数理解析研究所講究録
389巻 1980年 78-91

Semi-free S^1-equivariant stable homotopy groups of spheres

阪市大 理　下田 義博

S^1-同変コホモロジー論で特に、S^1の標準的表現と自明な表現によって生成されるRO(S^1)の部分加群に次元をもつものを考える．その最も簡単なものとして安定コホモトピー群について調べる。上の様なRO(S^1)の部分加群をRO(S^1)^{V}と書く事にする．又以降VはS^1の標準的表現で決定される実2次元表現空間とする．

定義　$\pi_{S^1,V}^{pV+q}(X) \equiv \operatorname*{colim}_{k,l}[\Sigma^{(k-p)V+l-q}X, \Sigma^{kV+l}]^{S^1}$

$\pi^{S^1,V}_{pV+q}(X) \equiv \operatorname*{colim}_{k,l}[\Sigma^{(k+p)V+l+q}, \Sigma^{kV+l}X]^{S^1}$

但しXは基点を持ったS^1-CW複体．　$p, q \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}^{pV+q} \equiv V^p \times \mathbb{R}^q$　　$B^{pV+q} \equiv \{v \in \mathbb{R}^{pV+q} : \|x\| \leq 1\}$

$S^{pV+q} \equiv \{v \in \mathbb{R}^{pV+q} : \|x\| = 1\}$　　$\Sigma^{pV+q} \equiv B^{pV+q}/S^{pV+q}$

荒木、村上[2,3]により T-コホモロジー論は、すでによく知られている．そこで $\pi_{S^1,V}^{pV+q}(X)$ についてそれらと

同様の事が云える事を示し $X = \Sigma^0$ の時 実際に $\pi_{S^1,V}^{pV+q} = \pi^{S^1,V}_{-pV-q}$ を求める事がこの論文の目的である．ここで $\pi_{S^1,V}^{pV+q}\ (\equiv \pi_{S^1,V}^{pV+q}(\Sigma^0))$ 又は $\pi^{S^1,V}_{-pV-q}$ を $-pV-q$ 次 Semi-free S^1-equivariant stable homotopy group of sphere と云う．

§1 基本的性質

S^1-CW complex X に対し ΨX, ΦX で各々 forgetful space, fixed-point space を表わす．定義より次の1)〜3)は直ちにわかる．又4)は pointed S^1-complexes の対に対する同変 homotopy extension property (T. Matumoto [7]) を考えればすぐにわかる．

1) $\pi_{S^1,V}^{pV+q}(\ \ )$ は S^1-homotopy functor で Wedge axiom, Mayer-Vietoris axiom, を満す。

2) $\exists\, \sigma^{rV+s} : \pi_{S^1,V}^{pV+q}(X) \xrightarrow{\cong} \pi_{S^1,V}^{(p+r)V+q+s}(\Sigma^{rV+s} X)$

3) 次の図式は可換

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{S^1,V}^{pV+q+1}(\Sigma^1 X) \arrow[r, "\sigma^V"] & \pi_{S^1,V}^{(p+1)V+q+1}(\Sigma^V \Sigma^1 X) \arrow[d, "T^*"] \\
\pi_{S^1,V}^{pV+q}(X) \arrow[ur, "\sigma^1"] \arrow[r, "\sigma^V"'] & \pi_{S^1,V}^{(p+1)V+q}(\Sigma^V X) \arrow[r, "\sigma^1"] & \pi_{S^1,V}^{(p+1)V+q+1}(\Sigma^1 \Sigma^V X)
\end{tikzcd}$$

4) (X, A) に対し

$\longrightarrow \pi_{S^1,V}^{pV+q}(X/A) \xrightarrow{\pi^*} \pi_{S^1,V}^{pV+q}(X) \xrightarrow{i^*} \pi_{S^1,V}^{pV+q}(A) \xrightarrow{\delta^*} \pi_{S^1,V}^{pV+q+1}(X/A) \longrightarrow \cdots$ は exact である．

$\xi : S_+^V \wedge \psi X \longrightarrow S_+^V \wedge X \qquad (e^{i\theta}, x) \longmapsto (e^{i\theta}, e^{i\theta}x)$

