。

## §2. Jacobi の $\vartheta$ 函数との関係

(1.20)で

(2.1) $$S_n=\log\psi_n$$

とおくと，この式は

$$\boxed{\frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2} = a' + \frac{d^2}{dt^2}\log\psi_n} \tag{2.2}$$

となる．

もしも

$$u = \kappa n + \nu t \tag{2.3}$$

とおくと，Jacobi の $\vartheta$ 函数 $\vartheta_3$，あるいは $\vartheta_4(\equiv\vartheta_0)$ に対する恒等式

$$\frac{\vartheta(u-w)\vartheta(u+w)}{\vartheta(u)^2} = C(w) + A(w)\frac{d^2}{du^2}\log\vartheta(u) \tag{2.4}$$

$$\vartheta(u)=\vartheta_3(u) \text{ あるいは } \vartheta_0(u)$$

が思い出される．ここで $C(w)$，$A(w)$ は $u$ を含まない，$w$ だけの函数である．

簡単のため圧力はないとすると $(a'=1)$ $w=\kappa$ とおき

$$\left\{\begin{aligned} \psi_n &= \frac{\vartheta_0(u)}{C(\kappa)^{n^2/2}} \\ \nu^2 &= \frac{A(\kappa)}{C(\kappa)} \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

が(2.2)の一つの解を与えることがわかる。関係式

$$(2.6)\quad \frac{d^2}{du^2}\log\vartheta_0(u)=(2K)^2\left\{dn^2(2Ku)-\frac{E}{K}\right\}$$

(K, E はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分)

を思い出せば、この解は

$$(2.7)\quad e^{-r_n}-1=(2K\nu)^2\left[dn^2\{2(n\kappa+\nu t)K\}-\frac{E}{K}\right]$$

あるいは

$$(2.8)\quad r_n=-\log\left(1+(2K\nu)^2\left[dn^2\{2(\kappa n+\nu t)K\}-\frac{E}{K}\right]\right)$$

と書ける、いわゆる格子 cnoidal 波であることがわかる。

ここで $\kappa$ は波数で任意の定数であり、振動数 $\nu$ は $\kappa$ の関数として (2.5) から

$$(2.9)\quad \nu^2=\frac{sn^2(2K\kappa)}{(2K)^2\left\{1-\left(1-\frac{E}{K}\right)sn^2(2K\kappa)\right\}}$$

のように与えられる。

この解 cnoidal 波は種類(genus) 1 の $\vartheta$ 函数で与えられたものである。

genus が 2 あるいはより大きい $\vartheta$ 函数の最も簡単なのは多変数 $\vartheta$ 函数である Riemann の $\vartheta$ 函数である。これを用いて周期格子の波が表わされることは Date-Tanaka によって示されている。

一番簡単な周期格子として3個の質点からなるものを考え、そのまた一番簡単な運動として

$$(2.10)\qquad y_1 = -y_3, \qquad y_2 = 0$$

を考えると、$y_1$ あるいは $y_3$ に対して解は

$$(2.11)\quad e^{-y} = 2\lambda_5\lambda_6 - 2(2K\nu)^2 k^2 \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\lambda_6^2-\lambda_4^2}\ t-\delta\right)$$

ただし

$$(2.12)\qquad \nu = \frac{\sqrt{\lambda_6^2-\lambda_4^2}}{2K(k)}$$

と書けることが示される．ここで discriminant は

$$(2.13)\quad \Delta(\lambda) = 8\lambda^3 - 2(\hat{E}+3)\lambda$$

($\hat{E}$は全エネルギー) であり，$\Delta^2-4=0$ の根を小さい方から $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ としている．$\Delta(\lambda)$ が $\lambda=0$ に対して反対称なのは運動が反対称 ($y_1=-y_3$) であるためで，このために，解は一個の sn 函数で表わされた．この意味で，この解は $g=2$ だが縮退しているといえるものである．

