数理解析研究所講究録
388巻 1980年 11-37

線型常微分方程式に関するPoincaréの仕事について

慶大 工　　齋藤 利弥

§0. 複素領域における線型常微分方程式のglobalな理論に関するPoincaréの論文は次の三編である.

1. Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math. t.4 (1884), 201～311 (全集第2巻)
2. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta Math. t.5 (1884), 209～278 (全集第2巻)
3. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes, J. de Math. t.9 (1903), 139～212 (全集第3巻)

(この他に不確定特異点における解の漸近展開についての重要な論文が2編あるが, これは完全なlocal theoryである.)

ここで紹介しようとするのは1の内容(の一部分)である. 2, 3は1で得られた結果を基礎として議論が展開されているので, 1がPoincaréの線型方程式の理論の土台であるとい

ってよいであろう.

§1. 論文1は20節からなる. このうち重要なのは第5節以下なのであるが, 順序として第1〜4節についても簡単にふれておこう.

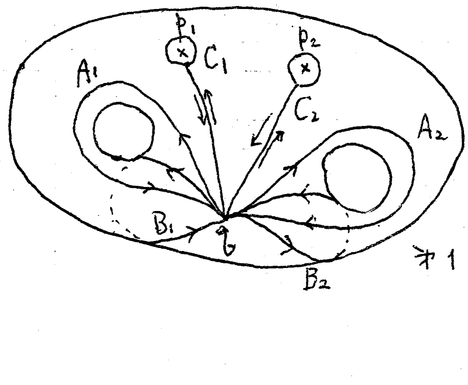
とりあつかわれている方程式は単独常微分方程式

(1) $d^n v/dx^n + \varphi_1(x)\cdot d^{n-1}v/dx^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x)v = 0$

であって, $\varphi_k(x)$はすべて代数関数とする. 第1〜4節では$\varphi_1(x) \equiv 0$で, $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$が有理関数である場合について議論が進められているが, ここではそのような条件をつけないことにする.

第1節では(1)の群, すなわちモノドロミー群の不変量について論じている. ただし不変量とは(1)の基本解のえらび方に関係しない量, したがって具体的にいえばモノドロミー行列の固有値だけで表わされる量のことである.

$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$が属する代数関数体のリーマン面を$X$, その種数を$g$, (1)の特異点を$p_1, \cdots, p_m$とする. $q \in X$を(1)の正則点としてX上に図のような路$A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g, C_1, \cdots, C_m$をえがき, これらの路に対応するモノドロ



第1図

ミー行列をそれぞれ $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_m$ とすれば，モノドロミー群はこれら $2g+m$ 個の行列で生成される．しかしこれ等の間には

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \cdots c_m = I$$

のような関係が1つ成り立つので独立な生成元は $2g+m-1$ 個，したがってモノドロミー群を決定する独立なパラメーターの数は $n^2(2g+m-1)$ 個である．さらに基本解のえらび方に関する自由度をさしひくと（すなわちある基本解を基にして得られるモノドロミー群を G とするとき，G と $P^{-1}GP$ $(P \in SL(n, \mathbb{C}))$ とを同一視すると）結局パラメーターの数は $n^2(2g+m-1)-(n^2-1) = n^2(2g+m-2)+1$ となる．

(1) がフックス型，すなわち特異点がすべて確定特異点ならば $c_1, c_2, \cdots, c_m$ の固有値は容易に計算される．すなわち，p_k における決定方程式の根を λ_{kj} $(j=1, \cdots, n)$ とすれば $\exp(2\pi i \lambda_{kj})$ が c_k の固有値である．これで nm 個の不変量が求められたことになる．ただしフックスの関係式

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} = n(n-1)(g-1+m/2)$$

がつねに成り立つので，これ等のうち独立なものは $nm-1$ 個で，これ等をさしひくことによりモノドロミー群を決定するパラメーターのうち未知のものは

$$n^2(2g+m-2)-nm+2$$

である．$g=0$, $n=2$, $m=3$（すなわち超幾何微分方程式にreduceされる場合）にはこれは0となるが，それ以外の場合はつねに正である．そして$C_1, \dots, C_m$以外のモノドロミー行列の不変量がこの個数だけ求められればモノドロミー群は決定される．不変量は基本解のとり方に関係しない量であるからモノドロミー行列自体よりは計算しやすい筈である．そこでPoincaréは不変量を求めることによってモノドロミー群を定める方法を提案しているのであるが，もちろん決定的な解答が得られているわけではない．

第2節ではモノドロミー群の数値的計算法について述べている．なお今後(1)はつねにフックス型であるとしておく．

第3節では$\varphi_1, \dots, \varphi_n$は有理関数として，特異点の位置を固定したとき，モノドロミー行列が$\varphi_1, \dots, \varphi_n$の係数のどのような関数になるかを論じている．これについては後にLappo-Danilevskyがくわしく調べているのでここでは省略する．

第4節では逆に，$\varphi_1, \dots, \varphi_n$の係数をモノドロミー行列の関数として見る立場をとりあげる．今度は特異点の位置をも動かして考えることにする．ただしリーマン面のbirational automorphismによって互に移り合う方程式は同一のものとみなす．

X上にm個の確定特異点をもつn階フックス型方程式が合

む任意パラメーターの数を c_{mn} とする.