は明らかに S^1-homeo. である. したがって次の合成写像は同型である.

$$\pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) \xrightarrow[\sigma^2]{} \pi_{S^1,V}^{pV+q+2}(\Sigma^2 \wedge S_+^V \wedge X) \xrightarrow[\xi^{-1}]{} \pi_{S^1,V}^{pV+q+2}(\Sigma^V \wedge S_+^V \wedge X)$$
$$\xrightarrow[\sigma^V]{} \pi_{S^1,V}^{(p-1)V+q+2}(S_+^V \wedge X) \to \cdots\cdots \to \pi_{S^1,V}^{2p+q}(S_+^V \wedge X)$$
$$\xrightarrow[\xi^*]{} \pi_{S^1,V}^{2p+q}(S_+^V \wedge \psi X)$$

<u>定理1</u> $\quad \pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) \cong \pi_S^{2p+q}(\psi X)$

[証明]

$$\pi_{S^1,V}^{2p+q}(S_+^V \wedge \psi X) = \operatorname*{colim}_{k,l} [\Sigma^{kV+l-2p-q} \wedge S_+^V \wedge \psi X, \Sigma^{kV+l}]^{S^1}$$
$$= \operatorname*{colim}_{k,l} [S_+^V \wedge \Sigma^{2k+l-2p-q} \wedge \psi X, \Sigma^{kV+l}]^{S^1}$$
$$= \operatorname{colim} [\Sigma^{2k+l-2p-q} \wedge \psi X, \Sigma^{2k+l}]$$
$$= \pi_S^{2p+q}(\psi X)$$

$\pi : S_+^V \wedge X \longrightarrow \Sigma^0 \wedge X = X \qquad (e^{i\theta}, x) \longrightarrow (0, x)$ とする時

$$\begin{tikzcd}
\psi : \pi_{S^1,V}^{pV+q}(X) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi^*"'] & & \pi_S^{2p+q}(\psi X) \\
& \pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

を forgetful morphism と云う.

(B_+^V, S_+^V) に対する exact 列を考える

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \pi_{S^1,V}^{pV+q}(\Sigma^V) \arrow[r, "\pi^*"'] \arrow[d, "\cong\ \sigma^{-V}"] & \pi_{S^1,V}^{pV+q}(B_+^V) \arrow[r, "i^*"'] \arrow[d, "\cong\ i^*"] & \pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^V) \arrow[r, "\delta^*"'] \arrow[d, "\cong\ \psi"] & \pi_{S^1,V}^{pV+q+1}(\Sigma^V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong\ \sigma^{-V}"] & {} \\
\arrow[r] & \pi_{S^1,V}^{(p-1)V+q} \arrow[r, "x"] & \pi_{S^1,V}^{pV+q} \arrow[r, "\psi"] & \pi_S^{2p+q} \arrow[r, "\delta^*"] & \pi_{S^1,V}^{(p-1)V+q+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

下の方の exact 列を forgetful exact 列と云う.

<u>定理2</u>　1) $\mathrm{colim}\{\pi_{s,V}^{pV+q} : \lambda\} \cong \pi_s^q$

2) 自然な写像　$\phi : \pi_{s,V}^{pV+q} \longrightarrow \pi_s^q$　は　$2p+q \geq 0$ の時同型

である

[証明]

1) $\mathrm{colim}\{\pi_{s,V}^{pV+q} : \lambda\} = \underset{\lambda}{\mathrm{colim}}\ \underset{k,l}{\mathrm{colim}}\ [\Sigma^{(k-p)V+l-q}, \Sigma^{kV+l}]^{S'}$

$= \underset{k,l}{\mathrm{colim}}\ \underset{\lambda}{\mathrm{colim}}\ [\Sigma^{(k-p)V+l-q}, \Sigma^{kV+l}]^{S'}$

$= \underset{k,l}{\mathrm{colim}}\ \underset{\lambda}{\mathrm{colim}}\ [\Sigma^{l-q}, \Sigma^{(k+p)V+l}]^{S'}$

$= \underset{k,l}{\mathrm{colim}}\ \underset{\lambda}{\mathrm{colim}}\ [\Sigma^{l-q}, \Sigma^{l}]$

