

乱流における粘性, 拡散, 散逸

名大 工学部 桑原 真二

§ 1. まえおき

乱流理論は流体の不規則な運動を対象とする。その中で統計流体力学 ρHD は, $N-S$ 方程式に支配される連続無限個の確率変数をわち各点の流速に対する一般化された Liouville 方程式にもとづくもので, 数学的には最も厳格な構成をしている。しかし, その方程式はあまりに一般的でその一般性から多くの量を捨象し, 有意な量を引き出し, 更に乱流を直観的に把握する合理的な手法はままだ見出されていない。

乱流現象は多くのものと単純な物理的素過程の集合とみなすことができます。例えば, 乱流を互いに飛びかう大小さまざまな流体粒子の集りとみなすこともできれば, 渦の集りとみなすこともできます。このようなモデル化が可能ならば, 流体粒子のあるいは渦の力学を流体力学的に論じ, 更にそれらの力学と確率とを結びつけることによって, 今までのもの

と別種の $\rho H D$ が建設できるとある。すなわち乱流の記述法(運動学)の違いにより、2種々の $\rho H D$ が存在することになる。

乱流を“流体粒子”, “渦”等の集りとみなす各種のモデル化が可能るとき, 個々の粒子, 渦を特徴付けるスケール λ , 速度 v があり, しながつてその運動を特徴付けるレイノルズ数:

$$R_\lambda = \frac{v\lambda}{\nu} \quad \nu: \text{動粘性率} \quad (1.1)$$

が存在する。この論文では乱流の大きいスケールの運動を扱う

$$R_\lambda \gg 1 \quad (1.2)$$

を考へる。このような運動では近似的に完全流体としてとりあつかうことができる。

こゝでは“渦系モデル”を採用するが, まず“鉄砲玉モデル”すなわちとびかう流体粒子の集りとしてのモデルが不適切なことを論ずる。

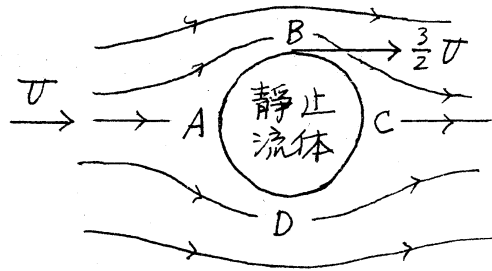
流体の塊が何らかの原因で流体中に放出されたとする。流体の塊を球形とみなし, 塊に静止した系から見ると止った流体球をすまゝ一様流で近似できるとある(才1図)。ベルヌーイの定理から圧力は A 及び C で最大値 p_0 :

$$p_A = p_C = p_0 \quad (1.3)$$

ととり, B に向って減少して

B で (D で)

$$p_B (= p_D) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{3}{2}U\right)^2 \quad (1.4)$$



となる。そこで A, C で球の 才 1 図 鉄砲玉モデル
中心へ, B で外側へ向う運動が起これ、偏平回転楕円体に変
形するであろう。今, A において圧力勾配を

$$\partial p / \partial x \sim (p_A - p_B) / a \quad (1.5)$$

と評価し, 上に述べた状態を初期条件として Euler の方程式
によって A 点の運動を非常に粗く計算すれば

$$\left. \begin{aligned} u_A &\sim \frac{U^2}{a} t \\ x_A &\sim \frac{U^2}{2a} t^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

となる。これに基づいて球が半分の厚さの偏平楕円体に変
形するに要する時間は

$$t \sim a / U \quad (x_A = a/2) \quad (1.7)$$

となる。そこで球が半径位移動する間に大きな変形をおこ
すことになる。鉄砲玉モデルは鉄砲玉が十分長い間, 形を
保ちていることを仮定しているののでこのモデルを採用する
ことは不適切である。

