数理解析研究所講究録
388巻 1980年 48-58

可換微分作用素とベクトル束（Krichever の研究の紹介）

阪大 理　　伊達悦朗

最近、いわゆる、散乱の逆問題の方法が発見され、発展してゆく過程において、次の問題が重要となってきた。

（問題）▽線型微分作用素の対、$L=\sum_{j=0}^{m} u_j(x)D^j$, $M=\sum_{j=0}^{n} v_j(x)D^j$, $D=\frac{d}{dx}$, で可換；$[L,M]=LM-ML=0$, となるものを分類すること△

ここで、u_j, v_k は x の連続関数を成分とする行列。

ここでは、この問題に関する Krichever の研究を紹介する。

尚、この問題は、1920年代に、散乱の逆問題の方法の誕生とは無関係に、Burchnall - Chaundy [1] によって研究されていたことが、Krichever の結果が発表された後でわかった。又、Drinfeld [2], Mumford [5] 等による、より代数幾何学的な approach もある。

1. 可換微分作用素と代数曲線、ベクトル束

まず、可換な対 L, M が与えられた時に、それに対して、代数曲線及び、その上のベクトル束を対応させることを考える。

簡単の為に、L, M は scalar 係数であるとする。更に、独立変数、従属変数の変換を行って、$u_m = v_n = 1$, $u_{m-1} = 0$, としておく。

次の定理が基本的である。

定理（Burchnall - Chaundy）　$\exists\, f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$, 既約, s.t.

$$f(M, L) = 0$$

∵) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathfrak{L}(\lambda) = \{ y \,;\, Ly = \lambda y \}$ とおく。$\mathfrak{L}(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上 m 次元の線型空間である。L と M は可換であるから、M は $\mathfrak{L}(\lambda)$ の線型写像 $M(\lambda)$ を induce する。$M(\lambda)$ の最小多項式を $f(\mu, \lambda)$ とする。$\mathfrak{L}(\lambda)$ の基底 $c_j(x, x_0, \lambda)$, $j = 0, \cdots, m-1$, として、初期条件 $(D^k c_j)(x_0, x_0, \lambda) = \delta_{jk}$, $j, k = 0, \cdots, m-1$, $(x_0 \in \mathbb{R}$ fix$)$ で定義されるものをとってみれば、$f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$ であることがわかる。

$f(M, L)$ は線型常微分作用素で、それを $\mathfrak{L}(\lambda)$ に制限すれば $f(M(\lambda), \lambda)$ で与えられる。これは最小多項式の定義から零。従って $f(M, L)$ の kernel は無限次元となる。//

$f(\mu, \lambda) = 0$ で affine 代数曲線 R_0 が定義される。R_0 の compact 化について考える。

その為に、方程式

$$L\,\psi(x,k) = k^{m}\psi(x,k)$$

の $\psi(x,k) = e^{k(x-x_0)}\left(\sum_{s=N}^{\infty} \xi_s(x)k^{-s}\right)$,（ N は整数 ）の形の形式解を考えれば、Puiseux 級数体 $\mathbb{C}\{\lambda^{-1}\}$ での $f(\mu,\lambda)$ の分解が、ℓ を m, n のある公約数として

$$f(\mu,\lambda) = \prod_{j=0}^{m'-1}(\mu - A(\kappa_j)),\quad \kappa_j^{m'} = \lambda$$

$$A(\kappa) = \kappa^{n'} + \sum_{j=n'-1}^{-\infty} A_j\kappa^{j},\quad A_j \in \mathbb{C},\quad m'\ell = m,\ n'\ell = n,$$

で与えられることがわかる。$M(\lambda)$ の固有多項式は $\{f(\mu,\lambda)\}^{\ell}$ で与えられる。

このことから、$f(\mu,\lambda) = 0$ で定義される affine 代数曲線 R_0 を compact 化するには、無限遠点 P_∞ を一点付け加えればよく、P_∞ のまわりの local parameter としては、$\lambda^{-\frac{1}{m'}}$ がとれることがわかる。この代数曲線を R と表わす。（以下 R は nonsingular とみなす。）