$= \pi_s^q$

2)　$q \geq 1$　ならば　$\pi_s^q = 0$．したがって forgetful exact 列と

1) よりすぐに分かる．

§2．積といくつかの関係式

<u>命題3</u>　次の 1)～5) を満足する積　$\wedge$　: $\pi_{s,V}^{pV+q}(X) \otimes \pi_{s,V}^{rV+s}(Y)$

$\longrightarrow \pi_{s,V}^{(p+r)V+q+s}(X\wedge Y)$　　$x \otimes y \longmapsto x\wedge y$　が存在する。

1) $\sigma^{aV+b}(x\wedge y) = \sigma^{aV+b}x \wedge y = (-1)^{bq}x \wedge \sigma^{aV+b}y$

2) $z \in \pi_{s,V}^{aV+b}(Z)$　,　$1 = \{[\mathrm{id}_{kV+l}]^{S'}\} \in \pi_{s,V}^{0}$　, に対して

$(x\wedge y)\wedge z = x \wedge (y\wedge z)$

$x\wedge 1 = 1\wedge x = x$

$T^*(y\wedge x) = (-1)^{qs}x\wedge y$　　　$T : X\wedge Y \longrightarrow Y\wedge X$ は　同

変 switching map である.

3) $x \wedge y = y \circ x$

$x \in \mathbb{L}_{s',V}^{pV+q}(X_+)$, $y \in \mathbb{L}_{s',V}^{rV+s}(X_+)$, $w \in \mathbb{L}_{s',V}^{aV+b}(X_+)$ に対して

$x \cdot y \equiv d^*(x \wedge y)$ $\quad d : X_+ \longrightarrow X_+ \wedge X_+$ diagonal map

とする.

4) $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$ $\qquad$ 但し $1 \equiv \pi^*(1) \in \mathbb{L}_{s',V}^{0}(X_+)$ $\pi : X_+ \to \Sigma^0$

$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$

$vu = (-1)^{qs} u \cdot v$

5) $\Psi(u \cdot v) = \Psi(u) \cdot \Psi(v)$

次に2つの同変 cofibrations $S_+^{rV} \overset{i_r}{\subset} B_+^{rV} \xrightarrow{\pi_r} \Sigma^{rV}$,
$S_+^{rV} \overset{\eta_{r,r+s}}{\subset} S_+^{(r+s)V} \xrightarrow{\zeta_{r+s,s}} S_+^{(r+s)V}/S_+^{rV} \cong \Sigma^{rV} \wedge S_+^{sV}$ によって誘導される exact 列を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(\Sigma^{rV}) & \xrightarrow{\pi_r^*} & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(B_+^{rV}) & \xrightarrow{i_r^*} & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(S_+^{rV}) & \xrightarrow{\delta^*} & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q+1}(\Sigma^{rV}) & \\
& \cong \Big\downarrow \sigma^{-rV} & & \cong \Big\downarrow \pi & & \Big\| \Big\downarrow id & & \cong \Big\downarrow \sigma^{-rV} & \\
\longrightarrow & \mathbb{L}_{s',V}^{pV+q} & \xrightarrow{\alpha_r} & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q} & \xrightarrow{\beta_r} & \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(S_+^{rV}) & \xrightarrow{\delta_r} & \mathbb{L}_{s',V}^{pV+q+1} & \longrightarrow
\end{array}$$

$r = 1$ の時この exact 列は明らかに forgetful exact 列と一致する つまり $\alpha_1 = x$ $\quad \beta_1 = \Psi$

$$\xrightarrow{\delta_{s,r}^*} \mathbb{L}_{s',V}^{pV+q}(S_+^{sV}) \xrightarrow{\zeta_{r+s,s}^*} \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(S_+^{(r+s)V}) \xrightarrow{\eta_{r,r+s}^*} \mathbb{L}_{s',V}^{(p+r)V+q}(S_+^{rV}) \longrightarrow$$

これらの exact 列に対して 次の関係式が成り立つ事がわかる.