§2. 粘性のきかない運動の領域における乱流構造の渦系モデル

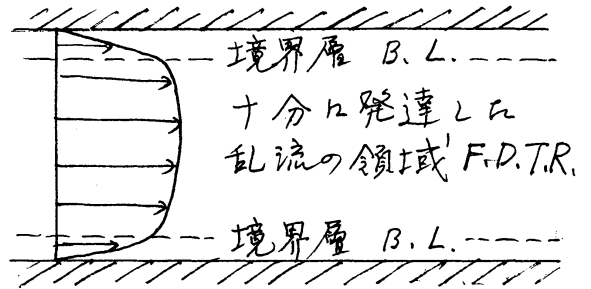
この考え方は十分に一般性があるが、2次元 Poiseuille 乱流 (P.P. 乱流) について考之る。P.P. 乱流では平行な壁の附近の十分小さい境界層 B.L. で渦系が発生し、境界層外への渦系の放出が起ると考之る。B.L. の外側は十分に発達した乱流の領域 F.D.T.R. で、放出された渦系はもっと小さい渦系に変化し、最後は粘性によって消散する (才2図)。

このモデルの基礎となる渦系の特徴を上げておこう。

- 1) 渦系は Galilei 変換に対して不変である (流線は座標系の運動により異なるパターンを示す。したがって Galilei 不変でない) \Rightarrow 渦系に個性がある。

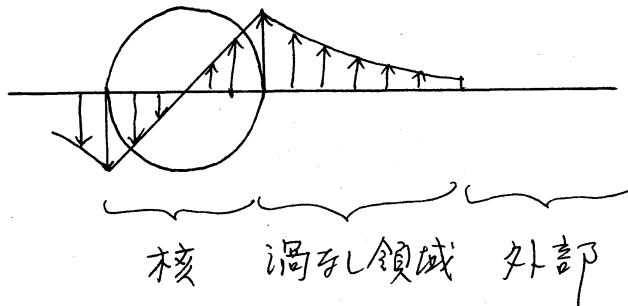
- 2) $\text{div } \omega = \text{div } \text{rot } v = 0 \Rightarrow$ 渦系は流の場の中で発生、消滅しない。 \Rightarrow 渦系は自身でといてい子 (例: 渦環) か、端が壁に附着する子か、無限遠まで続いてい子か以外にはありえない。

- 3) 渦系の構造: 渦の核 (渦度一定), 渦をしの領域, 外部 (相互作用の領域) と考之る (才3図)。



上の特徴をもとづいて
次のモデル化を行う。

1) 乱流は平均流と渦系(乱れ)の合成と考
える。



2) 渦系は核 ($0 \leq r$

才3図 渦系の構造

$\leq \lambda$) と有限の渦系領域 ($\lambda \leq r \leq 1$) とから成る。

3) 渦系は平均流を変形し、渦系自身及び他の渦系に対し
てひまのぼし(ちいぬ)効果をもつ。

4) 渦系の曲りの効果は二次的に無視できる。

5) 乱流のエネルギーは渦系の平行移動及び内部エネルギー
から成り、それらはおき平衡にあると仮定する。

6) 渦系はひまのぼしと分裂によって小形化する。その
際、循環(のれ)は保存し、系全体のエネルギーは保存す
る。

次に渦系の力学を考えよう。以下渦系の変遷を考
え、平均的を意味で一連の代表的渦のみを考
える。渦系の半径を λ 、渦度を ω とすれば断面積、特徴的
速度は $\sigma = \pi \lambda^2$, $v = \omega \lambda$ で表わされる。境界層でつく
らぬ最大渦を σ_0 、最小の渦を σ_0 と表わす。最小の渦とは、粘性効果の現れ
る前の渦で

$$v_a \lambda_a / v \sim 1 \quad (2.1)$$

と考へる。渦糸の中の回転の速度分布は

$$v_\theta(r) = \left. \begin{cases} \omega r & 0 \leq r \leq \lambda \\ \omega \lambda^2 / r & \lambda \leq r \leq \Lambda \end{cases} \right\} \quad (2.2)$$