$p = (\mu,\lambda) \in R_0$ に対して、$V_p = \{y\,;\,Ly = \lambda y,\ My = \mu y\}$ とおく。$\dim V_p = \ell$ であり、その基底として、$\psi_j(x,x_0,p) = \sum_{k=0}^{m-1}\chi_{jk}(x_0,p)\times c_k(x,x_0;\lambda)$, $j = 0,\cdots,\ell-1$, の形で、$\chi_{jk} = \delta_{jk}$, $j,k = 0,\cdots,\ell-1$, つまり、$(D^k\psi_j)(x_0,x_0,p) = \delta_{jk}$ なるものがとれる。Cramer の公式より、χ_{jk} は μ,λ の有理式となる。つまり χ_{jk} は R 上の有理関数となる。こうして、R_0 上に L, M の同時固有関数を fibre とするベクトル束の family が定まる。（ψ_j の pole は、x には依らない。）

このベクトル束を R 全体に拡張することを考える。

$\Psi = (D^i \psi_k)$ を ψ_j の wronski 行列とすると、P_∞ の近傍では、関数 $w_j(x)$, $j=0,\dots,l-2$, が存在して

$$\left(\frac{d}{dx}\Psi\right)\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa+w_0 & w_1 & \cdots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ O(\kappa^{-1}) \end{pmatrix} \qquad \kappa = \lambda^{\frac{1}{n}}$$

となることがわかる。

$\Phi_0(x, x_0, k)$ を微分方程式

$$\frac{d}{dx}\Phi_0(x,x_0,k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ k+w_0 & w_1 & \cdots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_0(x,x_0,k)$$

の初期条件 $\Phi_0(x_0,x_0,k) = I_l$ をみたす解とすると

$$(\psi_0,\dots,\psi_{l-1}) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x)\kappa^{-j}\right)\Phi_0(x,x_0,\kappa)$$

$$\xi_0(x_0) = (1,0,\dots,0), \quad \xi_s(x_0) = 0 \quad s \geq 1$$

と表わされる。

従って、次のようにして R 上の rank l のベクトル束の family $V(x_0)$ が定まる。U を P_∞ の近傍とするとき、R_0 では ψ_j を frame とし、U では $\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sj}\kappa^{-s}$ $\quad \xi_j = (\xi_{s0},\dots,\xi_{s,l-1})$ を frame とし、$U-\{P_\infty\}$ では ${}^t\Phi_0(x,x_0,\kappa)$ で貼り合わせる。Krichever の論文に述べてあるベクトル束 $\xi(x_0)$ は、ベクトル $\chi_j(x_0,p) = (\chi_{j0}(x_0,p),\dots,\chi_{j,n-1}(x_0,p))$, $j=0,\dots,l-1$ の pole を打ち消す形で定義されるもののようである。

2. ベクトル束と matrix divisor

次に、代数曲線上のベクトル束と、matrix divisor との対応について述べる (cf. Tyurin [6])

まず、matrix divisor の定義を述べる。

$\mathcal{O}_p$ (resp. $\mathfrak{m}_p$) を $p \in R$ における holomorphic (resp. meromorphic) functions の germs とするとき $GL(\ell, \mathcal{O}_p) \backslash GL(\ell, \mathfrak{m}_p)$ の元を、p における order ℓ の local divisor と呼ぶ。

R 上の order ℓ の matrix divisor とは order ℓ の local divisors で生成される free abelian group の元をいう。matrix divisors E, E' が同値とは $G \in GL(\ell, K)$ (K は R の関数体) が存在して $E = E'G$ なるときをいう。

matrix divisor E が与えられたとき、次のようにしてベクトル束が定義される。$R = \bigcup_i U_i$ を open covering とし、E は U_i 上で U_i 上の meromorphic functions を成分とする行列で実現されているとする。その時、$g_{ij} = E_i E_j^{-1}$ を transition functions としてベクトル束が定義される。

逆に、ベクトル束 V が与えられた時には、$U \subset R$ 上での V の meromorphic frame の成分の (通常の意味での) divisor を並べて matrix divisor が得られる。

holomorphic functions の germs からなる local divisor E_p は、次の normal form をもつ:

$$E_p = DA$$

$$D = \begin{bmatrix} z^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{d_l} \end{bmatrix}, \quad d_i = d_i(p) \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}, \quad z : p \text{ のまわりの local parameter}$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in \mathbb{C}[z] / z^{d_j - d_i}\,\mathbb{C}[z]$$

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = 0, \ \text{if} \ d_i \geq d_j, \ i \neq j.$$

holomorphic functions の germs を成分とする local divisors からなる matrix divisors を effective と呼び、effective divisor E の degree を $\sum_{p\in R}\sum_{i=1}^{l} d_i(p)$ と定義する。これは(通常の divisor) det E の degree に等しい。