より一般的に $g\geq 2$ の場合を扱うには次節の方法が都合よいのではないかと思われる．

## §3 不連続時間の非線形格子

$\delta$を小さな量とすると

(3.1) $$\psi(t+\delta)\psi(t-\delta)=\psi^2+\delta^2(\psi\ddot{\psi}-\dot{\psi}^2)+O(\delta^4)$$
$$=\psi^2\left(1+\delta^2\frac{d^2}{dt^2}\log\psi\right)+O(\delta^4),$$

である．したがって運動方程式(2.2)は$(a'=1)$

(3.2) $$\psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t)-\psi_n^2(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\{\psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta)-\psi_n^2(t)\}$$

となる．この方が(2.2)よりも計算には具合がいい場合が多いと思われる．

ここで$\delta$を有限に止めた式

(3.3) $$\boxed{\psi_{n+1}(t)\psi_{n-1}(t)-\psi_n^2(t)=\frac{1}{\delta^2}\{\psi_n(t+\delta)\psi_n(t-\delta)-\psi_n^2(t)\}}$$

が考えられる。これは時間を不連続にした運動方程式で，非線形格子の拡張として極めて自然なものであろう．将来この方程式がさらに研究されることを望みたい。

この式は$t$における値$\psi_n(t)$ $\psi_{n-1}(t)$ $\psi_{n+1}(t)$を知って$\psi_n(t+\delta)$をもとめる式と解釈できる．

$\psi_n=1+U_n$とおいて$|U_n|\ll 1$とし，$U_n$について1次の項だけとれば，線形の式となる．

(例 i) ソリトン

(3.4) $$\psi_n(t) = 1 + e^{2(\kappa n + \beta t)}$$

とおけば

(3.5) $$\sinh^2\kappa = \frac{1}{\delta^2}\sinh^2(\beta\delta)$$

として (3.3) が満足される. $\delta\to 0$ の極限では

(3.6) $$\beta^2 \to \sinh^2\kappa$$

これはふつうのソリトンを与える.

(例2) cnoidal 波。 $C$ を定数として

(3.7) $$\psi_n = \varphi_n / C^{n^2/2}$$

とおくと (3.3) は

(3.8) $$\frac{1}{C}\varphi_{n+1}(t)\varphi_{n-1}(t) - \varphi_n^2(t) = \frac{1}{\delta^2}\{\varphi_n(t+\delta)\varphi_n(t-\delta) - \varphi_n^2(t)\}$$

となる。ここで $\varphi \sim \vartheta_3$ (あるいは $\vartheta_0$) とし, これに対する加法定理

(3.9) $$\vartheta_3(u-\kappa|\tau)\vartheta_3(u+\kappa|\tau) = \vartheta_3(2\kappa|2\tau)\vartheta_3(2u|2\tau) + \vartheta_2(2\kappa|2\tau)\vartheta_2(2u|2\tau)$$

を用いよう。ただしここでは $\vartheta$-函数のパラメタで

(3.10) $$\begin{cases} \vartheta_3(u) = \vartheta_3(u|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u m + \pi i \tau m^2} \\ \vartheta_0(u) = \vartheta_3(u+\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\left\{ \vartheta_2(u) = \vartheta_2(u|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (m+\frac{1}{2})u + \pi i \tau (m+\frac{1}{2})^2} \right.$$

である．(3.9) を用いると (3.8) は $u = \kappa n + \nu t$ に関する $\vartheta_3(2u|2\tau)$ の項と $\vartheta_2(2u|2\tau)$ の項との和になる．それぞれの係数は $u$ を含まず，$\kappa$（あるいは $\nu\delta$）だけの函数である．これらの項を分離すれば各係数から

$$(3.11)\left\{\begin{aligned} \frac{1}{C}\vartheta_3(2\kappa|2\tau) - \vartheta_3(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2}\{\vartheta_3(2\nu\delta|2\tau) - \vartheta_3(0|2\tau)\} \\ \frac{1}{C}\vartheta_2(2\kappa|2\tau) - \vartheta_2(0|2\tau) &= \frac{1}{\delta^2}\{\vartheta_2(2\nu\delta|2\tau) - \vartheta_2(0|2\tau)\} \end{aligned}\right.$$