であるから、単位長さの渦糸（以下、単位渦糸と呼ぶ）のエネルギー σ は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\Lambda v_\theta^2 r dr d\theta \\ &= C \rho \omega^2 \lambda^4 \quad C = \pi \left(\frac{1}{4} + \log \frac{\Lambda}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。

いまのばしに際し、 $\lambda \rightarrow \lambda'$ ($\sigma \rightarrow \sigma'$) の変化を、分裂は二等分裂 ($\lambda \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda$, $\sigma \rightarrow \frac{1}{2} \sigma$) のみを考へる。いまのばしのばあい、Lagrange の渦定理が成立つから

$$\Gamma \equiv \omega \sigma = \omega' \sigma' \quad (\equiv \Gamma') \quad (2.4)$$

しなから

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \left(\frac{\Lambda}{\lambda'} \right)^2 \omega \\ v' &= \frac{\Lambda}{\lambda'} v \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となり、二等分裂においては

$$\Gamma = \omega \sigma = 2 \omega' \sigma' = \omega' \sigma \quad (= 2 \Gamma')$$

しなから

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega \\ v' &= \omega' \lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

となる。

(2.5), (2.6) 及び (2.6) のよって単位渦糸のエネルギーの変化を計算すれば、それぞれ

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma' = \sigma & \text{渦糸のばし} \\ \sigma' = \frac{1}{4}\sigma & \text{2等分裂} \end{array} \right\} (2.7)$$

となり。実際、渦糸のばしによつて渦糸は $\lambda \rightarrow \lambda'$ の変化に対して長さ l は $(\lambda/\lambda')^2$ に増加し、2等分裂では渦糸は2本になるから、渦糸系全体に対してエネルギーは

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma \rightarrow (\lambda/\lambda')^2 \sigma' = (\lambda/\lambda')^2 \sigma & \text{渦糸のばし} \\ \sigma \rightarrow \sigma' \times 2 = \frac{1}{2}\sigma & \text{2等分裂} \end{array} \right\} (2.8)$$

に変化する。すなわち渦糸のばし ($\lambda' < \lambda$) においては渦糸系のエネルギーは増加し、分裂に際してはそのエネルギーは減少する。それ故、エネルギー保存の観点から、渦糸の小形化は渦糸のばしの²√では不可能で、渦糸のばしと分裂とをくりかえして行くと考えよのが合理的と思われる。

今、簡単なために2等分小形化すなわち2倍渦糸のばしと2等分裂のみの過程を考えれば

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma \rightarrow 2\sigma \rightarrow 4\sigma \rightarrow 8\sigma \rightarrow \dots & \text{2倍渦糸のばし} \\ \sigma \rightarrow \frac{1}{2}\sigma \rightarrow \frac{1}{4}\sigma \rightarrow \frac{1}{8}\sigma \rightarrow \dots & \text{2等分裂} \end{array} \right\} (2.9)$$

