

確率微分方程式の解の exact representation.

九大 工 岡田 寛

確率微分方程式の解も、与えられたデータ (ベクトル場とブラウン運動またはセミマルクンゲール) の関数として具体的に表わすことは、応用上重要であるのみでなく理論的にも興味ある問題である。この報告では、解の表現を微分幾何の方法と確率微分方程式に絡り入れて論じた。前半の 1-3 節では準備として解の分解の問題及び解の微分同型の問題を論ずる。なお常微分方程式に ついて併えする結果があるが、これについては Kno-Tsai-Chen [3] を参照したい。

§1. 解の例と微分同型の問題

M をパラコンパクト、連結な (必ず多様体で、次元は d とする) M に n -重 Δ を付加した空間を $\hat{M} = M \cup \Delta$ とかく。 M がコンパクトのときには Δ は孤立点であり、コンパクトでないときは \hat{M} に n -重コンパクト化の位相が入っているものとする。

多様体 M 上に与えられた r 個の (α-イタトル場 X_1, \dots, X_r とある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ 上に与えられた r 個の連続なセミマルコフ過程 M_t^1, \dots, M_t^r をもとにした確率微分方程式 (SDE)

$$(1.1) \quad d\xi_t = \sum_{j=1}^r X_j(\xi_t) \circ dM_t^j$$

を考へる. M 上の値をとる, \mathcal{F}_t -適合した連続な道をもつ確率過程 ξ_t が, $\forall f \in C^\infty(M)$ ($= M$ 上の C^∞ -関数の全体) に対し

$$(1.2) \quad f(\xi_t) = f(\xi_0) + \sum_{j=1}^r \int_0^t X_j f(\xi_s) \circ dM_s^j, \quad t < \tau$$

を満たすとき, ξ_t を SDE (1.1) の解という. ただし τ は Δ に到達する最初の時間 (life time) であり, \circ は Stratonovich 積分をあらわす. また $t \geq \tau$ では $\xi_t = \Delta$ を仮定する. 初期値 ξ_0 が M 上の一点 α であるとき, 解を $\xi_t(\alpha)$ であらわす.

明らかに解 $\xi_t(\alpha)$ は与えられたデータ $X_1, \dots, X_r, M_t^1, \dots, M_t^r$ 及び初期値 α の汎関数である. この汎関数が具体的に書き表わされる例をあげる.

例. まず $r=1$ のとき. $X_1 = X, M_t^1 = M_t$ とかく. 点 $\alpha \in M$ から出発するイタトル場 X の積分曲線を $Exp_t X(\alpha)$ であらわす. この定義における t の最大区間を $(X_1(\alpha), X_2(\alpha))$ とすると,

$$(1.3) \quad \xi_t(\alpha) \equiv \begin{cases} Exp_t M_t X(\alpha), & t < \tau \equiv \inf\{t > 0 \mid M_t \in (X_1(\alpha), X_2(\alpha))\} \\ \Delta, & t \geq \tau \end{cases}$$

は方程式 $d\xi_t = X(\xi_t) \circ dM_t$ の解である.

次に与えられた r 個のベクトル場 X_1, \dots, X_r は可換, すなわち $X_i X_j = X_j X_i$ ($\forall i, j$) とする。このとき

$$(1.4) \quad \xi_t(x) = \text{Exp } tX_1 \circ \dots \circ \text{Exp } tX_r(x), \quad t < \tau = \tau_1 \cdots \tau_r$$

(\circ は合成写像. τ_i は $\text{Exp } tX_i$ の life time) は (1.1) の解.

上の例でベクトル場 X_1, \dots, X_r が全て定備 (即ち $X_i(x) = -\infty$, $X_i(x) = \infty \quad \forall x \in M$) ならば $\tau(x) = \infty$ とする. 更に $(t, \omega) \in$ 固定して, $\xi_t \in M$ 上の写像とみなす。微分同型に ξ_t であることが, 表現 (1.4) からただちにわかる. しかし X_1, \dots, X_r が可換でないときは, 解はこのように簡単には書けないので, ξ_t が微分同型であることを示すのは容易ではない. まず特別な場合にこれを示そう.

