数理解析研究所講究録
389巻 1980年 17-37

同変Segal Machine について

阪大 理　渡辺 祐二

§0. Introduction

Segalは[3]で，彼のΓ-空間を有限群Gの作用のある場合に一般化し，それにG-スペクトラムを対応させる同変delooping定理を証明した。そこで仮定されていた命題の証明が，Woolfson[4]に現われたので，それらをまとめて紹介する。

§1. Statements

以下Gは有限群とする。

$\boxed{\text{記号}}$ $\mathcal{W}_0^G$：コンパクト生成Hausdorff基点つきG空間で基点がG-近傍変位レトラクト(G-NDR)であり，G-CW-複体のホモトピー型をもつものと，基点を保つ連続G-写像とのカテゴリー。

$\boldsymbol{\Gamma}$：基点つき有限集合と基点を保つ写像とのカテゴリー

$\boxed{\text{定義}}$ Γから$\mathcal{W}_0^G$へのfunctorの事を；Γ-G-空間と言う。

Γ-G-空間の射 ⟺ 自然変換

Γ-G-空間の射 $f: A' \to A$ が<u>同値</u> $\Longleftrightarrow$ $\forall S \in \mathrm{Ob}\,\Gamma$, $f(S): A'(S) \to A(S)$ がG-ホモトピー同値（G-h.e.と略す.）

$\boxed{\text{定義}}$ Γ-G-空間Aが<u>特殊</u>

$\Longleftrightarrow$ 1) $A(\mathrm{point}) \underset{G\text{-}h.e.}{\xrightarrow{\simeq}} \mathrm{point}$

2) $\forall S, T \in \mathrm{Ob}\,\Gamma$, $A(S \vee T) \underset{G\text{-}h.e.}{\xrightarrow{\simeq}} A(S) \times A(T)$

$\boxed{\text{定義}}$ Hopf-G-空間 $X \times X \xrightarrow{m} X$ が<u>群状</u>

$\Longleftrightarrow$ mがホモトピー逆元をもつ.

$\boxed{\text{注意}}$ 特殊Γ-G-空間Aに対して右図の縦の写像がG-h.e.である事を用いて $\overset{m}{\dashrightarrow}$ を定ぎすると, $A(\underline{1})$ はHopf-G-空間になる.（ここで $\underline{1} = \{0, 1\}$, $\underline{2} = \{0, 1, 2\}$, 0が基点, $\partial_1(i) = 1$ $(i = 1, 2,)$）

$$\begin{tikzcd} A(\underline{1}) \times A(\underline{1}) \arrow[r, dashed, "m"] & A(\underline{1}) \\ A(\underline{2}) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[ur, "A(\partial_1)"'] & \end{tikzcd}$$

さらに, $A(\underline{1})$ がG連結（i.e. $\forall H < G$, $A(\underline{1})^H$ が弧状連結）なら群状になる.（例えば同変Dold-Thom定理[5]を使う.）

$\boxed{\text{定義}}$ Γ-G-空間Aが<u>"good"</u> $\Longleftrightarrow$ $\forall n$;

$\bigcup_{0 \le i \le n} A(s_i)(A(\underline{n})) \subset A(\underline{n+1})$ が $\mathfrak{S}_{n+1}$（$n+1$次対称群）同変G-NDR.（ただし $s_i: \underline{n} \to \underline{n+1}$ $\Longleftrightarrow$ $s_i(j) = \begin{cases} j & (j \le i) \\ j+1 & (j > i) \end{cases}$）

$\boxed{\text{注意}}$ ∀Γ-G-空間は同値なものでとり換えて"good"にできる.（[ ]App.B, 又は [2]App.A.）

単体的G-空間が"good"というのも同様に定義する. この

時は$\mathfrak{S}_{n+1}$同変でなくてもよい。

$\boxed{\text{定義}}$ $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_0^G$ に対して，Γ^{op} から $\mathcal{W}_0^G$ への functor X^Γ を次のように定ぎする.

$$\forall S\in \mathrm{Ob}\,\Gamma,\quad X^\Gamma(S)=\mathrm{Map}_0(S,X)=X^{\#(S\setminus\{\text{基点}\})}$$

(ただし，Map_0 は，基点を保つ写像のつくるG-空間。G-写像の空間ではない。)

$\boxed{\text{定義}}$ functor $\Gamma\times\Gamma\xrightarrow{\wedge}\Gamma$ (smash積) に "good" な特殊Γ-G-空間Aを続けたfunctor $(A\circ\wedge)$ を考え，右の因子Γに関してファイバー積をとって右図をつくる。これの

$$\begin{array}{ccc}(A\circ\wedge)\times_{\mathrm{Ob}}\mathrm{Mor}\times_{\mathrm{Ob}}X^\Gamma & \longrightarrow & (A\circ\wedge)\times_{\mathrm{Ob}}X^\Gamma \\ \downarrow & & \\ (A\circ\wedge)\times_{\mathrm{Ob}}X^\Gamma & & \end{array}$$

push-out として，Γ-G空間 $A\otimes X$ を定義する。(上図で，2本の矢印は2通りの結合，Ob, Mor はΓのそれら。)

$\boxed{\text{注意}}$ 1) $A\otimes X$ が $\mathcal{W}_0^G$ に値をとる事は，$A\otimes X$ を $\coprod_{m\geq 0} A(\underline{m})\times X^m/\sim$ の形で書き，フィルトレィションを入れた時 "goodness" と；Xの基点の非退化性から分る。

2) XがG連結 $\Longrightarrow$ $\forall S\in \mathrm{Ob}\,\Gamma$, $(A\otimes X)(S)$ がG連結 $\Longrightarrow$ $(A\otimes X)(1)$ は群状.