となる。そこで、2倍渦糸のばし1, 2等分裂2の割合で2等分小形化が起れば、平均として乱れの全エネルギーは保

されず。

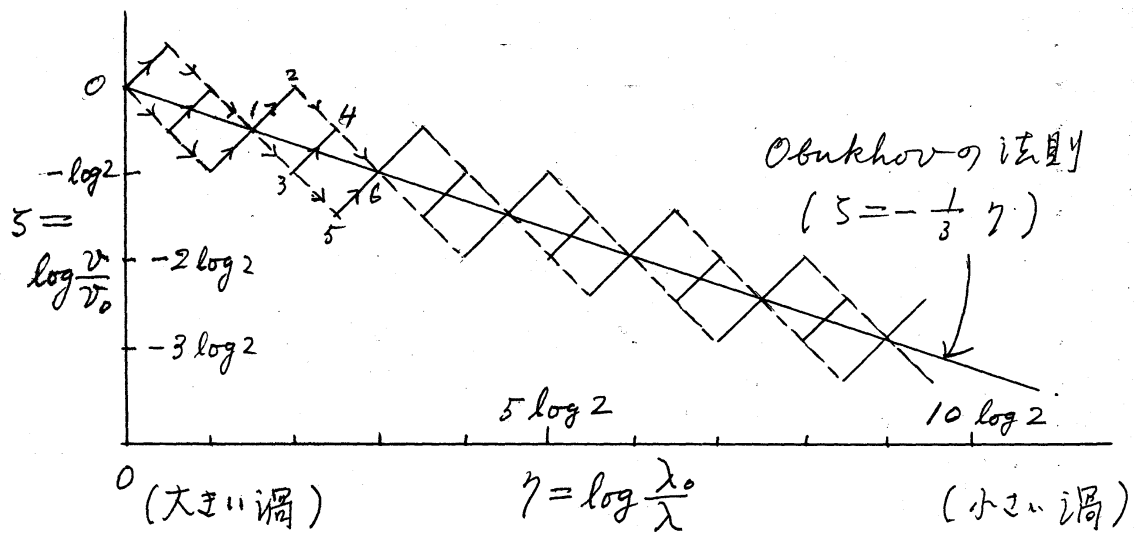
2倍の速さのばしと2等分分裂に際して^特微的速度はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} v &\rightarrow \sqrt{2}v && \text{2倍の速さのばし} \\ v &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}v && \text{2等分分裂} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

に変化する。上に述べた2倍の速さのばし1, 2等分分裂2の過程が終つて、丁度エネルギーが保存された状態では

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda = \lambda' \\ v &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}v = v' = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{1/3}v \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

となり、2のあとの結果はObukhovの法則(Landau & Lifschitz, (32.1) p 121)と一致する。2等分小形化の(2.11)の過程は第4図に示してある。



第4図 2等分小形化の過程で平均的にObukhovの法則が
 成り立つ (1 → 2 → 4 → 6, 1 → 3 → 4 → 6, 1 → 3 →
 5 → 6, → : 2倍の速さのばし, → : 2等分分裂)

二等分小形化が定常的に起り、しかも各ステップ ($\gamma = 0, \frac{1}{2} \log 2, \log 2, \frac{3}{2} \log 2, \dots$) における滞在時間が等しいとすれば、ある体積中にある各スケールの単位渦系の数は二等分小形化につれて、2倍、4倍、8倍になり、一方その体積は $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ となるから、各スケールの渦系全体のしめり体積は同じになる。また、各スケールは γ 上にて等間隔に分布している。そこで γ 上の不連続の分布を連続的な分布とみなせば、渦に対するエネルギー分布は

$$\frac{1}{2} v(\lambda)^2 d\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{2/3} v_0 d \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.12)$$

となる。渦の集合を波の集と考えて λ と波数 k との関係 $1/\lambda \sim k$ とすれば k におけるエネルギー・スペクトル $E(k)$ は

$$E(k) dk \sim \frac{1}{2} v(\lambda)^2 d\gamma \sim k^{-2/3} d(\log k) \sim k^{-5/3} dk \quad (2.13)$$

すなわち、Kolmogoroff のスペクトルがえられる。

次に渦系が分裂する可能性を (2.2) の解の線形安定性によって論ずる。核の半径 λ が微小量変化したとする：

$$\epsilon = \lambda + \sum_{l=2}^{\infty} \{ a_l e^{i\Theta} + c.c. \}, \quad \Theta = l\theta - \Omega \epsilon t \quad (2.14)$$

$l=1$ は単なる平行移動であり省く。 $l=2$ が二等分裂の初期を表わす。核内の流れは、変形しても渦度不変であるから

$$\nabla^2 \Psi = -\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

したがってその解は

$$\Psi = \frac{1}{4} \omega_0 r^2 + \sum_{l=2}^{\infty} (b_l r^l e^{il\theta} + c.c.) \quad (2.15)$$

となる。渦巻きの領域は複素速度ポテンシャル $f(z)$ により

$$f(z) = \frac{1}{2} i a^2 \omega_0 \log z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l \frac{1}{z^l}$$

の如く表わされ、その実数部から

$$\Phi = -\frac{a^2 \omega_0}{2} \theta + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{c_l}{r^l} e^{il\theta} + c.c. \right) \quad (2.16)$$