<u>命題4</u> 1) $\alpha_r \circ \alpha_s = \alpha_{r+s} = \chi^{r+s}$

2) $\delta_{r+s} \cdot \xi^*_{r+s,\,s} = \delta_s$

3) $\xi^*_{r+s,s} \cdot \beta_s = \beta_{r+s} \cdot \alpha_r$

4) $\beta_s \circ \delta_r = \delta^*_{s,r}$

5) $\eta^*_{r,r+s} \cdot \beta_{r+s} = \beta_r$

6) $\alpha_s \circ \delta_{r+s} = \delta_r \cdot \eta^*_{r,r+s}$

7) $\xi^*_{r+s+t,\,s+t} \circ \xi^*_{s+t,\,t} = \xi^*_{r+s+t,\,t}$

8) $\eta^*_{r,\,r+s} \cdot \eta^*_{r+s,\,r+s+t} = \eta^*_{r,\,r+s+t}$

9) $\xi^*_{s+t,t} \circ \delta^*_{t,\,r+s} = \delta^*_{s+t,\,r} \cdot \eta^*_{r,\,r+s}$

10) $\xi^*_{r+s,s} \cdot \eta^*_{s,\,s+t} = \eta^*_{r+s,\,r+s+t} \cdot \xi^*_{r+s+t,\,s+t}$

11) $\delta_{t,s} = \delta_{t,\,r+s} \cdot \xi^*_{r+s,s}$

12) $u_1 \in \pi^{pv+q}_{s',v}$, $u_2 \in \pi^{tv+u}_{s',v}$, $v \in \pi^{kv+l}_{s',v}(S_+^{rv})$ に対して

$\alpha_r(u_1 \cdot u_2) = \alpha_r(u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot \alpha_r(u_2)$

$\beta_r(u_1 \cdot u_2) = \beta_r(u_1) \cdot \beta_r(u_2)$

$\delta_r(v \cdot \beta_r(u_1)) = \delta_r(v) \cdot u_1$

$\delta_r(\beta_r(u_1) \cdot v) = (-1)^q u_1 \cdot \delta_r(v)$

13) $u \in \pi^{pv+q}_{s',v}(S_+^{(r+s)v})$, $v \in \pi^{kv+l}_{s',v}(S_+^{sv})$ に対して

$\xi^*_{r+s,s}(v \cdot \eta^*_{s,r+s}(u)) = \xi^*_{r+s,s}(v) \cdot u$

$\xi^*_{r+s,s}(\eta^*_{s,r+s}(u) \cdot v) = u \cdot \xi^*_{r+s,s}(v)$

14) $u_1, u_2 \in \pi^*_{s',v}(S_+^{(r+s)v})$ に対して

$\eta^*_{r,r+s}(u_1 \cdot u_2) = \eta^*_{r,r+s}(u_1) \cdot \eta^*_{r,r+s}(u_2)$

15) $u \in \pi_{s',V}^{pV+q}(S_+^{(r+s)V})$, $v \in \pi_{s',V}^{kV+l}(S_+^{rV})$ に対して

$$\delta^*_{s,r}(v \cdot \eta^*_{r,r+s}(u)) = \delta^*_{s,r}(v) \cdot \eta^*_{s,r+s}(u)$$

$$\delta^*_{s,r}(\eta^*_{r,r+s}(u) \cdot v) = (-1)^q \eta^*_{s,r+s}(u) \cdot \delta^*_{s,r}(v)$$

16) $u \in \pi_{s',V}^{pV+q}(S_+^{rV})$, $v \in \pi_{s',V}^{aV+q}(S_+^{rV})$ に対して

$$\delta^*_{1,r}(u \cdot v) = \delta^*_{1,r}(u)\, \eta^*_{1,r}(v) + (-1)^q \eta^*_{1,r}(u) \cdot \delta^*_{1,r}(v)$$

§3. $\pi_{s',V}^{pV+q}$ を求めるための一般論

$$\pi_s^p = \operatorname*{colim}_l [\Sigma^{l-p}, \Sigma^l] = \operatorname*{colim}_l [\Sigma^{l-p}, \Sigma^l]^{s'}$$

$$\pi_{s',V}^p = \operatorname*{colim}_{k,l} [\Sigma^{kV+l-p}, \Sigma^{kV+l}]^{s'} = \operatorname*{coli}_k \operatorname*{colim}_l [\Sigma^{kV+l-p}, \Sigma^{kV+l}]^{s'}$$

したがって自然な準同型 $\theta : \pi_s^p \longrightarrow \pi_{s',V}^p$ が存在する.