3) $(A\otimes X)\otimes Y\cong A\otimes(X\wedge Y)$ ([2] Lem. 3.7)

$\boxed{\text{記号}}$ V, W；有限次元実表現空間，Σ^V；Vの1点コンパクト化，$\Omega^V(\ )=\mathrm{Map}_0(\Sigma^V,\ )$，$\Sigma^0=2$点.

$\boxed{\text{注意}}$ 1) $A(\text{point})=\text{point}$ なら標準的に Γ-G-空間の射

$A\otimes X \longrightarrow \Omega^V(A\otimes\Sigma^V X)$ がある.

2) $A\otimes\Sigma^0 = A$

$\boxed{\text{定義}}$ $A(\text{point})=\text{point}$ な "good" 特殊 Γ-G-空間 A に対して，$B^VA=(A\otimes\Sigma^V)(\underline{1})$ と定義，$B^VA \xrightarrow{\varepsilon^V_{V\oplus W}} \Omega^W(B^{V\oplus W}A)$ を，上の注意の1)の写像の，object $\underline{1}$ の上の部分と定義.

さらに Hopf-G-空間 $A(\underline{1})$ が，次の条件$(*)$をみたす場合を考える.

$\boxed{\text{条件}(*)}$ $\pi_0(A(\underline{1})^G)$ は有限生成モノイド. ${}^\forall H<G$, $\pi_0(A(\underline{1})^G)\longrightarrow\pi_0(A(\underline{1})^H)$ は cofinal.

$\boxed{\text{定義}}$ $a\in A(\underline{1})^G$ を，その成分の生成するモノイドが $\pi_0(A(\underline{1})^G)$ で cofinal になる様とり，

$$A(\underline{1})_\infty = \text{Telescope}\left(A(\underline{1}) \xrightarrow{\times a} A(\underline{1}) \xrightarrow{\times a} A(\underline{1}) \longrightarrow \cdots\right)$$

と定義する.

$V^G\neq\{0\}$ とすると，Hopf-G-空間 Ω^VB^VA はホモトピー逆元を持つので，次の G ホモトピー可換な図式がつくれる.

$$\begin{tikzcd}
A(\underline{1}) \arrow[r, "\times a"] \arrow[d, "\varepsilon^0_V"'] & A(\underline{1}) \arrow[r, "\times a"] \arrow[d, "\varepsilon^0_V"'] & A(\underline{1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^0_V"'] & \cdots \\
\Omega^V(B^VA) \arrow[r, "\times(\varepsilon^0_V a)"] \arrow[dr, equal] & \Omega^V(B^VA) \arrow[r, "\times(\varepsilon^0_V a)"] \arrow[d, "\times(\varepsilon^0_V a)^{-1}"'] & \Omega^V(B^VA) \arrow[r] \arrow[dl, "\times(\varepsilon^0_V a)^{-2}"] & \cdots \arrow[dll, dashed] \\
 & \Omega^V(B^VA) & &
\end{tikzcd}$$

これから，次のG-ホモトピー可換な図式を得る．

$$\begin{tikzcd} A(1) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varepsilon_V^0"'] & & A(1)_\infty \arrow[dl, "\omega_V"] \\ & \Omega^V(B^V A) & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{定理}}$ (Segal [3]) Aを"good"な特殊Γ-G-空間，

$A(\mathrm{point}) =$ ~~A(point)~~ point とすると

0) $\{B^V A, \varepsilon^V_{V\oplus W}\}$ はG-スペクトラム．$B^0 A = A(1)$

1) $A(1)$が群状 $\Longrightarrow \forall V$，$\varepsilon^0_V : B^0 A \underset{G\text{-}h.e.}{\xrightarrow{\simeq}} \Omega^V(B^V A)$

2) $V^G \neq \{0\} \Longrightarrow \forall W$，$\varepsilon^V_{V\oplus W} : B^V A \underset{G\text{-}h.e.}{\xrightarrow{\simeq}} \Omega^W(B^{V\oplus W} A)$

3) $A(1)$が条件(*)をみたし，$V^G \neq \{0\}$

$\Longrightarrow \omega_V : A(1)_\infty \longrightarrow \Omega^V(B^V A)$ はG-ホモロジー同値 (i.e. $\forall H < G$，H-不動点への制限$(\omega_V)^H$ がホモロジー同値.)

定理は，以下に述べる2つの命題からの帰結である．

$\boxed{\text{定義}}$ 右の形の$\mathcal{W}_0^G$ の可換図式が

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Gホモトピー=カルテシアン</u> (G-HC と略す.) $\Longleftrightarrow$ 標準的なG-写像 $X' \longrightarrow X \overset{h}{\underset{Y}{\times}} Y'$ (ホモトピー論的ファイバー積) がG-h.e.