を得る．$\kappa$ は与えられた任意定数で，この2式から2つの未知量 $C$ と $\nu$ とが定められる．特に $\nu$ は $C$ を消去した式

$$(3.12)\quad \begin{aligned} &-\vartheta_2(2\kappa|2\tau)\vartheta_3(0|2\tau) + \vartheta_3(2\kappa|2\tau)\vartheta_2(0|2\tau) \\ &= \frac{1}{\delta^2}\Big[\vartheta_2(2\kappa|2\tau)\{\vartheta_3(2\nu\delta|2\tau) - \vartheta_3(0|2\tau)\} \\ &\qquad - \vartheta_3(2\kappa|2\tau)\{\vartheta_2(2\nu\delta|2\tau) - \vartheta_2(0|2\tau)\}\Big] \end{aligned}$$

によって，$\kappa$ の函数として与えられる．これは $\delta \to 0$ の極限では (2.9) と一致すべきものである．

## §4. 多変数の場合

函数

$$(4.1)\quad \vartheta(u;s|\tau)=\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_g}{}_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[2\pi i\sum u_j\Big(m_j+\frac{s_j}{2}\Big)+\pi i\sum_{j,k}\tau_{jk}\Big(m_j+\frac{s_j}{2}\Big)\Big(m_k+\frac{s_k}{2}\Big)\Big]$$

を定義する．ここに $s_j=0,1$ であり，すべての $s_j=0$ であれば，これはふつうの Riemann $\vartheta$-函数である．加法定理

$$(4.2)\quad \vartheta(u-\kappa;s|\tau)\vartheta(u+\kappa;s|\tau)=\sum_{\mu=0,1}\vartheta(2\kappa;\mu|2\tau)\vartheta(2u;s+\mu|2\tau)$$

はすぐ証明される．これは (3.9) の拡張である．

$$(4.3)\qquad \varphi(u)=\vartheta(u;0|\tau)$$

と仮定して，これを (3.8) に入れ，$\vartheta(2u;\mu|2\tau)$ の係数を両辺で等しいとおくと

$$(4.4)\quad \frac{1}{c}\vartheta(2\kappa;\mu|2\tau)-\vartheta(0;\mu|2\tau)=\frac{1}{\delta^2}\{\vartheta(2\nu\delta;\mu|2\tau)-\vartheta(0;\mu|2\tau)\}$$

を得る．これは $\mu_1=0,1;\ \mu_2=0,1;\ \ldots;\ \mu_g=0,1$ の $2^g$ 個の方程式である．

他方で各波数 $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_g$ と，これらの波の強さを表わすパラメタ $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{gg}$ を与えられたものとすると，未知量は $C$，$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_g$ および $\tau_{jk}$ $(j \neq k)$ である．$\tau_{jk} = \tau_{kj}$ とすると未知量の数は

$$1 + g + \frac{g(g-1)}{2} = 1 + \frac{g(g+1)}{2} \tag{4.5}$$

である．

$g=1$ および $g=2$ に対しては

$$2^g = 1 + \frac{g(g+1)}{2} \qquad (g = 1, 2) \tag{4.6}$$

であり，方程式の数と未知量の数とが一致するから，連立方程式(4.4)は直ちに解を与える。$g=1$ のときこれは cnoidal 波であり，$g=2$ の場合は $\nu_1, \nu_2$ と $\tau_{12}$ および $C$ が $\kappa_1, \kappa_2$ $\tau_{11}, \tau_{22}$ の函数として定まる。

$g \geq 3$ の場合は

$$2^g > 1 + \frac{g(g+1)}{2} \qquad (g \geq 3) \tag{4.7}$$

であって，連立方程式は未知量よりも多くの方程式を含むことになる。余剰分は $\vartheta$-函数に関する多数の恒等式を与えると見ているが，確かではない。御教示を仰ぎたく思う。