

## 制御確率微分方程式の自由境界問題

神戸大 理, 西尾真喜子

マルコフ過程の最適停止の問題が, 自由境界問題に関連していることはよく知られている。確率微分方程式に(それ)で運動する系に制御を行い, さらに最適停止を含めさせてみると, ベルマン方程式の自由境界問題が関連してくる。この場合, 最適制御に対する半群が, マルコフ過程の推移半群の役目とする。

### §1. 最適問題に関連する半群.

$\Gamma \subset R^k$  をコンパクト凸集合。確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の  $n$ 次元ブラウン運動  $B(t), t \geq 0$  とし,  $\mathcal{F}_t = \sigma(B(s), s \leq t)$  とおく。  $\mathcal{F}_t$ -発展的可測な  $P$ -値確率過程を *admissible control* とよび, その全体を  $\mathcal{O}$  とかく。

$\alpha(x, u)$  を  $n \times n$  対称行列,  $\gamma(x, u) \in R^n$  で, とともに  $R^n \times \Gamma$  上の関数として, 次の条件を仮定しておく。

(A.1) 有界,  $|h(x, u)| \leq b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \Gamma$

(A.2)  $u$  に固く一致に,  $x$  の Lipschitz 連続, かつ,  
 $x$  に固く一致に,  $u$  の連続関数, i.e.

$$|h(x, u) - h(x', u')| \leq K|x - x'| + \rho(|u - u'|)$$

ここで,  $\rho$  は  $\rho(0) = 0$  とする  $[0, \infty)$  上の連続有界関数.

$U \in \mathcal{U}$  に対し, 制御確率微分方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} dX(t) = \alpha(X(t), U(t)) dB(t) + \gamma(X(t), U(t)) dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

は,  $\mathcal{F}_t$  に適合 (と一意解  $X(t) = X(t; U, x)$ ) を持つ. この解  $X$

$U$  の response とよぶ. さてここで, 定数コントロール  $u \in \Gamma$

の response  $\tilde{X}^u$  は, 生成作用素が  $L^u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^u(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$

+  $\sum_{i=1}^n \gamma_i^u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , となる (  $a^u(x) = \frac{1}{2} \alpha^2(x, u)$ ,  $\gamma^u$  とする

diffusion である. 以後  $h(x, u) \equiv h^u(x)$  とおくこともある.

$\mathcal{F}_t$ -停止時間の全体を  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}(t) = \{t \wedge \tau, \tau \in \mathcal{M}\}$  とす

る.

$$f: \mathbb{R}^n \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad c: \mathbb{R}^n \times \Gamma \rightarrow [0, \infty)$$

が, ともに (A1) (A2) を満たすことを仮定する. pay off

$I(t, x, \varphi, U)$  を次のように定義する

$$I(t, x, \varphi, U) = \int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta), U(\theta)) d\theta} f(X(s), U(s)) ds + e^{-\int_0^t c(X(\theta), U(\theta)) d\theta} \varphi(X(t))$$

を仮し,  $X(t) = X(t; U, x)$ .

最適制御の optimal value,  $Q(t, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{U}} E I(t, x, \varphi, U)$

最適停止の optimal value,  $V(t, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{U}, \tau \in M(t)} E I(\tau, x, \varphi, U)$

$R^n$ 上の有界, 一様連続な実数値関数の全体を  $C$  とする ( $\varphi$ ),  
 $\|\varphi\| = \sup_{x \in R^n} |\varphi(x)|$  と順序 " $\varphi \leq \psi \iff \varphi(x) \leq \psi(x) \forall x$ " を与えることにより, Banach lattice になる.

(A.1), (A.2) により,  $\varphi \in C$  ならば,  $Q(t, \cdot, \varphi)$ ,  
 $V(t, \cdot, \varphi)$  も  $C$  に属する.  $C$ 上の作用  $Q(t)$ ,  $V(t)$  を  
 次式により定義する.

$$(1.2) \quad Q(t)\varphi = Q(t, \cdot, \varphi), \quad V(t)\varphi = V(t, \cdot, \varphi)$$

$u$  の response  $\xi^u \in C^u$  rate  $\tau$  killing (= diffusion  
 の推移半群を  $H^u(t)$  とおけば,  $T^u(t)\varphi = H^u(t)\varphi + \int_0^t H^u(s)f^u ds$   
 (=  $E I(t, \cdot, \varphi, u)$ )  $\varphi \in C$ , により与えられる作用  $T^u(t)$   
 は単調縮小半群で, 生成作用素  $G^u$  は

$$G^u \varphi = L^u \varphi - c^u \varphi + f^u, \quad \varphi \in C^2$$

に於て,  $C^2 = \{\varphi \in C; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in C, i, j = 1, \dots, n\}$ .