X から m 個の点をとりさったものを X' とし, X' の基本群の n 次行列によるモノドロミー表現の含む任意パラメーターの数を γ_{mn} とする. c_{mn}, γ_{mn} は次の式で与えられる.

$$c_{mn} = \frac{1}{2} n^2 (m + 2g - 2) + \frac{1}{2} mn + m - \delta,$$

$$\gamma_{mn} = n^2 (2g + m - 2) + 1 .$$

ただし $g=0$ のとき $\delta=3$, $g=1$ のとき $\delta=1$, $g \geqq 2$ のとき $\delta=0$ である. この式から一般に $\gamma_{mn} > c_{mn}$ であることが直ちにわかるが, ただ $g=0$, $n=2$ のときに限り

$$c_{m2} = \gamma_{m2} = 4m - 7$$

となる. Poincaré はこの場合をとりあげ, このとき (1) の係数がモノドロミー群のパラメーターの一価関数となることを示している.

§2. 第5節から後が, この論文のもっとも重要な部分であって, そこでは (1) の解の uniformization が論じられる. すなわち, 適当な複素変数 z を用いて x, および (1) の解 v を

$$v = v(z), \qquad x = x(z)$$

のようにその1価解析関数として表わす方法を考えよ — というのがここでとりあげられる問題である. Poincaré はまず次のような議論からスタートする.

Gをフックス群，Rをその基本領域とする．基本円（Gによって不変な円）の内部の点を表わす複素数をzとし，$x(z)$をGに関するフックス関数――フックス群に関する保型関数をフックス関数という――として，

$$v_1=\sqrt{dx/dz},\qquad v_2=z\sqrt{dx/dz}$$

とおけば

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2}=\frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx^2}=\left(2\frac{d^3x}{dz^3}\cdot\frac{dx}{dz}-3\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2\right)\Big/4\left(\frac{dx}{dz}\right)^4$$

となるが，簡単な計算により右辺はやはりGに関するフックス関数であることがわかる．$x(z)$がフックス関数であるから，このことは上式の右辺がxの代数関数になることを示している．そこでこの代数関数体を定義する多項式を$\psi(x,y)=0$とすれば，右辺はx, yの有理関数となる．それを$\varphi(x,y)$と書けば，v_1, v_2は微分方程式

(2) $$d^2v/dx^2=\varphi(x,y)\,v,\qquad \psi(x,y)=0,$$

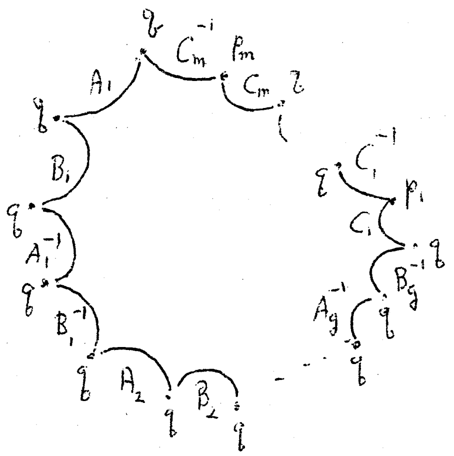
の2つの解であって，$z=v_2/v_1$となる．

しかし，逆に(2)のような代数関数を係数とする2階線型方程式が与えられたとしても，xがその解の比zのフックス関数になるとは限らない．

係数$\varphi(x,y)$の属する代数関数体のリーマン面をX，その種数をgとして，Xに第1図と同じような路A_k, B_k ($k=1$,

…, g), C_j ($j=1,\dots,m$) をえがく. ただし今度は $p_1,\dots,p_m$ は(2)の特異点, q は(2)の正則点とする. また p_j における(2)の決定方程式の根の差を μ_j とする. 路 A_k, B_k, C_j に沿って X に cut を入れ, その結果生ずる単連結な面を X' としよう. (2)の1次独立な2つの解の比を z とし, その分枝を一つ定めるとそれは X' 上で1価正則で, したがって $p\in X'$ に p におけるその値を対応させることにより, X' から複素平面への holomorphic map が得られる. この写像による X' の像を R とする. x が z の1価関数であるためには R が自分自身と overlap するような図形であってはいけない.