定理 1.1. X_1, \dots, X_r を定備なベクトル場とする. これらから生成される Lie 環 \mathfrak{L} が有限次元ならば ξ_t は微分同型である.

証明. 上の仮定から \mathfrak{L} の各元は定備であり, 更に次の Lie 群 G の存在が知られている. (Palais [4]).

(i) G は M の Lie 変換群, 即ち $G \times M \rightarrow M$ の C^∞ -写像 φ で
(a) $\varphi(g, \cdot): M \rightarrow M$ は微分同型, (b) $\varphi(e, x) = x$, $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$. を満たすものがあろう.

(ii) $g \rightarrow \varphi(g, \cdot)$ は G から $G(M) (= M$ 上の微分同型の群) の中への isomorphism.

(iii) $\mathfrak{g} \ni G$ の Lie 環とすると, $\forall \hat{X} \in \mathfrak{g}$ に対し L の元 X が存在して

$$\hat{X}(f \circ \varphi)(q, x) = Xf \circ \varphi(q, x), \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

が成立する. (左辺の \hat{X} は x を固定して q のみに作用させる).

今 X_1, \dots, X_r に対応する \mathfrak{g} の元 $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_r$ をとり G 上の確率微分方程式

$$d\hat{X}_t = \sum_{j=1}^r \hat{X}_j(\hat{X}_t) \circ dM_t^j$$

を考へる. 解 $\hat{X}_t(q)$ は conservative であることが知られている. (Itô [37]). ここで $\tilde{X}_t(x) = \varphi(\hat{X}_t(q), x)$ とおくと, \tilde{X}_t は SDE (1.1) の解である. 実際 $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\begin{aligned} df(\tilde{X}_t(q)) &= d(f \circ \varphi)(\hat{X}_t(q), x) = \sum_j \hat{X}_j(f \circ \varphi)(\hat{X}_t(q), x) \circ dM_t^j \\ &= \sum_j X_j f(\tilde{X}_t(q)) \circ dM_t^j. \end{aligned}$$

明らかに \tilde{X}_t は微分同型である. (証明終)

Lie 環 \mathfrak{L} が有限次元でなければ, X_1, \dots, X_r が定常であるとしても L の元は必ずしも定常にはならない. (例: \mathbb{R}^2 で $X = y \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial y}$). したがって解は必ずしも conservative にはならず, 一般に \tilde{X}_t が微分同型になることは期待出来ない. しかし局所微分同型になることを示そう. まず解 \tilde{X}_t の滑らかさに関する次の定理が知られている.

定理 1.2. (Gihman-Skorohod [6]). (t, ω) を固定すると, \tilde{X}_t は $\mathcal{D}_t = \{x \mid z(x, \omega) > t\}$ から M の中への C^∞ 写像である.

次に $\xi_t(\omega)$ の Jacobi 行列を考へる. 角 $\omega(t, \omega)$ を固定し, ξ_t の近傍の局所座標 $\xi = (x^1, \dots, x^d)$, $\xi_t(\omega)$ の近傍の局所座標 (y^1, \dots, y^d) とする. $\xi_t^i = y^i(\xi_t(\omega))$ とおき, Jacobi 行列

$$\Phi_t = \left(\frac{\partial \xi_t^i(\omega)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1, \dots, d}$$

を考へる.

命題 1.3. (Ikeda-Watanabe [1]). Φ_t は正則行列である.

証明. まず $M = \mathbb{R}^d$ で $(x^1, \dots, x^d) = (y^1, \dots, y^d)$ の場合を調へる.