$\boxed{\text{命題 I}}$ (Woolfson [4]) Aを"good"な特殊Γ-G-空間，

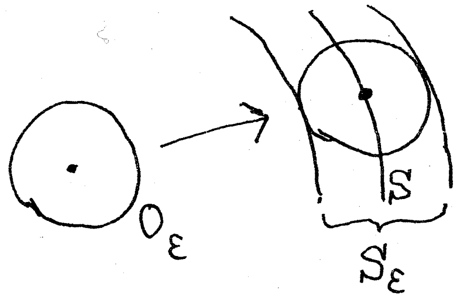
$X_1 \xleftarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} X_2$ を$\mathcal{W}_0^G$ の図式とする．このとき，

Yが G-連続，又はYが自明なG-作用を持つ有限集合であり A(1)は群状，ならば下図はG-HC。（ただし $Z_{(f_1,f_2)}$ は二重約写像柱，写像は自然に導かれるものとする。）

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes Y)(1) \arrow[r] \arrow[d] & (A\otimes Z_{f_2})(1) \arrow[d] \\
(A\otimes X_1)(1) \arrow[r] & (A\otimes Z_{(f_1,f_2)})(1)
\end{tikzcd}
$$

Vを有限次元実表現空間とする。

$\boxed{\text{記号}}$ S：Vの単位球面，O：Vの原点，$(\ )_\varepsilon$：Vにおける閉ε-近傍，$(\ )^+$：一点コンパクト化，又は既にコンパクトなものに対しては，基点のdisjoint union。



上図のような自然なG-写像 $S\longrightarrow Map(O_\varepsilon, S_\varepsilon)$ から Pontryagin-Thom構成によってできるG-写像

$S^+\longrightarrow Map_0(S_\varepsilon^+, O_\varepsilon^+)$ に連続functor $A\otimes(\ )(1)$ を続けると，G-写像 $S^+\longrightarrow Map_0((A\otimes S^+_\varepsilon)(1),(A\otimes O^+_\varepsilon)(1))$ が得られる．これのadjointをとって，$O^+_\varepsilon\cong\Sigma^V$ を使って書きなおすと，G-写像

$$(A\otimes S_V^{+})(\underline{1}) \xrightarrow{D_V} \mathrm{Map}_0(S^{+}, (A\otimes\Sigma^V)(\underline{1}))$$

が得られる。

$\boxed{\text{命題II}}$ (Segal[3]) "good"な特殊Γ-G-空間Aに対して上のG-写像 D_V はG-h.e.

§2. 命題Iの証明 [4]

$\boxed{\text{構成}}$ Aを"good"な特殊Γ-G-空間, $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_0^G$ とする。

G-カテゴリー(位相も入れる。) simp(A,X) を次で定義。

$$\mathrm{Ob}=\{(a,S,\xi)\mid S\in \mathrm{Ob}\Gamma,\ a\in A(S),\ \xi\in \mathrm{Map}_0(S,X)\}$$

$$\mathrm{Mor}((a,S,\xi),(b,T,\eta))$$

$$=\left\{\theta\in \mathrm{Mor}_\Gamma(S,T)\ \middle|\ A(\theta)\begin{array}{c} a\\ \downarrow\\ b\end{array}\quad \begin{tikzcd} S \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dr, phantom, bend right, "\circlearrowright"] & \\ T \arrow[r, "\eta"'] & X \end{tikzcd}\right\}$$

Gは, $(a,S,\xi)\xrightarrow{g\cdot}(g\cdot a,S,g\cdot\xi)$ で作用する。

simp(A,X) の脈体の単体的G空間のk-単体の空間は

$$A\underset{\mathrm{Ob}}{\times}\overbrace{\mathrm{Mor}\underset{\mathrm{Ob}}{\times}\cdots\cdots\underset{\mathrm{Ob}}{\times}\mathrm{Mor}}^{k\text{コ}}\underset{\mathrm{Ob}}{\times}X^{\Gamma}$$

(ただしMor, ObはΓのそれ)である。

これの幾何学的実現を $A'(X)$ と書く。A' はfunctor $\mathcal{W}_0^G\longrightarrow\mathcal{W}_0^G$ となる。

$\boxed{\text{注意}}$ 上の単体的G空間は"good"であり, この事からfunctor A' が $\mathcal{W}_0^G$ に値をとる事がわかる。

$\boxed{\text{補題}}$ ([4] Lem.1.8)　$X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_0^G$ とする．自然に導かれる写像によって

$$A'(X_1 \vee X_2) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{\sim} A'(X_1) \times A'(X_2)$$