3. Algebraic Spectral Data

$V(x_0)$, あるいは $\eta(x_0)$ の x_0-dependence を決定することは $l > 1$ の場合には難しいので、($l = 1$ ならば、R の Jacobian 上の直線運動となる。) ここでは、可換な対 L, M に対して、algebraic spectral data と呼ぶものを定義する。後で、algebraic spectral data から、可換な微分作用素の対を再構成できることを示す。matrix divisor で H て generic な場合に algebraic spectral data を定義する。

ψ_j の pole は simple であるとし、それらを $\gamma_i(x_0)$, $i = 1, \cdots, N$ とする。γ_i における ψ_j の residue を $\varphi_{ij}(x)$ とし、そのうち、x の関数として一次独立なものの個数を m_i とすれば、g を R の

種数として $\sum_{i=1}^N m_i = lg$ が成り立つ。($z\in\mathbb{P}^1$, $\lambda^{-1}(z)=\{P_1,\cdots,P_{m'}\}$ とし、関数 $\psi_j(x, x_0, P_k)$, $j=0,\cdots,l-1$, $k=1,\cdots,m'$ の wronskian を考えて示される。) このことから、$\eta(x_0)$ は γ_i において

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{l-m_i} & * \\ \hline & \begin{matrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{matrix} \end{array}\right)\Big\}{\scriptstyle m_i} \qquad * : \text{定数}$$

の形の local divisor に対応することがわかる。従って、(P_∞ を除いて) $\eta(x_0)$ に対応する effective matrix divisor は、degree を lg と固定するとき、

$$\sum_{i=1}^N (l-m_i)m_i + N = l^2 g - \sum_{i=1}^N m_i + N \ (\leq l^2 g)$$

個の parameter に依る。(等号は $m_i=1$ のとき)

従って、最大次元 (matrix divisor で η 2) のところを考えることにすると、γ_i での local divisor が

$$\begin{pmatrix} 1 & & -\alpha_{i0} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1-\alpha_{il-2} \\ & & z \end{pmatrix}$$

の形のもの、言い換えると、γ_i における ψ_j の residue φ_{ij} の間に $\varphi_{ij}(x) = \alpha_{ij}(x_0)\varphi_{i,l-1}(x)$, $j=0,\cdots,l-2$, なる関係が成り立つものを考えることになる。

組 $\{R, (\gamma_i(x_0), \alpha_{ij}(x_0), j=0,\cdots,l-2), i=1,\cdots,lg, w_j(x), j=0,\cdots,l-2\}$ ($w_j(x)$ は 1. で述べたもの) を L.M に対する algebraic spectral data と呼ぶ。

4. Baker-Akhiezer function

次の data が与えられたとする。

$\mathcal{R}$: 種数 $g>0$ の compact リーマン面,

$p_\infty \in \mathcal{R}$, $z=k^{-1}$, p_∞ のまわりの local parameter,

$\delta = \sum_{i=1}^{\ell g} \gamma_i$: $\mathcal{R}$ 上の non-special divisor.

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{\ell g})$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{i,\ell-1}) \in \mathbb{C}^{\ell-1}$

$A_j(x,k)$ $(j=1,\cdots,s)$ $\ell\times\ell$ 行列, k の多項式, s.t.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = [A_j, A_k].$$

このとき、まず、A_j から、関数 $\Phi_0(x,x_0,k)$ で

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} = A_j \Phi_0, \quad \Phi_0(x_0,x_0,k) = I_\ell$$

をみたすものが、一意的に定まる。

定理 (Krichever-Novikov) $\exists$ $\Psi(x,x_0,p) = (\psi_1(x,x_0,p),\cdots,\psi_\ell(x,x_0,p))$, $p\in\mathcal{R}$, s.t.

1. Ψ は $\mathcal{R}-\{p_\infty\}$ で meromorphic, pole divisor $=\delta$ で、γ_i における ψ_j の residue $\varphi_{ij}(x)$ は

$$\varphi_{ij}(x) = \alpha_{ij}\,\varphi_{i\ell}(x), \quad j=1,\cdots,\ell-1$$

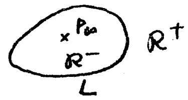
をみたす,

2. p_∞ の近傍で

$$\Psi(x,x_0,p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Phi_0(x,x_0,k), \quad \xi_0 = (1,0,\cdots,0).$$

このような性質をもつ Φ の構成は、U を p_∞ の近傍とし、$\partial U = L$ とおくとき、次の $\mathcal{R}$ 上の Riemann-Hilbert の問題を解くことに帰着する。

$$\Phi^+(x,x_0,p) = \Phi^-(x,x_0,p)\,\Phi_0(x,x_0,k) \quad \text{on } L$$



Φ : meromorphic in $\mathcal{R}-\{L\}$, $\Phi=(\phi_1,\cdots,\phi_l)$ とするとき

$(\phi_i)+\delta \geq 0$.