任意の場合 X_j はこの座標を用いて $X_j = \sum_i X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と表わす,

$\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^d)$ は

$$d\xi_t^i = \sum_k X_k^i(\xi_t) \circ dM_t^k$$

と表わす. ∂ に $\frac{\partial}{\partial x^i}$ を作用させる

$$d \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} = \sum_{k, \ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell} X_k^i(\xi_t) \frac{\partial \xi_t^k}{\partial x^j} \circ dM_t^k.$$

故に Φ_t は次の行列微分方程式を満たす.

$$d\Phi_t = \sum_k \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j} \right) \Phi_t \circ dM_t^k, \quad \Phi_0 = \text{単位行列}$$

この adjoint 方程式

$$d\bar{\Phi}_t = - \sum_k \bar{\Phi}_t \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial x^j} \right) \circ dM_t^k$$

をとると $d(\bar{\Phi}_t \Phi_t) = 0$. $\Phi_0 = \text{単位行列}$ より $\bar{\Phi}_t \Phi_t = \text{単位行列}$ となる.

Φ_t は逆行列をもつことがわかる.

次に多様体の場合. (α, ω) を固定し, 道 $\xi_s(\omega)$, $0 \leq s \leq t$ 上
の座標近傍 U_1, \dots, U_n を

$$\left(\sum_s(\alpha), \frac{k-1}{n}t \leq s \leq \frac{k}{n}t \right) \subset O_p, \quad k=1, \dots, n$$

と $4t$ より 12 とる. 今 $s = \frac{k-1}{n}t$ で α を通る解 $\sum_s^k(\alpha)$

とかくと

$$\sum_t(\alpha) = \sum_t^n \circ \sum_{\frac{n-1}{n}t}^{n-1} \circ \dots \circ \sum_{\frac{1}{n}t}^1(\alpha)$$

$\sum_{\frac{k}{n}t}^k$ の Jacobi 行列を $\Phi_{\frac{k}{n}t}^k$ とすると

$$\Phi_t = \Phi_t^n \cdots \Phi_{\frac{1}{n}t}^1$$

が成立する. 各 Φ_i^k は正則行列だから, $\Phi_t \in \text{正則行列}$ である.

系. \sum_t は局所微分同型である.

§2. 解の分解

多様体 M 上の点 x の接空間を $T_x(M)$ とかく. 今 $\varphi \in M \rightarrow M$ の C^∞ 写像とし, その定義域を \mathcal{D} とする. $x \in \mathcal{D}$ に対し線形写像 $\varphi_{*,x}: T_x(M) \rightarrow T_{\varphi(x)}(M)$ を $\varphi_{*,x} X_x f = X_x(f \circ \varphi)$ (ただし $X_x \in T_x(M)$, $f \in C^\infty(M)$) により定義し, φ の微分と"る.

φ の Jacobi 行列が x で正則ならば $\varphi_{*,x}$ は isomorphism である. このとき M 上のベクトル場 X に対し新しい \mathcal{D} 上のベクトル場 $(\varphi)_*^{-1}(X)$ を

$$(\varphi)_*^{-1}(X)_x = (\varphi)_{*,x}^{-1} X_{\varphi(x)}$$

により定義する. 明らかに

$$(\varphi)_*^{-1}(X)(f \circ \varphi)(\alpha) = X f(\varphi(\alpha))$$

が成立する.

$\xi_t(x)$ を SDE (1.1) の解とし, $\tau(x)$ をその life time とする.

(t, ω) を固定し $\mathcal{A}_t = \{x \mid \tau(x) > t\}$ とおく. ξ_t は局所微分同型だから, ブラウトル場 X に対し $(\xi_t)_*(X)$ が \mathcal{A}_t 上で定義される. これは q_t に適合した, ブラウトル場の値をとる確率過程である. さて $(X_1, \dots, X_r, M_1^1, \dots, M_1^r)$ とは別に s 位の ブラウトル場 $\{V_1, \dots, V_r\}$ と s 位の連続なセミマルク σ -フィールド N_1^1, \dots, N_1^r が与えられているとする. これと ξ_t とをとりし確率微分方程式

$$(2.1) \quad d\eta_t = \sum_{j=1}^r (\xi_t)_*(Y_j) \circ dM_t^j$$

を考へる. 解 η_t は高々 ξ_t の life time τ まで定義可能である. しかし τ が η_t の life time σ ほどより小さい. 二つの解 ξ_t と η_t の合成によつて得らぬ確率過程 $\xi_t \circ \eta_t$ のみならず確率微分方程式を求めよう.