が与えられる。

(2.15) により運動学の条件をつくれば

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (r - \lambda - h(\theta, t)) \\ \equiv v_r - \frac{\partial h}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial h}{r \partial \theta} = 0 \\ h(\theta, t) = \sum_{l=2}^{\infty} (a_l e^{il\theta} + c.c.) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{D}{Dt}} \right\} (2.17)$$

となる。(2.15) と (2.16) を (2.17) に代入して

$$\begin{aligned} b_l &= -\frac{1}{l \lambda^{l-1}} (\Omega_l + \frac{1}{2} \omega_0 l) a_l e^{-i\Omega_l t} \\ c_l &= i \frac{\lambda^{l+1}}{l} (\Omega_l + \frac{1}{2} \omega_0 l) a_l e^{-i\Omega_l t} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{b_l} \right\} (2.18)$$

が与えられる。更に $r = \lambda + h(\theta, t)$ のおける境界条件:

$$\psi|_{r=\lambda+h+0} = \psi|_{r=\lambda+h-0} \quad (2.20)$$

を以上の結果を代入すると、各モード ($l=2, 3, \dots$) に対して

$$\begin{aligned} \Omega_l &= -\frac{1}{2} \omega_0 l = \frac{1}{2} \omega l \\ \Omega_l &= -\frac{1}{2} \omega_0 (l-1) = \frac{1}{2} \omega (l-1) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\Omega_l} \right\} (2.21)$$

が与えられる。各モードの位相速度は Ω_l/l であり、前者は角速度 $\frac{1}{2}\omega$ を持ち、後者はそれより遅く、

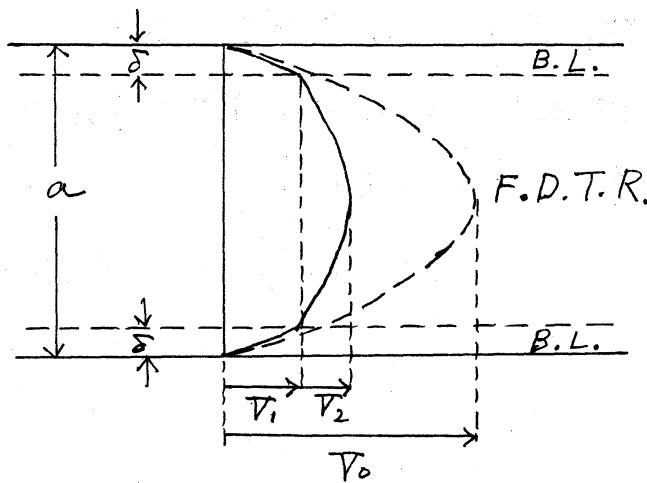
$\gamma(l-1)/l$ が γ がその速さで変形が回転する γ とを表わして
 いる。それ故線形安定性の理論からは中立安定の結果がえ
 られ、もっとくわしい運動をしらべるためには非線形理論に
 よらなければならぬ。