5. L, M の再構成

algebraic spectral data $\{\mathcal{R}, (\gamma_i, \alpha_{ij}, j=0,\cdots,l-2), i=1,\cdots,lg, w_j(x), j=0,\cdots,l-2\}$ が与えられたとする。

まず、$\Phi_0(x,x_0,k)$ を微分方程式

$$\frac{d}{dx}\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ k+w_0 & w_1 & \cdots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix}\Phi_0$$

の解で、初期条件 $\Phi_0(x_0,x_0,k)=I_l$ をみたすものとする。この Φ_0 を用いて、4. の構成法で $\psi_j(x,x_0,p)$, $j=0,\cdots,l-1$ を決める。

Φ を ψ_j $j=0,\cdots,l-1$ の wronski 行列とする。p_∞ の近傍で

$$\Phi(x,x_0,p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi'_s(x)\,k^{-s}\right)\Phi_0(x,x_0,k)$$

と表わされる。

λ を p_∞ のみで pole をもつ $\mathcal{R}$ 上の meromorphic function とし、その order を m とする: $\lambda(p) \equiv \sum_{\alpha=0}^{m}\lambda_\alpha k^\alpha \pmod{O(k^{-1})}$ around p_∞.

補題　∃ $z_j(x)$, $j=0,\cdots,m$, $(l\times l)$-matrix s.t.

$$\left(\sum_{j=0}^{m} z_j(x)\, D^{jl}\,\Psi\right)\Psi^{-1} \equiv \lambda \mod O(x^{-1}) \quad \text{around } p_\infty$$

∵)　$(l\times l)$-行列 $a_{sj}(x)$ を

$$(D^j \Psi_0)(x,x_0,k) = \left(\sum_{s=0}^{N(j)} a_{sj}(x)\, k^s\right)\Psi_0(x,x_0,k),\quad N(j)=\left[\frac{j}{l}\right]$$

から決め、$z_\alpha(x)$ を

$$\sum_{\alpha=0}^{m} z_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha l}\sum_{t=0}^{N(j)} {}_{\alpha l}C_j\,(D^{\alpha l-j}\xi'_{s+t})\,a_{tj} = \sum_{\alpha=0}^{m} \lambda_\alpha\, \xi'_{s+\alpha},\quad s=-m,\cdots,0$$

から決めればよい。

$$L=\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{j=1}^{l} z_{\alpha,1j}(x)\, D^{\alpha l+j-1},\quad z_\alpha=(z_{\alpha,ij})$$

とおくと、$L\psi_i=\lambda\psi_i$, $i=0,\cdots,l-1$ が成り立つ。

μ をもう一つの p_∞ のみに pole をもつ R 上の meromorphic function とすれば、μ に対しても、上と同様にして ln 階の作用素 (n = order of μ) M が定まり、$M\psi_i=\mu\psi_i$　$i=0,\cdots,l-1$ が成りたつ。つまり $[L,M]=0$ となる。

注．$\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ の x_0-dependence を決めることができれば、それら $\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ から、Riemann-Roch の定理を用い、線型微分方程式を解くことによっても、ψ_j を構成できる。$g=1$, $l=2$ の場合の $\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ の x_0-dependence は Krichever-Novikov [4] に述べてある。

References

1. J.L. Burchnall and T.W. Chaundy: Proc. London Math. Soc. 21 (1922), p.420, Proc. Royal. Soc. London (A) 118 (1928) p.557., 134 (1931), p 471.
2. V.G. Drinfeld: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), p.9.
3. I. M. Krichever: Funct. Anal. Appl. 12 (1978). p.175.
4. I. M. Krichever and S. P. Novikov: Funct. Anal Appl. 12 (1978). p.276.
5. D. Mumford: Proc. Int. Symp. Alg. Geom. Kyoto 1977 (1978). p. 115.
6. A. N. Tyurin: A.M.S. Transl. (2) 63 (1967); p.245., (2) 73 (1968). p.196.