定理 2.1. $\xi_t(x) \equiv \xi_t \circ \eta_t(x)$, $t < \sigma(x)$ は次の SDE の解.

$$(2.2) \quad d\xi_t = \sum_{j=1}^r X_j(\xi_t) \circ dM_t^j + \sum_{j=1}^r Y_j(\xi_t) \circ dN_t^j$$

証明のために次の補題が必要である.

補題 2.2. (伊藤の公式) $F_t(x, \omega)$ は $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega$

$\rightarrow \mathbb{R}^1$ の可測写像であり, 次の性質をもつとする.

(i) (t, ω) を固定すれば, $F_t(\cdot)(\omega)$ は C^2 -写像

(ii) x を固定すれば, $F_t(x)$ は連続なセミマルク σ -フィールドで

$$F_t(x) = F_0(x) + \sum_j \int_0^t f_s^j(x) \circ dN_s^j$$

とあらわされる。ここに N_t^1, \dots, N_t^m は連続なセミマルカ \mathcal{F} -
 -ルで、 $f_s^j(\omega)$, $j=1, \dots, m$ は $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ の可測な
 上で上記 (i) の性質 ε ^(4.5) を満足すると連続なセミマルカ \mathcal{F} -
 ルになる。このとき連続なセミマルカ \mathcal{F} -ル $M_T = (M_t^1, \dots, M_t^d)$ に対し
 次の公式が成立する。

$$(2.3) \quad F_t(M_t) = F_0(M_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F_s}{\partial x^i}(M_s) \circ dM_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t f_s^j(M_s) \cdot dN_s^j$$

(証明略)

定理 2.1 の証明. $f \in C^2(M)$ とし $F_t(x) = f \circ \xi_t(x)$ とおくと、

$$dF_t(x) = \sum_{j=1}^r X_j f(\xi_t(x)) \circ dM_t^j$$

局所座標で書けば $\eta_t = (\eta_t^1, \dots, \eta_t^d)$ は連続なセミマルカ \mathcal{F} -
 ルだから公式 (2.3) によると

$$dF_t(\eta_t(x)) = \sum_i \frac{\partial F_t}{\partial x^i}(\eta_t(x)) \circ d\eta_t^i + \sum_j X_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dM_t^j$$

右辺の第一項は

$$\begin{aligned} & \sum_{(i)} \frac{\partial (f \circ \xi_t)}{\partial x^i}(\eta_t(x)) (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)^i(\eta_t(x)) \circ dN_t^j \\ &= \sum_j (\xi_t)_*^{-1}(Y_j)^i (f \circ \xi_t)(\eta_t(x)) \circ dN_t^j \\ &= \sum_j Y_j f(\xi_t \circ \eta_t(x)) \circ dN_t^j \end{aligned}$$

故に

$$df(\xi_t(x)) = \sum_j Y_j f(\xi_t(x)) \circ dN_t^j + \sum X_j f(\xi_t(x)) \circ dM_t^j$$

が成立する。

(証明終)

系. ヲクトル場 X_1, \dots, X_r が $X_j = Y_j + Z_j, j=1, \dots, r$ と分解されているとする. η_t 及び ξ_t が

$$d\eta_t = \sum_j Y_j(\eta_t) \circ dM_t^j$$

$$d\xi_t = \sum_j (\eta_t)_*^{-1}(Z_j)(\xi_t) \circ dM_t^j$$

の解とすると, $\eta_t \circ \xi_t$ は元の方程式 (1.1) の解である.