§3. 乱流における散逸極みの仮説

§2のべた乱流の渦糸モデルをP.P.乱流に適用する。

P.P.乱流において、境界層B.L.と十分発達した乱流の領域
 F.D.T.R.とは截然と分けられぬが、こゝでは一定分離でき
 るものとする(第5図)。

そしてB.L.では分子粘性
 μ が、F.D.T.R.では渦粘
 性 μ_t (一定)が大きい
 運動を支配していると仮
 定する。



第5図 P.P.乱流における
 特徴的量

こゝでの議論は物理
 量の大きさの程度につい
 てであって、数因子は問
 題にしない。層流のばあいの特徴的速度は

$$V_0 = \alpha a^2 / \mu \quad (3.1)$$

である。こゝで $\alpha = -d\bar{p}/dx$ は平均の圧力勾配である。

同様に考之から F. D. T. R. における特徴的連度は

$$V_2 = \alpha a^2 / \mu_t \quad (3.2)$$

である。渦粘性 ^{μ_t} は境界層から放出される大きな渦により特徴づけられるから、気体運動論と同じ考之から

$$\mu_t = \rho \delta V_1 \quad (3.3)$$

とおくことが出来る。更に $y = \delta$ 又は $a - \delta$ における接線応力の連続性から

$$\mu V_1 / \delta = \mu_t V_2 / a \quad (3.4)$$

をうる。ここで ρ, μ, a と α は与えられた量であり、 V_1, V_2, δ と μ_t は未知量である。そこで未知量を定めるのに (3.2) ~ (3.4) では条件が不足である。 V_1, V_2, μ_t を未知量 δ によって表せば

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \alpha a \delta / \mu, & V_2 &= \alpha v / \delta^2 \\ \mu_t &= \alpha a \delta^2 / v & (v &= \mu / \rho) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

となる。

ここで x, y, z 方向 $1 \times a \times 1$ の直方体の中での散逸 \dot{E} は

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \mu (V_1 / \delta)^2 \delta + \mu_t (V_2 / a)^2 a \\ &= \alpha^2 a^2 \delta / \mu + \alpha v a^2 / \delta^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

で表わされる。ここで散逸極小の仮定を入れる。(3.6)

で δ は未知量であるが、これによって極小をとれば

$$d\dot{E}/d\delta = \alpha^2 a^2 / \mu - \alpha v a^2 / \delta^3 = 0$$

ε) 3. $z = z'$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\mu\nu/\alpha)^{1/2}, \quad V_1 = a(\alpha^2\nu/\mu^2)^{1/3} \\ V_2 &= a(\alpha^2\nu/\mu^2)^{1/3} = V_1, \quad \mu_t = a(\alpha\mu^2/\nu)^{1/3} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

ε) 3.

層流に対応するレイノルズ数 Re と F.D.T.R. に対応するレイノルズ数 Re_2 を

$$\left. \begin{aligned} Re &= V_0 a / \nu = \alpha a^3 / \mu\nu \\ Re_2 &= V_2 a / \nu = Re^{2/3} \end{aligned} \right\} (3.8)$$

で定義すると

$$\left. \begin{aligned} \delta/a &= Re^{-1/3} = Re_2^{-1/2} \\ V_1/V_0 &= V_2/V_0 = Re^{-1/3} = Re_2^{-1/2} \\ \mu_t/\mu &= Re^{+1/3} = Re_2^{1/2} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

となる。

定常な P.P. 乱流においては F.D.T.R. における体積 $1 \times a' \times 1$ ($a' = a - 2\delta$) 中の散逸は B.L. からこの体積に供給される最大渦のエネルギーの割合である。最大の単位渦糸のエネルギーは

$$U_0 = C\rho V_1^2 \delta^2 \sim \rho (\alpha a \delta^2 / \mu)^2 \quad (3.10)$$

である。 t_0 を最大渦糸が B.L. 中に滞在している時間とすれば $1/\delta t_0$ は $(1 \times a' \times 1)$ 中の最大の単位渦糸が単位時間に供給される個数である。 ここで

$$P_0 / \delta t_0 \sim \rho (\alpha a / \mu)^2 \delta^3 / t_0 \quad (3.11)$$

は $1 \times a' \times 1$ 中のエネルギーの増加率である。

$$(1 \times a' \times 1) \text{ 中の散逸} = (1 \times a' \times 1) \text{ への最大渦系の供給によるエネルギーの増加率} \quad (3.12)$$

であるから、(3.10) と (3.11) を等置して

$$t_0 \sim (\alpha \delta^3 / \nu \mu) \delta^2 / \nu = \delta^2 / \nu \quad (3.13)$$