(証明)　G-カテゴリー $\mathrm{simp}(A, X_1, X_2)$ を次で定ぎする．

$$\mathrm{Ob} = \left\{ \begin{pmatrix} a & S_1, \xi_1 \\ & S_2, \xi_2 \end{pmatrix} \middle|\ S_i \in \mathrm{Ob}\,\Gamma,\ a \in A(S_1 \vee S_2),\ \xi_i \in \mathrm{Map}_0(S_i, X_i) \right\}$$

$$\mathrm{Mor}((a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2), (b, T_1, T_2, \eta_1, \eta_2))$$
$$= \left\{ (\theta_1, \theta_2)\ \middle|\ A(\theta_1 \vee \theta_2)\ \begin{matrix} a \\ \downarrow \\ b \end{matrix}\quad \begin{tikzcd} S_i \arrow[d, "\theta_i"'] \arrow[dr, "\xi_i"] & \\ T_i \arrow[r, "\eta_i"'] & X_i \end{tikzcd} \right\}$$

これの脈体の k-単体の空間は

$$(A \circ V) \times \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{Mor} \\ \times \\ \mathrm{Mor} \end{pmatrix} \times \left(\cdots \times \begin{pmatrix} \mathrm{Mor} \\ \times \\ \mathrm{Mor} \end{pmatrix}\right.}^{k\,コ} \times \begin{pmatrix} X_1^{\Gamma} \\ \times \\ X_2^{\Gamma} \end{pmatrix}$$
$$\qquad\quad {}_{\mathrm{Ob}\times\mathrm{Ob}} \qquad {}_{\mathrm{Ob}\times\mathrm{Ob}} \qquad {}_{\mathrm{Ob}\times\mathrm{Ob}} \qquad {}_{\mathrm{Ob}\times\mathrm{Ob}}$$

である．($V : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ は wedge 和をとる functor)

G-functor $\mathbb{F} : \mathrm{simp}(A, X_1 \vee X_2) \to \mathrm{simp}(A, X_1, X_2)$ を次のように定義する．$\theta \in \mathrm{Mor}((a, S, \xi), (b, T, \eta))$ とする．

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[dd, dashed, "\varphi_i"'] & & X_1 \vee X_2 \arrow[dd, "j_i"] \\
& T \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dd, dashed, "\psi_i"] & \\
S_i \arrow[rr, dashed, "\xi_i"] \arrow[dr, dashed, "\theta_i"'] & & X_i \\
& T_i \arrow[ur, dashed, "\eta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

$\xi_i^{-1}(\text{基点}) = \{\text{基点}\}$

$\eta_i^{-1}(〃) = \{〃\}$

$(i = 1, 2)$

ここに j_i は標準的な写像とする．

上図の $S_i, \varphi_i, \xi_i, T_i, \psi_i, \eta_i$ が，上図が可換になるよう同型を除いて唯一存在する．これらを決めると上図が可換になるように θ_i が唯一存在する．そこで

$$\mathbb{F}(a, S, \xi) = (A(\varphi_1 \vee \varphi_2)a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2)$$

$$\mathbb{F}(\theta) = (\theta_1, \theta_2)$$

と定義する．これが G-functor となる事は容易に確められる。

G-functor $\mathbb{G}: simp(A, X_1, X_2) \longrightarrow simp(A, X_1 \vee X_2)$ を $\mathbb{G}(a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2) = (a, S_1 \vee S_2, \xi_1 \vee \xi_2)$ で定義する．

$id \longrightarrow \mathbb{G}\mathbb{F}$, $id \longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{G}$ なる自然変換が，上の φ_i, ψ_i を使って，"冗長な部分をつぶす"事によってつくれる．

G-functor $\mathbb{H}: simp(A, X_1, X_2) \longrightarrow simp(A, X_1) \times simp(A, X_2)$ を，$\mathbb{H}(a, S_1, S_2, \xi_1, \xi_2) = ((A(\pi_1)a, S_1, \xi_1), (A(\pi_2)a, S_2, \xi_2))$ で定義する．ただし $\pi_i: S_1 \vee S_2 \longrightarrow S_i$ は標準的なもの．Γ-G-空間 A の特殊性から，$\mathbb{H}$ は，Ob と Mor の空間の上で G-h.e. である．

さらに G-functor $\mathbb{J}_i: simp(A, X_1 \vee X_2) \longrightarrow simp(A, X_i)$ を $\mathbb{J}_i(a, S, \xi) = (a, S, j_i \circ \xi)$ と定義する．この時，自然変換 $\mathbb{J}_i \longrightarrow proj_i \circ \mathbb{H} \circ \mathbb{F}$ が，"冗長な部分をつぶす"事によってつくれる．

以上のものを幾何学的実現すると，補題を得る．（終）

$\boxed{\text{注意}}$ 1) functor A' を Γ（自明な G-作用で $\mathcal{W}_0^G$ の sub-category と思う。）に制限すると，特殊 Γ-G-空間である。自然に Γ-G-空間の同値 $A' \longrightarrow A$ がある。（[4] Lem. 1.3）A, A' 共に "good" ゆえ，さらに同値 $A' \otimes X \longrightarrow A \otimes X$ がある。（[4] Th. 1.5）

2) Identification を調べてみると，$A'(X) \cong A' \otimes X$ である。（[4] Th. 1.5）

$\boxed{\text{定義}}$ 単体的 G-空間 $\mathcal{Z}'$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Z}'_n = X_1 \vee Y^{(1)} \vee Y^{(2)} \vee \cdots \vee Y^{(n)} \vee X_2 \quad \text{(Wedge 和)}$$