注意. $Y_i Z_j = Z_j Y_i, i, j=1, \dots, r$ のとき $(\eta_t)_*^{-1}(Z_j) = Z_j$ となる. 故に (1.1) の解 ξ_t は $d\eta_t = \sum Y_j \circ dM_t^j$ と $d\xi_t = \sum Z_j \circ dM_t^j$ の解に分解される. §1 の例はこの場合である.

§3. 解の微分同型 II.

1節で解 ξ_t は局所微分同型であることと示した. この節では ξ_t はその定義域 Q_t から M の中への 1対1写像, したがって M の中への微分同型写像であることと示した. この事実は M_t^1, \dots, M_t^r が t の滑らかな関数のときは, 常微分方程式あるいは幾何で知られた事実である. 我々の場合にこのことと示す一つの方法は, M_t^1, \dots, M_t^r が滑らかな関数で近似的であることである. これについては Ikeda-Watanabe [7] 又はこの報告集を参照した. ここでは, 前節の解の分解の方法を使って証明しよう. まず

補題 3.1. ξ_t は (1.1) の解とし, $\eta_t \in$

$$(3.1) \quad d\eta_t = - \sum_{j=1}^r (\xi_t)_*^{-1}(X_j) \circ dM_t^j$$

の解とすれば

$$\bar{\zeta}_t \circ \eta_t(x) = x, \quad t < \tau \wedge \sigma(x)$$

$$\eta_t \circ \bar{\zeta}_t(x) = x, \quad t < \tau \wedge \sigma(x)$$

が成立する。ただし、 τ 及び σ は $\bar{\zeta}_t$ 及び η_t の life time である。

証明. $\bar{\zeta}_t \circ \eta_t(x) = x$ は定理 2.1 から明らか。この関係式より

$(\bar{\zeta}_t)_* \circ (\eta_t)_*^{-1}$ は $T_x(M)$ 上の恒等写像。ゆえに $(\eta_t)_*^{-1} = (\bar{\zeta}_t)_*^{-1}$ が成立する。今 $\hat{\zeta}_t = \eta_t \circ \bar{\zeta}_t$ とおくと

$$d\hat{\zeta}_t = -\sum (\bar{\zeta}_t)_*^{-1}(X_j) \circ dM_t^j + \sum (\eta_t)_*(X_j) \circ dM_t^j = 0$$

故に $\hat{\zeta}_t(x) = x$ 。

定理 3.2. $\bar{\zeta}_t$ による \mathcal{D}_t の像を \mathcal{E}_t とする。 $\bar{\zeta}_t$ は \mathcal{D}_t から \mathcal{E}_t への微分同型である。

証明. $x, y \in \mathcal{D}_t$ が $\bar{\zeta}_t(x) = \bar{\zeta}_t(y)$ を満たすとき、

$\eta_t \circ \bar{\zeta}_t(x) = \eta_t \circ \bar{\zeta}_t(y)$ 。故に補題より $x = y$ 。即ち $\bar{\zeta}_t$ は 1対1写像である。 (証明終)

解 $\bar{\zeta}_t$ が conservative ならば $\mathcal{D}_t = M$ である。更に (3.1) の解 η_t も conservative ならば $\mathcal{E}_t = M$ である。実際任意の $x \in M$ に対し $\bar{\zeta}_t(\eta_t(x)) = x$ であるから $x \in \mathcal{E}_t$ である。故に次の命題が成立する。

命題 3.3. $\bar{\zeta}_t$ 及び (3.1) の解 η_t が共に conservative ならば $\bar{\zeta}_t$ は M の微分同型である。

系. M がコンパクト多様体ならば、 $\bar{\zeta}_t$ は微分同型である。

多様体 M がコンパクトでない場合は, ξ_t 及び η_t は必ずしも conservative に保たれない. これらが conservative に保たれる条件を求めよう.

補題 3.4. M をコンパクトでないリーマン多様体とし, ξ_t はその上の conservative 正解とする. M 上の点 x_0 と距離 d に対し

$$\sup_{d(x, x_0) \geq n} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{1 + d(x_0, \xi_t(x))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

が成り立つならば ξ_t は微分同型である.