<u>命題5</u>　$\psi \cdot \theta = id$　　$\phi \cdot \theta = id$

$p \geq 0$ に対して　$\theta_p \equiv \chi^p \cdot \theta : \pi_s^q \longrightarrow \pi_{s',V}^{pV+q}$ と定義する.

<u>補題6</u>　$\phi \cdot \theta_p = id$　　　$p \geq 0$

$2r \geq -(2p+q)+1$ の時次の exact 列を考える.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_{s',V}^{pV+q-1} \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[dr, "\phi"] & \pi_{s',V}^{(p+r)V+q-1} \arrow[r, "\beta_r"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_{s',V}^{(p+r)V+q-1}(S_+^{rV}) \arrow[r, "\delta_r"] & \pi_{s',V}^{pV+q} \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[dr, "\phi"] & \pi_{s',V}^{(p+r)V+q} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {} \\
& & \pi_s^{q-1} \arrow[ul, dashed, bend left, "\theta_p"] & & & \pi_s^q \arrow[ul, dashed, bend left, "\theta_p"] &
\end{tikzcd}$$

補題6より次の定理を得る.

<u>定理7</u>　$2r \geq -(2p+q)+1$ の時次の 1), 2) が成り立つ.

1) $p \geq 0$ ならば $\pi_{s,v}^{pv+q} \cong \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv}) \oplus \pi_s^q$

2) $q > 1$ ならば $\pi_{s,v}^{pv+q} \cong \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv})$

したがって $\pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv})$ は重要な群である. これについて調べてみる.

<u>定理 8</u> （Landweber [6] 参照）

$p \leq 0 \quad q-1 \leq 2(-2p-1) \quad 2r \geq 2p+q+1$ の時

$\pi_{s,v}^{(r-p)v-q-1}(S_+^{rv}) \cong \pi_{-2p+(2p+q)}(W_{r-p,r})$

但し $W_{r-p,r} = U(r-p)/U(-p)$ complex Stiefel manifold である.

<u>補題 9</u> （Adams, Walker [1]）

$\eta \longrightarrow CP_k$ を canonical complex line bundle とする.

$J : KO(CP_k) \longrightarrow \tilde{J}(CP_k)$ に於いて $J(\eta)$ の order は

$b_k = 2^{\nu_2(b_k)} 3^{\nu_3(b_k)} 5^{\nu_5(b_k)} \cdots$ である.

$$\nu_p(b_k) = \begin{cases} \max(r + \nu_p(r)) & 1 \leq r \leq [(k-1)/(p-1)] \quad p \leq k \\ 0 & p > k \end{cases}$$

<u>定理 10</u> 各 k に対し適当な正の整数が存在して次の同変 homotopy 同値写像を誘導する.

$\omega_k : S_+^{kv} \wedge \Sigma^{2b_k + m_k} \longrightarrow S_+^{kv} \wedge \Sigma^{b_k v + m_k}$

[証明]

$d : S^{kV} \times \mathbb{C}^{b_k} \longrightarrow S^{kV}$ を real S^1-vector bundle とする。S^1-作用は diagonal である。S^{kV} は free S^1-space であるので $d/S^1 : S^{kV} \times \mathbb{C}^{b_k}/S^1 \longrightarrow S^{kV}/S^1$ は real

$$\begin{array}{ccc} S^{kV} \times \mathbb{C}^{b_k}/S^1 & \longrightarrow & S^{kV}/S^1 \\ \| & & \\ b_k\eta & \longrightarrow & \mathbb{C}P_k \end{array}$$

vector bundle である。補題より $J(b_k\eta) = 0$ したがって $\exists m_k$ st $S(b_k\eta \oplus m_k) \underset{F}{\simeq} S(2b_k \oplus m_k)$: fibre homotopy 同値。よって $S(d \oplus m_k) \underset{S^1\text{-}F}{\simeq} S(2b_k \oplus m_k)$