（ただし $Y^{(i)}$ は Y のコピー）

$$\partial_0 : \mathcal{Z}'_n \to \mathcal{Z}'_{n-1} \iff \begin{array}{l} \partial_0|X_1 = id : X_1 \to X_1 \\ \partial_0|Y^{(1)} = f_1 : Y^{(1)} \to X_1 \\ \partial_0|Y^{(2)} = id : Y^{(2)} \to Y^{(1)} \quad \text{などなど。} \end{array}$$

$$s_0 : \mathcal{Z}'_n \to \mathcal{Z}'_{n+1} \iff \begin{array}{l} s_0|X_1 = id : X_1 \to X_1 \\ s_0|Y^{(1)} = id : Y^{(1)} \to Y^{(2)} \quad \text{などなど。} \end{array}$$

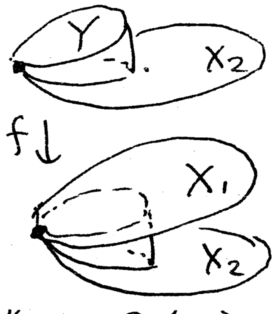
X_1 を $Y^{(0)}$ でおきかえて，同様に $\mathcal{Z}''$ を定義する。

単体的 G-空間の射 $\mathcal{Z}'' \xrightarrow{\mathfrak{f}} \mathcal{Z}'$ を次のように定義する。

$$\mathfrak{f}_n : \mathcal{Z}''_n \to \mathcal{Z}'_n \iff \begin{array}{l} \mathfrak{f}_n|Y^{(0)} = f_1 : Y^{(0)} \to X_1 \\ \mathfrak{f}_n|Y^{(i)} = id : Y^{(i)} \to Y^{(i)} \quad (1 \leq i \leq n) \\ \mathfrak{f}_n|X_2 = id : X_2 \to X_2 \end{array}$$

$\boxed{\text{補題}}$ ([4] Lem. 1.10)

$$
\begin{tikzcd}
{|\mathcal{Z}''|} \arrow[r, equal] \arrow[d, "{|f|}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_{f_2} \arrow[d, "f"] \\
{|\mathcal{Z}'|} \arrow[r, equal] & Z_{(f_1, f_2)}
\end{tikzcd}
$$



(ただし f は f_1 から導かれる標準的な写像)

(証明) 非退化な単体は，0又は1次元のものだけである事に注意すれば，はりつけ方を見ればわかる。(終)

$A(f)$ なる，単体的G-空間の射を考える。

$$
\begin{tikzcd}
A'(Y \vee X_2) \arrow[d, "A'(f_0)"'] & A'(Y \vee Y \vee X_2) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d, "A'(f_1)"] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] & A'(Z_{f_2}) \arrow[d, "A'(f)"] \\
A'(X_1 \vee X_2) & A'(X_1 \vee Y \vee X_2) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] & A'(Z_{(f_1, f_2)})
\end{tikzcd}
$$

右端のものは，その実現である。

$\boxed{\text{注意}}$ この2つの単体的G-空間は共に"good"である。

次の命題は，元はGの作用のない場合のものだが，作用のある場合も全く同様に証明される。

$\boxed{\text{命題}}$ (Segal [2] Prop. 1.6, Puppe [1]) $f: A' \to A$ を"good"な単体的G-空間の間の射とするとき，

$\forall \theta \in \mathrm{Mor}_\Delta$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\forall n$

$$
\begin{tikzcd}
A'_n \arrow[r, "A(\theta)"] \arrow[d, "f_n"'] & A'_m \arrow[d, "f_m"] \\
A_n \arrow[r, "A(\theta)"] & A_m
\end{tikzcd}
\text{ が G-HC } \Longrightarrow
\begin{tikzcd}
\Delta^n \times A'_n \arrow[r] \arrow[d] & {|A'|} \arrow[d, "{|f|}"] \\
\Delta^n \times A_n \arrow[r] & {|A|}
\end{tikzcd}
\text{ が G-HC}
$$

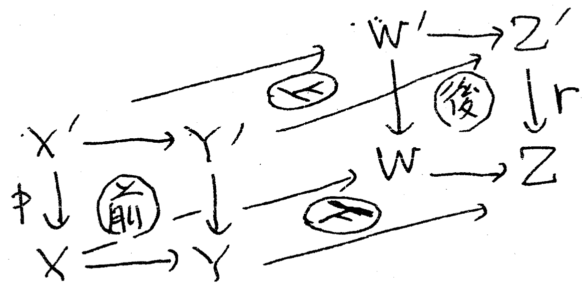
この命題を，上の$A(f)$に適用する為に，次を準備する。

$\boxed{\text{補題}}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "②"] & Z' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d, phantom, "③"] & Z' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

1) 上の①，②がG-HC ⟹ 外まわり③がG-HC

2) 上の②，③がG-HC ⟹ ①がG-HC



3) 上図で斜めの写像は全てG-h.e. ㊤，㊦を除いて可換，㊤，㊦はG-ホモトピー可換，さらにそのG-ホモトピーを，

$H_{上}: X'\times I \longrightarrow W'$，$H_{下}: X\times I \longrightarrow W$ とすると，

$$\begin{tikzcd} X'\times I \arrow[r, "H_{上}"] \arrow[d, "p\times id"'] & W' \arrow[d, "r"] \\ X\times I \arrow[r, "H_{下}"] & W \end{tikzcd}$$