証明. $K_n = \{x \mid d(x, x_0) \geq n\}$ とし, η_t が K_n の到達時間 τ_n とすると, $\tau_n \uparrow \infty$ ($= \eta_t$ の life time) から $\xi_{t+\tau_n} \circ \eta_{t+\tau_n}(x) = x$ が成立する. 今 $\tau_n(x) < t$ とすれば $\eta_{t+\tau_n}(x) \rightarrow \Delta$ ($n \rightarrow \infty$). ゆえに仮定より $\xi_{t+\tau_n} \circ \eta_{t+\tau_n}(x) \rightarrow \Delta$ となつて矛盾する. ゆえに $\tau_n(x) \geq t$ でなければならず, η_t は conservative である.

定理 3.5. M をユークリッド空間とする. ベクトル場 X_j の通常の座標による表現は $X_j = \sum X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とする. 関数 X_j^i の各変数による偏微分が有界関数ならば, ξ_t は微分同型である.

証明. m を正の整数とし $f(x) = (1 + |x|^2)^{-m}$ とおく. 伊藤の公式により

$$f(\xi_t(x)) = f(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^t X_j f(\xi_s) dM_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t X_i X_j f(\xi_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

今 N_t^i 及び A_t^i を与えられ M_t^i のマルコフ過程及び有界変動過程の部分とする. ($M_t^i = N_t^i + A_t^i$). (必要ならば時間変換することにより), $t > s$ のとき $\langle N_t^i \rangle_t - \langle N_t^i \rangle_s \leq t - s$, $A_t^i - A_s^i \leq t - s$ をみたすと仮定してよい. 上式の両辺を $\varepsilon = \varepsilon(t-s)$ 平均をとって計算すれば次の不等式を得る

$$E[f(\xi_t(x))^2] \leq (t+2) \left\{ f(x)^2 + (t+1) \int_0^t E[f(\xi_s(x))^2] ds \right\}$$

ただし ε は定数. Gronwall の不等式より

$$E[f(\xi_t(x))^2] \leq (t+2) e^{(t+1)t} f(x)^2$$

を得る. また $|\frac{\partial}{\partial x_i} f| \leq \text{const} \cdot f(x)$ からも同様に

$$E\left[\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_t(x))\right|^2\right] \leq \text{const} \cdot f(x)^2$$

が成立する.

x を極座標 (r, θ) で用いると表わすと,

$$\frac{\partial}{\partial r} (f \circ \xi_t(r, \theta)) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot \frac{\partial \xi_t^i(r, \theta)}{\partial r}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial r} \xi_t^i(r, \theta) = \sum_{j,k} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} X_j^i(\xi_s) \frac{\partial \xi_s^k(r, \theta)}{\partial r} dM_s^j + \frac{\partial x_i}{\partial r}$$

であるが, $\frac{\partial}{\partial x_j} X_j^i$ は仮定により有界だから $E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r} \xi_t^i(r, \theta)\right|^2\right]$ は (r, θ) に依らず有界となる. 故に

$$\begin{aligned} E\left[\left|\frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta)\right|^2\right] &\leq \text{const} \cdot \sum_i E\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\left|\frac{\partial \xi_t^i}{\partial r}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \text{const} \cdot f(x) \end{aligned}$$

Doob の martingale 不等式を用いる

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta) \right|^2 \right] \leq \text{const} \cdot f(\alpha)$$

が成立する。よって

$$\varphi_n(\theta) \equiv \left(\int_n^\infty \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial}{\partial r} f \circ \xi_t(r, \theta) \right|^2 + |f \circ \xi_t(r, \theta)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}$$

とある。上の評価より $E[\varphi_n(\theta)^2] < \infty$ ($\forall n$) となるから、 $\varphi_n(\theta) < \infty$

a.s. である。ゆえに $\varphi_n(\theta) \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成立する。とすると

$\varphi_n(\theta)$ は \mathbb{Q} の連続関数だから Dini の定理により $\varphi_n(\theta)$ は 0 に

一様収束する。故に Sobolev の不等式

$$\sup_{r \geq n} \sup_{0 \leq t \leq T} |f \circ \xi_t(r, \theta)| \leq 2\varphi_n(\theta)$$

に注意すれば

$$\sup_{\substack{r \geq n \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \sup_{0 \leq t \leq T} |f \circ \xi_t(r, \theta)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

が成立することからわかる。故に ξ_t は補題の条件を満たす。

4. 解の表現. 可解の場合.