いまそのような overlap がないとすれば, R は才2図のような形をもつことがわかる. ここで q に対応する頂点が一つのサイクルをなし, そこにおける頂角の和は 2π, p_j に対応する頂点はそれ自身が一つのサイクルで, そこでの頂角は $2\pi\mu_j$ である. すなわち曲線多辺形 R の辺の数は $4g+2m$, 頂角の和は $2\pi(1+\sum_1^m \mu_j)$ である.



才2図

z として別の分枝をとると, R 全体が1次分数変換をうける. したがって z にそのすべての分枝をとらせると, 1次分

数変換による R のコピー $R', R'', \cdots$ が得られるが，x がその1価関数であるためにはこれらのコピーが互に overlap してはいけない．そのためには μ_j は整数の逆数であるか，または0でなければいけない（このことは P_j のまわりを一周する路に沿ってその解析接続を行なってみれば容易にわかる）．

μ_j がすべてこの条件を満しているとき (2) は <u>normal</u> であるという．

x がその1価関数になっても，それがフックス関数になるとは限らない．R が $4g+2m$ 個の辺をもち，その頂角の和が $2\pi(1+\sum\mu_j)$ であったから，R がフックス群の基本領域であるためには $2\pi(1+\sum\mu_j) < \pi(4g+2m-2)$，すなわち

$$(3)\qquad \sum\mu_j < 2g+m-2$$

が成り立つ必要がある．

これが成り立たない第1の場合は

$$\sum\mu_j > 2g+m-2$$

となる時で，これを <u>rational</u> <u>case</u> とよぶことにする．これが実現されるのは次の場合だけである．

$g=0,\quad m=3,\quad \mu_1=\mu_2=1/2,\ \mu_3=1/n$ （n は整数）

$g=0,\quad m=3,\quad \mu_1=1/2,\quad \mu_2=\mu_3=1/3$

$g=0,\quad m=3,\quad \mu_1=1/2,\quad \mu_2=1/3,\quad \mu_3=1/4$

$g=0,\quad m=3,\quad \mu_1=1/2,\quad \mu_2=1/3,\quad \mu_3=1/5$

もう一つの場合は

$$\sum \mu_j = 2g + m - 2$$

となるときで，これを elliptic case とよぶ．これは次の場合しかない．

$g = 1, \quad m = 0,$

$g = 0, \quad m = 3, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3,$

$g = 0, \quad m = 3, \quad \mu_1 = 1/2, \ \mu_2 = \mu_3 = 1/4,$

$g = 0, \quad m = 3, \quad \mu_1 = 1/2, \ \mu_2 = 1/3, \ \mu_3 = 1/6,$

$g = 0, \quad m = 4, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/2.$

これから rational case, elliptic case はともに例外的な場合であることがわかる．今後この二つの case は除外しておく．

二つの normal な2階線型方程式があって，リーマン面の birational map によってその特異点が互に移り合い，しかも対応する特異点における決定方程式の根の差が等しいとき，それ等は同じ Type に属するという．((2) の形の方程式では決定方程式の根の和がつねに決まった値をもつから — たとえば p_j が代数関数 φ の分岐点でも，無限遠点でもなければ，そこでの決定方程式の根の和は 1 に等しい —，このことは決定方程式の根が一致することと同等である．) さらに，$\sum \mu_j < 2g + m - 2$ であるような type を Fuchsian type という．

§3. Fuchsian type の方程式(2)において，xが二つの解の比zのフックス関数になっているとき，それを<u>Fuchsian equation</u>とよぶ．(1)の解vを，(2)の形の方程式の解の比zを用いて　$v=v(z)$, $x=x(z)$ のように uniformize できることを示すには，次の命題を証明すればよい．

(α) Fuchsian Type を任意に与えると，その type に属する方程式の中に Fuchsian equation が必ず存在する．

その理由は次の通りである．

(1)の特異点を$p_1, \cdots, p_m$とし，p_jにおける決定方程式の根がすべて有理数で，しかも整数差をもたなければ，それ等の公分母をk_j，そうでなければ$k_j=\infty$とおく．そして$p_1, \cdots, p_m$に特異点をもち，p_jにおける決定方程式の根の差が$1/k_j$となるような(2)の形の方程式をつくる．この場合指定されているのはtypeだけであるから方程式はuniqueには決まらない．しかし(α)により，その中にFuchsian equationが必ずあるから，(2)としてそれをとっておくことにする．

(2)の解の比をzとおけば，xはzのFuchs関数で，したがってもちろん1価関数である．zによるp_jの像を$z(p_j)$とすればzが$z(p_j)$のまわりを一周するとき，その原像はリーマン面上でp_jのまわりをk_j回まわり，したがって(1)の解vははじめの分枝にもどる．ゆえにvもzの1価関数である．