となる。この時間 t_0 は厚さ δ の B.L. が成長する時間である。

§4. 乱流ブラウン運動における Einstein の関係式

乱流ブラウン運動とは乱流中に浮遊する粒子の不規則な運動をさすものとする。Einstein のブラウン運動の理論は次の考へ方にもとづく。ブラウン粒子は熱運動によって不規則な運動をし、これらの粒子系 (分散相) は浸透圧 p_{osm} をもつ (van't Hoff の法則)。

$$p_{osm} = k_B T n_p \quad (4.1)$$

ここで k_B は Boltzmann 定数、 T は温度、 n_p は粒子の数密度である。半透膜でしまわれた単純な流体と分散相との間の膜には浸透圧が働き、直接測定できる (才 6 図)。ここで n_p に中子い勾配があったとすれば、巨視的な拡散による流れが生ずる (Fick の法則):

$$n_p \langle u \rangle = -D \text{grad } n_p \quad (4.2)$$

ここで $\langle u \rangle$ は粒子の平均速度, D は拡散係数である。(4.1) から, 温度

を一定とすれば n_p の勾配は p_{osm} の

勾配に比例する。Einstein は圧力勾

配のある分散相が粘性流体中に浸っていると考えて, 圧力勾

配と粘性による抵抗とがバランスしてるとした。圧力勾

配による分散相に働く体積力は

$$-\text{grad } p_{osm} \quad (4.3)$$

である。一方, 分散相が半径 a の球形粒子から成るとして,

Stokes の抵抗法則を仮定すれば, 分散相の受ける平均の体積力は

$$6\pi\eta a n_p \langle u \rangle \quad (4.4)$$

となる。そこで (4.3) と (4.4) を等置して

$$-\text{grad } p_{osm} = -k_B T \text{grad } n_p = 6\pi\eta a n_p \langle u \rangle \quad (4.5)$$

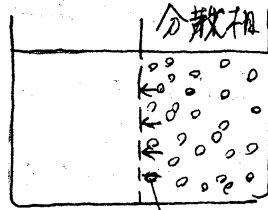
をうる。ここで, 最後の式に (4.2) を代入し $\text{grad } n_p$ の係数を比較すると以下の通り

$$D = k_B T / (6\pi\eta a) \quad (4.6)$$

をうる。これが Einstein の関係式である。以上の議論に

おいて (4.2) 及び (4.4) が成立するものの

$$\{ |\text{grad } n_p| / n_p = |\text{grad } p_{osm}| / p_{osm} \ll 1 \}$$



透過圧

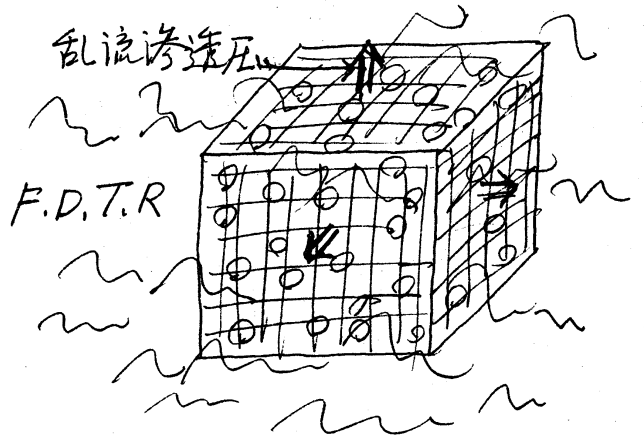
図6

$$a \ll \lambda \equiv \text{分子の平均自由行程} \quad \} \quad (4.7)$$

が存在している。

上の考は殆どそのまま乱流ブラウン運動に適用できる。粒子は通れないが流体は自由に通過する力工の中に粒子を入れて F.D. T.R. に浸してやれば、粒子の力工への衝突によって力工には内側から外側に向う平均の力工圧子である。

(オク図)。つまり乱流透過圧 p_{toss} が存在することになる。



オク図 乱流透過圧

粒子分散系は乱れと力学的、統計的平衡状態にあり、粒子の速度分布は正規分布:

$$f(u) = A e^{-\alpha u^2} \quad (4.8)$$

と仮定する。そこで

$$\left. \begin{aligned} n_p &= \int f(u) d^3u = A (\pi/\alpha)^{3/2} \\ \langle u^2 \rangle &= \int f(u) u^2 d^3u = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