よって
$$\begin{array}{ccc} (S^{kV})^{d\oplus m_k} & \underset{S^1}{\simeq} & (S^{kV})^{2b_k \oplus m_k} \\ \| & & \| \\ S_+^{kV} \wedge \Sigma^{b_k d + m_k} & & S_+^{kV} \wedge \Sigma^{2b_k + m_k} \end{array}$$

$\omega_k \in \pi_{S^1,V}^{b_k V - 2b_k}(S_+^{kV})$ を次の様に定義しそれを periodicity element と云う。

$$\omega_k^* : \pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^{kV}) \xrightarrow[\cong]{\sigma^{b_k d + m_k}} \pi_{S^1,V}^{(p+b_k)V+q+m_k}(S_+^{kV} \wedge \Sigma^{b_k V + m_k})$$
$$\xrightarrow[\cong]{\omega_k^*} \pi_{S^1,V}^{(p+b_k)V+q+m_k}(S_+^{kV} \wedge \Sigma^{2b_k + m_k}) \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-2b_k - m_k}} \pi_{S^1,V}^{(p+b_k)V+q-2b_k}(S_+^{kV})$$

$\omega_k \equiv \omega_k^*(1)$

<u>命題11</u> 1) $\omega_k^*(u) = \omega_k \cdot u \qquad u \in \pi_{S^1,V}^{pV+q}(S_+^{kV})$

2) $\eta_{1,k}^*(\omega_k) = \omega_1^{b_k} \in \pi_{S^1,V}^{b_k V - 2b_k}(S_+^V)$ となる様に $\{\omega_k\}$ は選べる。

3) 特に ω_1 は複素数 ω_2 は四元数の積を用いて次の様に与

える事が出来る．

- $\mu_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$　複素数の積に対し

$\omega_1 : S^V \times (B^2, S^2) \longrightarrow S^V \times (B^V, S^V)$　　$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \mu_1(z_1, z_2))$

- $\mu_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$　四元数の積に対し

$\omega_2 : S^{2V} \times (B^4, S^4) \longrightarrow S^{2V} \times (B^{2V}, S^{2V})$

$(z_1, z_2, z_1', z_2') \longmapsto (z_1, z_2, \mu_2(z_1, z_2, z_1', z_2'))$

$(\ \mu_2(z_1, z_2, z_1', z_2') = (z_1 z_1' - \bar{z}_2' z_2,\ z_2' z_1 + z_2 \bar{z}_1')\ )$

4) 3) の様に ω_1, ω_2 を与えると　$\Psi J_1 \omega_1 = \eta$　$\Psi J_2 \omega_2 = \nu$

§4　$\pi_{s;V}^{pV+q}$ の計算結果

以上の準備の下で $\pi_{pV+q}^{s;V}$ は　$2p+q \leq 7$ まで求める事が出来る．以下にその結果を書く．

<u>定理12</u>　$\pi_{pV+q}^{s;V}$　　$2p+q \leq 7$.

1)　$2p+q=1$

$\pi_{V-1}^{s;V} = 0$

$\pi_{-nV+2n+1}^{s;V}\quad (n \neq 1) \quad \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n+1}^{s}$

2) $2p+q = 2$

$\pi_{V}^{s;V} = 0$

$\pi_{-2nV+2n+2}^{s;V} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \pi_{4n+2}^{s}$

$\pi_{-(2n+1)V+4n+4}^{s;V}\quad (n \neq -1) \cong \pi_{4n+4}^{s}$

3) $2p + q = 3$

$\pi^{s',V}_{2V-1} \cong \mathbb{Z}/2$

$\pi^{s',V}_{V+1} \cong \mathbb{Z}$

$\pi^{s',V}_{2nV+4n+3} \quad (n \neq -1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi^{s}_{4n+3}$

$\pi^{s',V}_{-(2n+1)+4n+5} \quad (n \neq -1) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^{s}_{4n+5}$

4) $2p+q=4$

$\pi^{s',V}_{2V} = 0$

$\pi^{s',V}_{V+2} \cong \mathbb{Z}/2$

- p : odd

$\pi^{s',V}_{-(24n+p)V+48n+2p+4} \cong \mathbb{Z}/(12, \frac{p+3}{2}) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+4}$