$\nu_1, \cdots, \nu_m$ を任意の正の整数として、p_j における決定方程式の根の差が $1/\nu_j k_j$ となるような2階線型方程式を考える。この方程式によって定まる type を (2) の <u>subordinate type</u> という。この type の方程式の中に Fuchsian equation が存在すれば、それの解の比を用いても (1) の解は uniformize できることは明らかであろう。したがって (α) のかわりに

(β) 任意に Fuchsian type を与えたとき、その subordinate type の中に Fuchsian equation を含むものが存在する。

を証明してもよい。

いちばん極端な subordinate type はすべての ν_j を ∞ としたものである。すなわち (2) の形の方程式で決定方程式の根がどれも二重根となるものである。もしこの type の Fuchsian equation があれば、その解の比は $p_1, \cdots, p_m$ に特異点をもつすべての線型方程式の解を uniformize する能力をもっている。この際特異点の中に不確定特異点があってもかまわない。

§4. Poincaré はそこで次の二つの lemma を証明する。

<u>Fundamental Lemma</u>. Fuchsian type の中に含まれる Fuchsian equation の数は高々一つである。(ただしリーマン面の birational map で互に移り合う方程式は同一のものとみなす。)

<u>証明</u>　一つの type が二つの Fuchsian equation を含んでいたと

してそれ等の解の比をそれぞれ z, t とする. 解を適当にえらぶことにより —— すなわち z, t に適当な1次分数変換を施すことにより, 次の三つの条件を成り立たせることができる.

1° z, t の基本円はいずれも原点を中心とする単位円.

2° リーマン面 X 上の点 $p_1, \cdots, p_m$ にそれぞれ $k_1-1, \cdots, k_m-1$ 位の分岐をもつ maximal covering surface を $\tilde{X}$ とする. $\tilde{X}$ 上の一点 p において z, t は同時に 0 となる.

3° $\tilde{X}$ 上の一点 q において $\arg z = \arg t$.

z, t の基本円の内部と $\tilde{X}$ とは一対一に対応しているから, $\tilde{X}$ を媒介として z と t との間に一対一対応がつけられ, したがって z, t は互に他の1価関数となる. ゆえに t/z を z の関数とみなすとこれは1価解析関数である. p_j における決定方程式の根の差が一致していること, (2) が2階方程式なのでその解の零点はすべて simple なことに注意すれば t/z は基本円 $|z|<1$ において正則でしかも 0 になることはない.

$z \in C = \{z \mid |z| = r < 1\}$ に対しては明かに $|t/z| < 1/r$ であるから最大値の原理により $|z| \leqq r$ において $|t/z| < 1/r$. ここで $r \to 1$ とすると $|t/z| \leqq 1$ が $|z|<1$ において成り立つ. t と z とを入れかえて考えると $|z/t| \leqq 1$ が得られるから $|z| = |t|$. これと3°とから $z = t$, すなわち二つの方

程式の解の比が一致しているので，一方の解は他方の解に一定の関数を乗じたものになっている．ところがこれ等二つの方程式がいずれも dv/dx を含んでいないことに注意すれば，この関数は定数に限る．したがってこれ等二つの方程式は一致してしまうことがわかり証明が終る．

第二の lemma は大へん難解で，私にはよく理解できない．以下に述べるのはそれを我流に解読したものである．

パラメーター t に連続に依存するフックス群の族 $\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ があるとし，G_t の基本領域を R_t，またその種数は t に関係なく一定の値 g であるとする．$t \to 0$ のとき R_t のいくつかの辺が限りなく小さくなって，$t = 0$ に到って遂に消滅したとしよう．このとき R_0 を R_t $(0 < t \leq 1)$ の <u>limiting polygon</u> という．G_0 の種数もやはり g であると仮定しよう．

G_t から決まるリーマン面を X_t，また G_t からつくられる Fuchsian equation を (E_t) とする．

<u>Second Lemma</u>. $t \to 0$ のとき X_t の moduli は X_0 の moduli に収束し，(E_t) の type は (E_0) の type に収束する．

Lemma の後半はやや曖昧ないい方である．type の集合の中に位相がはいっていないのだから収束という概念が定義できないはずだからである．いずれは type の集合の中に位相を入れなければならないのであるが，ここではそれを次のような

意味に理解しておくことにする。

G_t からつくられる Fuchsian equation を

$$d^2v/dx^2 = \varphi_t v$$

とする。この方程式は G_t に関するフックス関数 x を一つ決めることにより出来るのであるから，G_t に属するこのような方程式は無数に存在する。しかしそれ等はすべて bi-rationally equivalent になっている。そのような無数の方程式の中から（各 t ごとに）適当な方程式をえらんでくると，$t \to 0$ のとき $\varphi_t \to \varphi_0$ となる。これが Second Lemma の後半の部分の意味である。