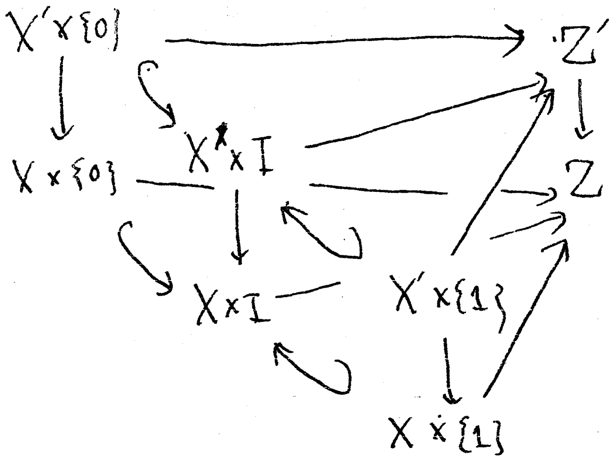
が可換と仮定する。

以上の仮定のもとで，

前がG-HC ⟺ 後がG-HC

（証明） まず，右の形の図式のホモトピー論的ファイバー積 $X \underset{Y}{\overset{h}{\times}} Y'$ はgの写像track E_g をfでひきもどしたHurewicz fibering f^*E_g と等しい事に注意すれば，1)，2)は容易。3)を示す。

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$



左図において

$$\begin{tikzcd} X'\times\{0\} \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ X\times\{0\} \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

がG-HCと仮定すると，下図において右縦の写像はG-h.e.

$$\begin{tikzcd} H_F^*Z' & (H_F|_{X\times\{0\}})^*Z' \arrow[l, "\sim"'] \\ X'\times I \arrow[u] & X'\times\{0\} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

上横の写像は，$(H_F|_{X\times\{0\}})^*Z'$ は H_F^*Z' をG-h.e.によって引きもどしたものであることから，G-h.e. 下横のは自明にG-h.e. ゆえに左の縦の写像がG-h.e. すなわち，

$$\begin{tikzcd} X'\times I \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ X\times I \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

がG-HC．すると1)によって

$$\begin{tikzcd} X'\times\{1\} \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ X\times\{1\} \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

がG-HCとなる。さて，3)の図で後がG-HCと仮定すると1)によって

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

と後との結合の外まわりがG-HC.

すると上の事より，前と

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

を結合した外まわりが，G-HC．すると2)によって前がG-HC．逆も大体同じである．（終）

さて，A(f)がSegal-Puppeの命題の仮定をみたすためには，下図がG-HCである事がわかればよい。

$$\begin{array}{ccc} A'(W) & \rightleftarrows & A'(Y\vee W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'(X) & \rightleftarrows & A'(Y\vee X) \end{array}$$

（ただし横向矢印は両方共右向，又は左向をとる）

さらに次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} A'(W) & \rightleftarrows & A'(Y\vee W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'(X) & \rightleftarrows & A'(Y\vee X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'(\mathrm{point}) & \rightleftarrows & A'(Y) \end{array}$$

すると補題の2）によって，結局，次の主張が示されればよい事が分る。

$\boxed{\text{主張}}$ $Y \longrightarrow X$ を $\mathcal{TK}^G_0$ の図式とするとき，

1) $$\begin{array}{ccc} A'(X) & \longrightarrow & A'(Y\vee X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'(\mathrm{point}) & \longrightarrow & A'(Y) \end{array}$$ はG-HC。

2) YがG-連結，又はYが自明なG作用をもつ有限集合で $A(1)$ が群状，とすると

$$\begin{array}{ccc} A'(Y\vee X) & \longrightarrow & A'(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'(Y) & \longrightarrow & A'(\mathrm{point}) \end{array}$$ はG-HC。

（ただし2)の上の横向の写像はYをXに"はりつける"写像から導びかれる写像とする。）

（1)の証明） $A'(\mathrm{point}) \hookrightarrow A'(X)$ はG-NDR. $\therefore A'(X)$ $\xrightarrow[G\text{-h.e.}]{\simeq} A'(X)/A'(\mathrm{point})$ （$=\bar{A}(X)$ と書く。）

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{A}(X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bar{A}(Y)\times\bar{A}(X) \arrow[dd] \\
A'(X) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd] & & A'(Y\vee X) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \text{point} \arrow[rr] & & \bar{A}(Y) \\
A'(\text{point}) \arrow[rr] \arrow[ur] & & A'(Y) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

上図は可換。斜めの写像はすべてG-h.e. 後の四角は自明にG-HC。∴補題の3)によって前がG-HC。　(終)

$\boxed{\text{定義}}$ $Y\times Y \xrightarrow{m} Y$ をHopf-G空間とする。G-写像 $Y\times X \xrightarrow{\phi} X$ がホモトピー論的作用

$$
\Longleftrightarrow
\begin{tikzcd}
Y\times Y\times X \arrow[r, "id\times\phi"] \arrow[d, "m\times id"'] & Y\times X \arrow[d, "\phi"] \\
Y\times X \arrow[r, "\phi"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{e\}\times X \arrow[r, hook] \arrow[dr, equal] & Y\times X \arrow[d, "\phi"] \\
 & X
\end{tikzcd}
$$

が共にG-ホモトピー可換。

$\boxed{\text{補題}}$ $Y\times Y \xrightarrow{m} Y$ を群状なHopf-G空間, $Y\times X \xrightarrow{\Phi} X$ をホモトピー論的作用とすると結合

$$Y\times X \xrightarrow{\Delta\times id} Y\times Y\times X \xrightarrow{id\times\Phi} Y\times X$$

はG-h.e.