($p=23$ 且つ $n=-1$ を除く)

- p : even

$$\pi^{s',V}_{-(24n+p)V+48n+2p+4} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(8+P_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+4} & p \equiv 0 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(4+P_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+4} & p \equiv 4 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(2+P_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+4} & p \equiv 2 \ (4) \end{cases}$$

($p=22$ 且つ $n=-1$ を除く)

$$P_p = \begin{cases} 3 & p \equiv 0 \quad (3) \\ 0 & p \not\equiv 0 \quad (3) \end{cases}$$

5) $2p+q=5$

$\pi^{s',V}_{3V-1} = 0$

$\pi^{s',V}_{2V+1} \cong \mathbb{Z}$

$\pi^{s',V}_{V+3} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$

$$\pi^{s,v}_{-(24n+p)v+48n+2p+5} \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^{s}_{48n+2p+5} \quad (p=2 \text{ 且つ } n=-1 \text{ を除く})$$

6) $2p+q=6$

$$\pi^{s,v}_{3v} = 0$$

$$\pi^{s,v}_{2v+2} \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\pi^{s,v}_{v+4} \cong \mathbb{Z}/24$$

- p : odd

$$\pi^{s,v}_{-(24n+p)v+48n+2p+6} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(2+A_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 1 \ (4) \\ \mathbb{Z}/(4+A_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 3 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(8+A_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 7 \ (8) \end{cases}$$

$$A_p = \begin{cases} 3 & p \equiv 2 \ (3) \\ 0 & p \not\equiv 2 \ (3) \end{cases}$$

($p=21, 23$ 且つ $n=-1$ を除く)

- p : even

$$\pi^{s,v}_{-(24n+p)v+48n+2p+6} \cong \begin{matrix} \mathbb{Z}/A_p \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 2 \ (4) \\ \mathbb{Z}/(2+A_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 0 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(4+A_p) \oplus \pi^{s}_{48n+2p+6} & p \equiv 4 \ (8) \end{matrix}$$

($p=22$ 且つ $n=-1$ を除く)

7) $2p+q=7$

$$\pi^{s,v}_{4v-1} \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\pi^{s,v}_{3v+1} \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi^{s,v}_{2v+3} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$$

・ P : odd

$$\pi^{s,V}_{-(24n+p)V+48n+2p+7} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi^{s}_{48n+2p+7} & p \equiv 1\ (4) \\ \mathbb{Z} \oplus \pi^{s}_{48n+2p+7} & p \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

($p=23, 21$ 且つ $n=-1$) を除く

・ P : even

$$\pi^{s,V}_{-(24n+p)V+48n+2p+7} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \pi^{s}_{48n+2p+7} & p \equiv 2\ (4) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi^{s}_{48n+2p+7} & p \equiv 0\ (4) \end{cases}$$

($p=22, 20$ 且つ $n=-1$) を除く.

<u>系13</u>

$2p+q \geqq 1$ の時 q が (-1) でない奇数ならば $\pi^{s,V}_{pV+q}$ は $\mathbb{Z}$ を direct summand としてちょうど1つ持つ.

[証明]

forgetful exact 列を用いて帰納的に調べる.

References

[1] J. F. Adams, G. Walker ; On complex Stiefel manifolds, Proc. Camb. Phil. Soc. (1965) 61 81−103

[2] S. Araki ; Forgetful spectral sequences, Osaka J. Math. (1979) 16 173−199

[3] S. Araki, M. Murayama : τ-cohomology theories, Japan

J. Math. (1978) Vol.4 No.2, 363–416

[4] M. F. Atiah : Thom complexes, Proc. London Math. Soc. (1961) (3) 11 291–310

[5] I. M. James : The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lec. note series 24.

[6] P. S. Landweber : On equivariant maps between spheres with involutions, Ann. of Math (1969) 89 125–137.

[7] T. Matumoto : On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead.

[8] Y. Nomura, Y. Furukawa : Some Homotopy Groups of Complex Stiefel Manifolds $W_{n,2}$ and $W_{n,3}$.

[9] R. Thom : Quelques propriétes globales des variétés différentiable, Comment. Math. Helv. (1954) 28 17–86.