R_0 は R_t $(0 < t \leqq 1)$ よりも辺の数が少なく，しかも種数は同じだから，(E_0) の特異点の数は (E_t) $(t \neq 0)$ の特異点の数より当然少なくなっている。したがって $t \to 0$ のとき (E_t) の特異点のいくつかの間に合流がおこっていることになる。

証明は大体次のような形で行われる。G_t に関するフックス関数 x, y をとるとその間に $\Psi(x, y, t) = 0$ という関係が得られる。ただし Ψ は x, y に関する多項式でその係数は t の関数である。一方 $\Psi = 0$ のリーマン面の moduli はこれ等の係数から解析的に決まってしまうものだから，この係数がすべて $0 \leqq t \leqq 1$ において t の連続な関数ならば lemma の最初の部分は解決する。それにはフックス関数 x, y が t の

連續関数になるようにとればよい．

次にG_tのフックス関数xを一つえらんでFuchsian equation (E_t)をつくると，(E_t)の右辺の係数はxの導関数の有理式である．したがってxがtについて$0 \leqq t \leqq 1$において連續ならば$\varphi_t \to \varphi_0$であって，lemmaの後半が証明できる．

したがって問題は，G_tのフックス関数がtに連續に依存することの証明である．ところでG_tのフックス関数を二つえらぶとそれ以外のフックス関数はこれ等の有理関数となる．したがって二つの独立なフックス関数を任意に定めて，それ等がtに連續に依存することを示せばよい．

さてPoincaréが論文"Sur les fonctions fuchsiennes, Acta Math. t. I (1882)"で証明しているように，われわれはテータフックス級数を二つつくることにより，その比としてフックス関数を作ることができる。すべてのフックス関数がテータフックス級数から作られるかどうかはわからないが，二つの独立なフックス関数をテータフックス級数を用いてつくることはできる．したがって，問題はG_tのテータフックス級数がtに連續に依存して，$t \to 0$のときG_0のテータフックス級数に収束することの証明にしぼられる．Poincaréはその証明を実際に与えているのであるが，その証明はかなり複雑なのでここでは省略することにする．

§5. 以上の結果を用いてPoincaréはsymmetric typeとよばれる特殊なtypeについて(β)を証明する．実はその後で，一般のtypeについて(α)を証明しているのだから，この部分はなくてもよいわけであるが，そんなことは無頓着にできたことは片っ端から書いていく所がいかにもPoincaré流である．

symmetric typeとは方程式

$$(4)\qquad d^2v/dx^2 = \varphi(x)\,v$$

においてφが有理関数で，その特異点が一つの円周上にのっているものをいう．ここでは特に特異点が実数であるとして議論する．(4)のsubordinate typeとしては(§3の記号を使へば) ν_jがすべて∞，したがって特異点における決定方程式がすべて二重根になっているものをえらぶ．そこで便宜上，(4)がはじめからそのような方程式であるとし，この方程式が定めるtypeがつねにFuchsian equationを含むことを証明する．

まず特異点の数が3とする．一般性を失うことなくそれを$0, 1, \infty$としてよい．ところがこのtypeの方程式の中にはFuchsian equationが含まれていることがすでにわかっている．

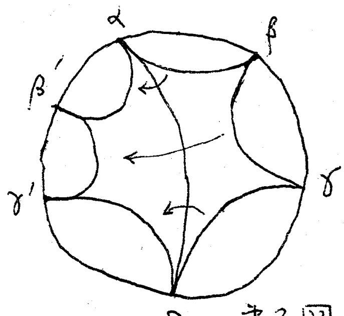
$\wp(\xi)$を周期ω, ω'のWeierstrassの$\wp$関数とし

$$\wp(\omega)=e_1,\quad \wp(\omega+\omega')=e_2,\quad \wp(\omega')=e_3,$$

$$\omega'/\omega=\tau,\qquad (e_2-e_3)/(e_1-e_3)=\lambda$$

とおけば λ は τ のフックス関数となり，そのフックス群 G は
$\tau \to \tau/(-2\tau+1)$, $\tau \to \tau-2$ から生成される，modular group の部分群である．G からつくられる Fuchsian equation が上述の type に属することはよく知られている．

次に特異点の数が4の場合，それを $0, 1, a, \infty$ $(1<a<\infty)$ とする．この場合 type を決定するのはパラメーター a であるから，この type を s_a と書いて a で代表させると，開区間 $(1, \infty)$ はこの種の方程式の決める type 全体の集合とみなすことができる．これを S で表わそう．