証明は容易である。

(主張の2)の証明) 下図において唯一自明でない写像 Φ は上面がG-ホモトピー可換になる様に定義する。補題の3)によって、後の四角がG-HCである事を示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
 & A'(Y)\times A'(X) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dd] & & A'(X) \arrow[dd] \\
A'(Y\vee X) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & A'(X) \arrow[ur, equal] \arrow[dd] & \\
 & A'(Y) \arrow[rr] & & \text{point} \\
A'(Y) \arrow[ur, equal] \arrow[rr] & & A'(\text{point}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

問題になっている induced Hurewicz fibering は自明なものであり，

$$A'(Y)\times A'(X) \xrightarrow{\Delta\times id} A'(Y)\times A'(Y)\times A'(X) \xrightarrow{id\times\phi} A'(Y)\times A'(X)$$

が G-h.e. である事を示せばよい。2) の仮定のもとでは，A'(Y) は群状であり，ϕ はホモトピー論的作用だから，上の補題によって上の結合は G-h.e.　（終）

以上の事から，下図の2つの四角は G-HC. 従って結合した外回りも G-HC.

$$\begin{tikzcd}
A'(Y) \arrow[r] \arrow[d] & A'(Y\vee X_2) \arrow[r] \arrow[d] & A'(Z_{f_2}) \arrow[d] \\
A'(X_1) \arrow[r] & A'(X_1\vee X_2) \arrow[r] & A'(Z_{(f_1 f_2)})
\end{tikzcd}$$

ところが，$(A'\otimes X)(1) \xrightarrow[G\text{-h.e}]{\simeq} (A\otimes X)(1)$ だから補題の3) によって命題 I の証明が完了する。　（終）

§3. 命題IIの証明[3]

以下 V は G の有限次元実表現空間，A は "good" な特殊

V：G-空間とする.

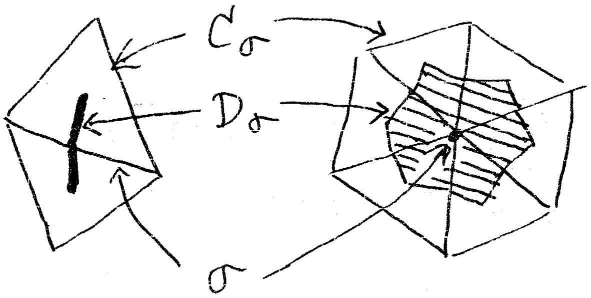
$\boxed{\text{記号}}$ S：V の単位球面

(K, Σ)：S の十分細かい G-三角形分割 （Σ は K の G単体（i.e. 単体の orbit ）の集合）

$\sigma \in \Sigma$ に対して，C_σ：σ の閉星状体

D_σ：K の第一細分における σ の双対部分 G-複体

b_σ：σ の重心 orbit



$S_\varepsilon \xrightarrow{\pi} S$：半径方向への射影（$\varepsilon$ 十分小）

$\pi^{-1}(\quad) = (\widehat{\quad})$

$\boxed{\text{注意}}$ $\hat{C}_\sigma^+ \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{\simeq} (b_\sigma)_\varepsilon^+$ ， $b_\sigma \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{\simeq} D_\sigma$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes \hat{C}_\sigma^+)(1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Map}_0(D_\sigma^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
(A \otimes (b_\sigma)_\varepsilon^+)(1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Map}_0(b_\sigma^+, (A \otimes \Sigma^V)(1)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\underset{\#(b_\sigma)}{\times} (A \otimes \Sigma^V)(1) \arrow[r, Rightarrow] & \underset{\#(b_\sigma)}{\times} (A \otimes \Sigma^V)(1)
\end{tikzcd}$$

このとき，上の可換図式を得る．上の2つの横方向の写像

は，命題IIの statement の時と同様につくったもの。縦向きの写像はすべて G-h.e. 従って一番上の横向の写像が G-h.e.