この節では SDE (1.1) を定義するベクトル場 X_1, \dots, X_r は全て完備でありかつそれらから生成される Lie 環 \mathcal{L} は有限次元の可解 Lie 環とする。このとき Lie の定理によって、 \mathcal{L} の ideal の減小列で

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n > \mathcal{L}_{n-1} > \dots > \mathcal{L}_1 = \{0\}, \quad \dim \mathcal{L}_k = k$$

をみたすものがある。そこで \mathcal{L} の基 $\{Y_1, \dots, Y_k\} \in$, 各 $k \leq n$ の $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ が \mathcal{L}_k の基に \mathbb{R} のように選んでおく。

今 $Z \in \mathcal{L}$ に対し $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ の線形写像 $\text{ad}_Z \in \text{ad}_Z X = [Z, X]$ によって定義する。 \mathcal{L} の基 Y_i 上の様にとると, $\text{ad}_Z Y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} Y_j$. 行列 (c_{ij}) を ad_Z と書くことにする。 ad_Z は三角行列であって

$$\text{ad}_Z = \left(\begin{array}{ccc|ccc} x & * & 0 & & & \\ * & \dots & * & & & \\ \hline * & * & & 0 & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \end{array}} \right\} n-k \\ \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \end{array}} \right\} k \end{array} \quad , \quad Z \in \mathcal{L}_k \text{ のとき}$$

と表わされる。 \mathcal{L} が中零 Lie 環ならば, 対角線上の要素は全て 0 である。

定理 4.1. Y_1, \dots, Y_n 上の基とすると, SDE (4.1) の解 \bar{x}_t は次の書理をもつ

$$\bar{x}_t(\omega) = \text{Exp } N_t^Y Y_n \circ \dots \circ \text{Exp } N_t^Y Y_1(\omega).$$

ただし N_t^1, \dots, N_t^n は M_t^1, \dots, M_t^n から次の初等的演算 (i) (ii) (iii) を有限回行って得られる連続なセミマルク過程である。

- (i), 一次結合, 積
- (ii) M_t^1, \dots, M_t^n による Stratonovich 積分
- (iii) e^Z の代入.

特に \mathcal{L} が nilpotent ならば N_t^1, \dots, N_t^n は上の (i), (ii) の演算のみによって得られる。

証明. 方程式 (1.1) を定義するベクトル場 X_1, \dots, X_r は全て

Y_1, \dots, Y_n の一次結合であらわされる。今 $X_j = \sum a_{jk} Y_k$ とすると (1.1) は

$$d\tilde{Z}_t = \sum Y_k \circ d\tilde{M}_t^k, \quad \tilde{M}_t^k = \sum_j a_{jk} M_t^j$$

と表わされる。以下では簡単のため $M_t^k \equiv M_t$ と書くことにする。またベクトル記号 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \equiv S_t$ とする。この方程式を $d\tilde{Z}_t = (Y, \circ dM_t)$ と書く。

まず解 \tilde{Z}_t を Z_t の n の方程式の解に分解する。

$$dZ_t^n = Y_n \circ dM_t^n$$

$$dZ_t^j = \sum_{i=1}^{n-1} (Z_t^j)^{-1}(Y_i) \circ dM_t^i$$

定理 2.1 の系より $\tilde{Z}_t = Z_t^n \circ Z_t^j$ が成り立つ。と n の次の補題により

$$d(Z_t^j)^{-1}(Y_i) = \text{ad}_{Y_n} (Z_t^j)^{-1}(Y_i) \circ dM_t^n$$

だから

$$(Z_t^j)^{-1}(Y_i) = e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} Y_i$$