第3図

次に基本円を一つ定め，その上に4点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を第3図のようにとる．基本円と直交する円弧 $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\beta\gamma}$, $\widehat{\gamma\delta}$, $\widehat{\alpha\delta}$ を図のようにえがく．β, γ の $\widehat{\alpha\delta}$ に関する反転を β', γ' とすれば β', γ' は基本円上にのっている．基本円と直交する円弧 $\widehat{\alpha\beta'}$, $\widehat{\beta'\gamma'}$, $\widehat{\gamma'\delta}$ をさらにえがく．

基本円に直交する円弧を辺とする6辺形 $\alpha\beta\gamma\delta\gamma'\beta'$ を基本領域とし，基本円を動かさない3個の1次分数変換

$$\widehat{\alpha\beta} \to \widehat{\alpha\beta'}, \quad \widehat{\beta\gamma} \to \widehat{\beta'\gamma'}, \quad \widehat{\gamma\delta} \to \widehat{\gamma'\delta}$$

によって生成されるフックス群を G_γ とする（γ を変化するパラメーターと考える）．

G_γ に関するフックス関数 $x=f(z)$ を一つとる．必要ならば f に1次分数変換を施すことにより

$$f(\alpha)=0,\quad f(\beta)=1,\quad f(\delta)=\infty$$

とすることができる．このとき $f(\gamma)=c$ とおけば $1<c<\infty$ となる．

G_γ の種数は明らかに0であるから，G_γ に関するフックス関数はすべて x の有理関数になる．したがって x を用いて G_γ に属する Fuchsian equation

$$(E_\gamma)\qquad d^2v/dx^2=\varphi_\gamma(x)v$$

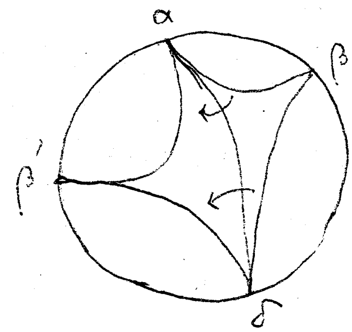
をつくれば φ_γ は x の有理関数となり，その特異点は $0,1,c,\infty$ $(1<c<\infty)$ で，特異点における決定方程式はすべて二重根をもつ。すなわち前に述べた書き方にしたがえば，(E_γ) の type は s_c である．$c=a$ となるように γ がえらべれば (E_γ) は type s_a に含まれる Fuchsian equation で，証明は終ることになる．

γ が $\widehat{\beta\delta}$ 上を動くときの，方程式 (E_γ) 全体の集合を Γ とし，これを $\widehat{\beta\delta}$ と同一視する．対応 $\gamma\to f(\gamma)$ により Γ から type の集合 S への写像を定義する．この写像が surjection であることを示せば $f(\gamma)=a$ となる $\gamma\in\Gamma$ の存在がいえるので (β) は証明されたことになる．ところが f は連続であるから，もし

$$\lim_{\gamma\to\beta} f(\gamma)=1, \qquad \lim_{\gamma\to\delta} f(\gamma)=\infty$$

をいえれば $f:\Gamma\to S$ は surjection となり証明が完結する。

G_γ の生成元は明らかに γ の連続関数であるから、G_γ が γ に連続に依存することは明らかである。そこでいま $\gamma\to\beta$ とすると辺 $\widehat{\beta\gamma}$, $\widehat{\beta'\gamma'}$ は消滅して第4図のような limiting polygon $\alpha\beta\delta\beta'$ が生ずる。これを基本領域にもち $\widehat{\alpha\beta}\to\widehat{\alpha\beta'}$, $\widehat{\beta\delta}\to\widehat{\beta'\delta}$ を生成元とするフックス群の種数は図から明らかなように 0 である



第4図

から、$\gamma\to\beta$ のとき G_γ の種数は変化しない。したがって Second Lemma により、(E_γ) の特異点は limiting polygon の定めるフックス群から作られる Fuchsian equation の特異点に収束する。ところが　それは $0, 1, \infty$ であるから $\lim_{\gamma\to\beta} f(\gamma)=1$.