$\boxed{\text{記号}}$ $P \subset \Sigma$ (部分集合) に対して

$$C_P = \bigcup_{\sigma \in P} C_\sigma, \quad D_P = \bigcup_{\sigma \in P} D_\sigma$$

$P, Q \subset \Sigma$ に対して，次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Map}_0(D^+_{P\cup Q}, (A\otimes\Sigma^V)(1)) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Map}_0(D^+_P, (A\otimes\Sigma^V)(1)) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Map}_0(D^+_Q, (A\otimes\Sigma^V)(1)) \arrow[rr] & & \mathrm{Map}_0(D^+_{P\cap Q}, (A\otimes\Sigma^V)(1)) \\
(A\otimes\hat{C}^+_{P\cup Q})(1) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[uur] & & (A\otimes\hat{C}^+_P)(1) \arrow[d] \arrow[uur] & \\
(A\otimes\hat{C}^+_Q)(1) \arrow[rr] \arrow[uur] & & (A\otimes\hat{C}^+_{P\cap Q})(1) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

左上以外の斜めの写像が G-h.e. である事を仮定して，左上の斜めの写像が G-h.e. である事が示せれば，$\#(P)$ に関する帰納法で，命題IIの証明は終る。上の事を示す為には，前後の四角が G-HC である事を示せばよい。後は自明にそう。前のは命題Iから G-HC である事が分る。 (終)

§4. 定理の証明 [3]

$\boxed{\text{命題Iの系}}$ A を "good" な特殊 Γ-G-空間で A(point) = point，$Y \subset X$ は G-NDR とする。このとき，Y が G-連結，又は，

Yが自明なG-作用をもつ有限集合で$A(\mathbb{1})$が群状，とすると，右図はG-HC．

$$\begin{array}{ccc}(A\otimes Y)(\mathbb{1}) & \longrightarrow & (A\otimes X)(\mathbb{1})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \text{point} & \longrightarrow & (A\otimes(X/Y))(\mathbb{1})\end{array}$$

証明は容易．これを用いて，まず $A(\mathbb{1})$ が群状のとき，

$A(\mathbb{1})\xrightarrow[\text{G-h.e.}]{\sim}\Omega^W(A\otimes\Sigma^W)(\mathbb{1})$ を示す．

$\boxed{\text{記号}}$ B_r：Wの原点中心半径rの閉球体．∂B_r：その境界．

次の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Map}_0(B_1/\partial B_1,(A\otimes\Sigma^W)(\mathbb{1})) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Map}_0(B_1^+,(A\otimes\Sigma^W)(\mathbb{1})) \arrow[d] \\
 & \text{point} \arrow[rr] & & \mathrm{Map}_0(\partial B_1^+,(A\otimes\Sigma^W)(\mathbb{1})) \\
\left(A\otimes\left(\dfrac{\partial B_2\cup 0}{\partial B_2}\right)\right)(\mathbb{1}) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[uur] & & \left(A\otimes\left(\dfrac{B_2}{\partial B_2}\right)\right)(\mathbb{1}) \arrow[d] \arrow[uur] & \\
\text{point} \arrow[rr] \arrow[uur, equal] & & \left(A\otimes\left(\dfrac{B_2}{\partial B_2\cup 0}\right)\right)(\mathbb{1}) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

斜めの写像は命題IIのstatementのときと同様にしてつくったもの．前後の四角はG-HC．右上の斜めの写像は自明にG-h.e．右下の斜め向きの写像は，命題IIによってG-h.e.

∴左上の斜め向きの写像がG-h.e．すなわち

$$A(\mathbb{1})=(A\otimes\Sigma^0)(\mathbb{1})\xrightarrow[\text{G-h.e.}]{\sim}\Omega^W(A\otimes\Sigma^W)(\mathbb{1})$$

次に，Γ-G-空間Aのかわりに，$A\otimes\Sigma^V$ を使うと，$V^G \neq \{0\}$ なら $(A\otimes\Sigma^V)(\underline{1})$ は群状ゆえ，同様の議論で，

$$(A\otimes\Sigma^V)(\underline{1}) \xrightarrow[G\text{-h.e.}]{\sim} \Omega^W((A\otimes\Sigma^V)\otimes\Sigma^W)(\underline{1})$$

ここで，$((A\otimes\Sigma^V)\otimes\Sigma^W)(\underline{1}) \cong (A\otimes\Sigma^{V\oplus W})(\underline{1})$ である．これで定理の1),2)の証明が終った．次に 3) を示す．

まず，$V^G \neq \{0\}$ のとき

$$\begin{tikzcd} & A(\underline{1})_\infty \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[dr, "\omega_V"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \Omega^1(A\otimes\Sigma^1)(\underline{1}) \arrow[rr, "\sim", "G\text{-h.e.}"'] & & \Omega^V(A\otimes\Sigma^V)(\underline{1}) \end{tikzcd}$$

であるから，ω_1 についてのみ示せばよい．これは，$\forall H<G$，$(A(\underline{1})_\infty)^H = (A^H)(\underline{1})_\infty$，$(\Omega^1(A\otimes\Sigma^1)(\underline{1}))^H = \Omega^1(A^H\otimes\Sigma^1)(\underline{1})$ ゆえ，G-作用のない場合（[2] §.4）に帰着される．（ここに A^H は H-不動点をとった非同変Γ-空間．）　（終）

References

[1] V. Puppe : A Remark on "homotopy fibrations", Manuscripta. Math. (1974)

[2] G. Segal : Categories and cohomology theories, Topology, Vol. 13 (1974)

[3] G. Segal : Some results in equivariant homo-

topy theory, preprint.

[4] R. Woolfson: Hyper-Γ-spaces and hyperspectra, Quart. J. Math. 30 (1979)

[5] S. Waner: Equivariant classifying spaces and fibrations, Chicago, Thesis. (1978)