しんがて

$$\begin{aligned} p_{toss} &= 2 \langle n_p u_x p_x \rangle |_{u_x > 0} \\ &= \frac{1}{4} m A \pi^{1/2} / \alpha^{5/4} = \frac{1}{3} m \langle u^2 \rangle n_p \end{aligned} \quad (4.10)$$

が成立する。これは (4.1) に対応する。(4.2), (4.4) に対

よして

$$n_p \langle u \rangle = -D_t \text{grad } n_p \quad (4.11)$$

$$-\text{grad } p_{\text{osm}} = -\frac{1}{3} m \langle u^2 \rangle \text{grad } n_p = 6\pi \mu_t a n_p \langle u \rangle \quad (4.12)$$

を仮定する。ここで D_t は乱流拡散係数、 m はブラウン粒子の質量である。(4.11) と (4.12) を結合させて $\text{grad } n_p$ の係数を

$$D_t = \frac{m \langle u^2 \rangle}{18\pi \mu_t a} \quad (4.13)$$

と見ると、これが乱流ブラウン運動に対する Einstein の関係式である。

P. P. 乱流において、 y 方向の乱流拡散が起るとする。

そこで

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = D_t \frac{\partial^2 n_p}{\partial y^2} \quad (4.14)$$

が成立する。この基本解は

$$n_p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_t t}} e^{-\frac{y^2}{4D_t t}} \quad (4.15)$$

である。これから初期に $y=0$ にあった粒子の平均到達距離

高は

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 n_p(y, t) dy = 2 D_t t \quad (4.16)$$

となるので

$$D_t = \langle y^2 \rangle / 2t \quad (4.17)$$

と見ると。

(4.7) に対応して、この理論の適用できる条件は

$$\left. \begin{aligned} |grad n_p|/n_p &= |grad p_{t00m}|/p_{t00m} \ll 1 \\ a \gg \lambda_0 &= \text{最大渦のスケール} \end{aligned} \right\} (4.18)$$

である。

P.P.乱流において乱流ブラウン粒子の実験を行うはあのを考へる。 D_t は (4.17) により, μ_t は F. D. T. R. における平均速度分布の曲率から, $\langle u^2 \rangle$ はブラウン粒子の速度自乗平均であるからすべて観測可能な量であり, (4.13) は実験によつて検証できるはずである。

§5. おわりに

この論文では乱流構造の渦糸モデルを考察した。まず境界層によつて発生した大きな渦糸がひまのばしと分裂によつて小形化する“渦糸の力学”を論じ(§2), 2次元 Poiseuille 乱流を境界層と十分に発達した乱流の領域に分離して、渦糸モデルを適用した(§3)。その際力学だけでは閉じる関係が与られず“散逸極小の仮説”を導入した。一般にランダム系を粗視化するときは、決定論的法則(第1原理)だけでは不十分で、統計法則を必要とする。この仮説は統計法則の一種と考えられる。§4で Einstein のブラウン運動の理論を乱流ブラウン運動(乱流中に浮遊する粒子の不規則な運動)に適用した。Einstein の関係式で温度が現われる所に

ブラウン粒子の運動エネルギーの平均値が現れれば、粒子と
 乱れの力学的、統計的平衡を流体力学的に論ずることによっ
 て、これを乱れの性質におまかえうものと思われよう。

参考文献:

- 1) A. Einstein : Ann. der Phys. 17 (1905) 549 (湯川他:
 アインシュタイン選集 I (1971) 219, 共立出版)
- 2) A. Einstein : Ann. der Phys. 19 (1906) 371 (湯川他:
 アインシュタイン選集 I (1971) 230, 共立出版)
- 3) 桑原真二: 統計流体力学 (流体力学の展望 I) 1976,
 流体力学懇話会
- 4) L. D. Landau & E. M. Lifschitz : Fluid
 Mechanics § 31 ~ § 38 (p 116 ~ p 144) 1959,
 Pergamon Press.