$\gamma\to\delta$ として同じ議論をくりかえせば $\lim_{\gamma\to\delta} f(\gamma)=\infty$ となり、これで特異点の数が4の場合は解決する。

Poincaré はさらに特異点の数が5の場合についても同様な証明を行なってみせ、証明の方法は特異点の数がいくつであっても同じであると主張する。これが symmetric type に対する (β) の証明である。

§6. 前節で示した symmetric type に対する証明を手がかりとして、Poincaré は (α) を証明する方法として continuity method なるものを提唱する。ところがこの部分の Poincaré の説明はきわめてわかりにくい。私はそれに多くの蛇足をつけ加えて次のように解讀してみた。

symmetric type についての証明をふりかえってみると、その要点はフックス群の集合 Γ から type の集合 S への写像 f が surjection であることを示す所にある。そのためにわれわれは $\partial\Gamma \to \partial S$ であることを示し、これと f の連續性とから f が surjection であることを結論した。これはいわば topological な手法である。このように topological な手法である写像の surjectivity を証明し、それによって存在定理を証明しようというのが Poincaré-Klein の continuity method である。

以下に述べるのが continuity method による (α) の証明(らしい物)である。

Fuchsian type の方程式が二つ与えられたとし、それを

(5) $\quad d^2v/dx^2 = \varphi(x,y)\,v, \qquad \psi(x,y)=0,$

(6) $\quad d^2v/dx^2 = \varphi_1(x,y)\,v, \qquad \psi_1(x,y)=0,$

とする。次の三つの条件が成り立つとき (5) の決める type と (6) の決める type とは同じ class に属するという。

i) $\psi(x,y)=0$ のリーマン面と、$\psi_1(x,y)=0$ のリーマン面と

は同じ種数をもつ．それを g としよう．

ii) (5) と (6) とは同数の特異点をもつ．それ等をそれぞれ

$$p_1, \cdots, p_m ; \quad q_1, \cdots, q_m$$

としよう．

iii) p_k における (5) の決定方程式の根と，q_k における (6) の決定方程式の根とは一致する．

Fuchsian type s_0 があって，それが Fuchsian equation を含むことを証明しようとするならば，まず s_0 と同じ class に属する type 全体の集合を考え，それを S とする．

S の一点，すなわち一つの type を指定するのに必要なパラメーターの数を計算してみよう．簡単のために $g \geqq 2$ の場合だけを考える，その type の方程式をかりに (5) としよう．

種数 g のリーマン面上に m 個の特異点をもつフックス型方程式

$$d^n v/dx^n + \varphi_1 \cdot d^{n-1}v/dx^{n-1} + \cdots + \varphi_n v = 0$$

の各係数 φ_k はそれぞれ（特異点の位置を固定したとき）

$$k(m+2g-2)+1-g$$

だけの任意定数を含むことがわかっている．われわれの場合 $\varphi_1 \equiv 0$ にとっているから，(5) の方程式の含む任意定数の数は φ_2 の含む任意定数の数 $2m+3g-3$ に特異点の個数 m を加えた $3m+3g-3$ である．

さらに種類数 g のリーマン面全体の中から birationally equivalent な class を一つ指定するには $3g-3$ 個の moduli を必要とする。これ等の数を加えると $3m+6g-6$ であるから，S は $\mathbb{C}^{3m+6g-6}$ の部分集合となる。

一方，各特異点では決定方程式の根が指定されており，しかも (5) のように dv/dx が含まれていない方程式では，決定方程式の根の和は決まった値をもっているので，これは各特異点ごとに等式が一つずつ課せられていることに他ならない。ゆえに上記 $3m+6g-6$ 個のパラメーターの間に m 個の等式が成り立たねばならない。

この他にいくつかの不等式が必要である。それは特異点が合流して個数が減らないための条件と，係数 φ の種数が g より小さくならないための条件を表わす不等式である。

すなわち S は $\mathbb{C}^{3m+6g-6}$ の中で m 個の等式と，いくつかの不等式を満たす点の全体である。したがって境界をもつ $2m+6g-6$ 次元の複素多様体とみなしてよいであろう。

次にフックス群 G で，それから導かれる Fuchsian equation の type が S に含まれるようなものの全体を Γ とする。これの基本領域は第2図のような形にとることができる。ここで A_k に対応する辺を A_k^{-1} に対応する辺に移す変換を α_k，B_k に対応する辺を B_k^{-1} に対応する辺に移す変換を β_k，C_j に対応する辺を C_j^{-1}

に対応する辺に移す変換をγ_jとすればGは$2g+m$個の変換

$$\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$$

で生成される。ただしこれ等の間に関係

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1\cdots\gamma_m = I$$

が成り立つので独立なものは$2g+m-1$で、したがってGを指定するパラメーターの数は$3(2g+m-1)$であるが、1次分数変換で共役なものは同一視するから、その自由度3をさしひけば、$3m+6g-6$となる。すなわちΓも$\mathbb{C}^{3m+6g-6}$の部分集合である。

ところでわれわれの考えているtypeでは決定方程式の根の差を$1/\nu_j$とすればν_jは整数または∞で、したがって$\nu_j<\infty$のときは$\gamma_j^{\nu_j}=I$という関係が成り立つ。$\nu_j=\infty$のときにはγ_jはparabolicな変換でなければならないから、変換の係数の間にやはり一つの条件がつく。すなわち上記の$3m+6g-6$個のパラメーターはm個の等式を満たさねばならない。