とあらわされる。故に

$$(4.1) \quad dZ_t^j = \sum_{i=1}^{n-1} e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} Y_i \circ dM_t^i = (Y, \circ e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}} \circ d\hat{M}_t)$$

となる。ただし ad_{Y_n}' は ad_{Y_n} の転置行列であり、 $\hat{M}_t = (M_t^1, \dots, M_t^{n-1}, 0)$ 。行列 $e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}'}$ は三角行列だから、ベクトル $M_t^{n-1} = \int_0^t e^{M_s^n \text{ad}_{Y_n}' \circ d\hat{M}_s}$ の n の成分は 0 である。故に

$$dZ_t^j = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \circ dM_t^{n-1, i}$$

とかけると $M_t^{n-1} = (M_t^{n-1, 1}, \dots, M_t^{n-1, n-1}, 0)$ 。

次に η_t^n を次の二つの方程式の解に分解する。

$$dS_t^{n-1} = Y_{n-1} \circ dM_t^{n-1, n-1}$$

$$d\eta_t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} (S_t^{n-1})_+^{-1} (Y_j) \circ dM_t^{n-1, j}$$

上と同理由で η_t^{n-1} はイフトル場 Y_1, \dots, Y_{n-2} に関する SDE で

$$d\eta_t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} Y_j \circ dM_t^{n-2, j}$$

と表わすことができる。ただし $M_t^{n-2} = (M_t^{n-2, 1}, \dots, M_t^{n-2, n-2}, 0, 0)$ は

$$M_t^{n-2} = \int_0^t e^{M_s^{n-1, n-1}} \text{ad}_{Y_{n-1}} \circ d\hat{M}_s^{n-1}, \quad \hat{M}_t^{n-1} = (M_t^{n-1, 1}, \dots, M_t^{n-1, n-2}, 0, 0)$$

によって定義される連続なセミマルク過程である。この論

法をくり返せば

$$S_t^n = S_t^n \circ S_t^{n-1} \circ \dots \circ S_t^2 \circ \eta_t^2$$

$$= \text{Exp } M_t^n Y_n \circ \text{Exp } M_t^{n-1, n-1} Y_{n-1} \circ \dots \circ \text{Exp } M_t^{2, 2} Y_2 \circ \text{Exp } M_t^{2, 1} Y_1$$

となる。ここで $M_t^n, M_t^{n-1, n-1}, \dots, M_t^{2, 1}$ の定義をみれば、これは

は M_t^1, \dots, M_t^n から (i) ~ (iii) の演算を有限回行って得られる

セミマルク過程であることは明らか。

また $e^{M_t^n \text{ad}_{Y_n}}$ の要素は M_t^n の多項式のみで指数関数は理山ゆえに、 $M_t^{n-1, n-1}$ は (i), (ii) の演算の4によって得られる。 $M_t^{n-2, n-2}$ にも同じことがあり、故に定理は証明された。

補題 4.2. S_t は (1.1) の解とし、 X を任意のイフトル場とすると、イフトル場の値をとる確率過程 $X_t = (S_t)_+^{-1}(X)$ は次の確率微分方程式を満たす。

$$dX_t = \sum_j [X_j, X_t] \circ dM_t^j = \sum_j \text{ad}_{X_j} X_t \circ dM_t^j.$$

(証明略).

文 献

- [1] N. Ikeda-S. Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion processes. To appear
- [2] K. Ito: Brownian motions in a Lie group. Proc. Japan Acad. 8(1950), 4-10.
- [3] Kuo-Tsai-chen: Decomposition of differential equations Math. Annalen. 146(1962), 263-278
- [4] R. S. Palais: A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. Amer. Math. Soc. No 22(1957)
- [5] Y. Yamato: Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebra. Z. W. 47(1959), 213-229.
- [6] I. I. Gihman - A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1972.