この他に、基本領域の辺がつぶれて頂点の数が減ることを禁ずるためのいくつかの不等式が必要である。

以上のことからΓは$2m+6g-6$次元の、境界のある多様体とみなしてよいであろう。これでSとΓの次元が等しいことがわかった。この次元数をdと書くことにしよう。

$\partial\Gamma$はΓを定義する不等式のうちのいくつかを等式でおきかえて得られる，この等式は解析的な関係式であるから，$\partial\Gamma$の複素次元数は高々 $d-1$ である．したがって $\dim(\cdot)$ によって実次元数を表わせば

$$\dim(\partial\Gamma) \leqq 2d-2.$$

なお$\partial\Gamma$に属するフックス群は，Γに属するフックス群の基本領域のいくつかの辺がつぶれたものであるから，Second Lemma の所で述べた limiting polygon である．したがって

a) 種数が g より小さいか，または

b) それから作られる Fuchsian equation の特異点の数が m より少ない．

フックス群に，それから作られる Fuchsian equation の type を対応させることにより写像 $f: \Gamma \to S$ が得られる．$f(\Gamma) = S$ を証明すればよい．

Fundamental Lemma によれば一つの Type に含まれる Fuchsian equation の数は高々 1 であるから fは injective である．また f, f^{-1}がともに holomorphic map であることはほぼ確からしいから，Γと$f(\Gamma)$とは同相である．

この辺の所はまことに怪しげな議論であるが，Poincaré の論文にこういう怪しげな話が書いてあるわけではない．実をいうと彼はこの種の議論を一切していないのである．彼はた

だ，いくつかの example をあげて，それについて彼の主張の正しいことを例示しているだけである．これも Poincaré の論文の特徴の一つである．

さて $S - f(\Gamma) = S'$ とする．$f(\Gamma)$ はもちろん S の内点を含む．S は多様体であるから S' がもし内点を含めば $f(\Gamma)$ と S' との境界の実次元は $2d-1$ となる．ところがそれは一方 $f(\partial\Gamma)$ であって $\dim(\partial\Gamma) \leqq 2d-2$，$f$ は同相写像であるからこれは矛盾である．ゆえに S' は内点を含まない．したがって $s \in S'$ とすれば $s_k \to s$ となる列 $\{s_k\}$ を $f(\Gamma)$ の中にとることができる．$f^{-1}(s_k) = \gamma_k$ としよう．$\gamma_k \to \gamma \in \Gamma$ ならば $f(\gamma) = s \in f(\Gamma)$ となって矛盾であるから $\gamma \in \partial\Gamma$．そして Second Lemma により $f(\gamma) = s$．ところが $\gamma \in \partial\Gamma$ ならばそれから作られる Fuchsian equation に対し a) または b) が成り立つから $s \notin S$．ゆえに $S' = \phi$ となり，これで continuity method が完結する．

論文 1 には，まだこの先があって，(1) を (2) の形 [illegible] の方程式の解の比を用いて uniformize するとき，方程式 (2) を実際につくるにはどうすればよいかという議論，また $v = v(z)$，$x = x(z)$ のように uniformize したとき，$v(z)$ を不変にする G の部分群に関する議論等がなされている．

論文2は，論文1に直結した内容をもっている．そこでは uniformize された解 $v(z)$ の，z平面上の基本円の内部全体で使えるような表示式を求める問題がとり上げられる．ゼータフックス関数とよばれる新しいタイプの関数がここで登場する．この関数は後に Weil の論文 "Généralisation des fonctions abéliennes, Journ. de Math. 17 (1938)" の中で重要な役割を演ずる．

論文3ではモノドロミー群が有限群となる場合，したがって (1) の解が x の代数関数となる場合が論じられている．しかし私のおぼつかない解説も，そろそろ息が切れてきたのでこの辺で終りにしようと思う．

Poincaré の論文の面白さは，このような解説文を読んだのでは実はよくわからない．彼独特の，時には冗長で，時には混乱し，時には論理が飛躍する記述の中から，彼の思想の流れをさぐりあてるだけの手間をかけないと，その本当の魅力にはふれられないように私には思えるのである．

付記 1. L. R. Ford の著書 Automorphic Functions の中に $g=0$ の場合に対する (α) の証明が与えられているようである．ただしそれは continuity method を使ったものではない．

2. この解説の中で用いた，代数関数を係数とするフックス

型方程式に対するフックスの関係式や，それの含む任意定数の個数（c_{mn}と書いたもの）等は筆者自身が計算したものであることを最後に記して，ささやかな自己宣伝を試みておく．