定理 1. [3].  $Q(t)$  は次の性質をもつ

(Q1) 半群性,  $Q(t+s) = Q(t)Q(s) = Q(s)Q(t)$ ,  $Q(0) = \text{identity}$ .

(Q2) 連続性,  $\|Q(t)\varphi - Q(s)\varphi\| \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow s$

(Q3) 単調性,  $\varphi \leq \psi \Rightarrow Q(t)\varphi \leq Q(t)\psi$

(Q4) 縮小性,  $\|Q(t)\varphi - Q(t)\psi\| \leq \|\varphi - \psi\|$

(Q5)  $Q \in Q(t)$  の生成作用素とすれば,  $\Theta(Q) \supset C^2$ ,  
かつ,

$$(1.3) \quad Q\varphi = \sup_{u \in \Gamma} \mathbb{E}^u \varphi \quad \varphi \in C^2$$

(Q6)  $Q(t)\varphi \geq T^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$

(Q7) 最小性,  $\Lambda(t), t \geq 0$  が  $C$  上の半群 (i.e.,

(Q1) (Q2)  $\varepsilon \leq \delta$ ) で,  $\Lambda(t)\varphi \geq T^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$   
 $\Rightarrow \Lambda(t)\varphi \geq Q(t)\varphi \quad \forall t, \varphi$ .

半群性 (Q1) のヘルムホルツ原理とよばれる 2 段階最適化に他ならない, また, (1.3) がヘルムホルツ方程式に関連している。

(Q7) より, 半群の envelope を次のように定義しよう。

$(S(t), t \geq 0), (\mathbb{H}^u(t), t \geq 0) \quad u \in \Gamma$  は  $C$  上の半群とす。  $S(t)$  が次の (e1), (e2)  $\varepsilon \leq \delta$  を満たすとき,  $(\mathbb{H}^u(t), t \geq 0) \quad u \in \Gamma$  の envelope とする。

(e1)  $S(t)\varphi \geq \mathbb{H}^u(t)\varphi \quad \forall u \in \Gamma$

(e2)  $C$  上の半群  $\Lambda(t), t \geq 0$ , が  $\Lambda(t)\varphi \geq \mathbb{H}^u(t)\varphi$   
 $\forall u \in \Gamma, \Rightarrow \Lambda(t)\varphi \geq S(t)\varphi \quad \forall t, \varphi$ .

定理 2, [4].  $V(t), t \geq 0$  は単調縮小半群で, 生成作用素  $A$  かつ,  $\Theta(A) \supset C^2$  かつ,  $\varphi \in C^2$  のとき

$$(1.4) \quad A\varphi = \max(0, \sup_{u \in \Gamma} \mathbb{E}^u \varphi) = \max(0, Q\varphi)$$

さらに,  $I(t)$  は identity map とすれば,  $(V(t), t \geq 0)$  は  $(T^u(t), t \geq 0)$   $u \in \Gamma$  と  $(I(t), t \geq 0)$  の envelope になる. 同様に,  $(Q(t), t \geq 0)$  と  $(I(t), t \geq 0)$  の envelope と同値である.

## § 2. $V(t)\varphi$ の regularity と自由境界問題.

$V(t)\varphi$  の正めらばさす  $\Sigma$  導くため, 解  $h = \alpha, \gamma, c, f$  は  $x$  について 2 回連続微分可能で, 次の条件を仮定しよう.

(A3) 1 次微分が (A1) (A2) を満たす

(A4) 2 次微分が (A1) を満たし,  $u$  に因して  $x$  の  $h$  が  $\gamma$ -連続,  $x$  に因して  $u$  の連続関数, i. e.

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x', u') \right| \leq K |x - x'|^\alpha + \rho(|u - u'|)$$

(A5) 適当な  $\lambda > 0$  に対し.

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x, u) \theta_i \theta_j \geq \lambda |\theta|^2 \quad \forall x, u, \theta$$

Krylov [1, 2] にしたがって,  $Q(t)\varphi, V(t)\varphi$  の正めらばさすについて次の定理が, 4 行証明できる.

定理 3.  $\varphi \in C^2$  の 2 次微分が  $h$  が  $\gamma$ -連続とす. (A1) ~

(A5) の下で

(i)  $Q(t)\varphi(x), V(t)\varphi(x)$  は  $W_{p,loc}^{1,2}$  に属する.  $\rho$  は

任意に  $\epsilon > 0$  とし、

$$(ii) \quad \forall u \in \Gamma \text{ に対し}$$

$$L^u Q(t) \varphi(x) - C^u(x) Q(t) \varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t) \varphi(x)$$

$$L^u V(t) \varphi(x) - C^u(x) V(t) \varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t} V(t) \varphi(x)$$

は、 $t$  に、 $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  上で本質的に有界。

(iii).  $Q(t) \varphi(x)$  は次の  $\Gamma$  による方程式 (2.1) の  $W_{2n+2, loc}^{1,2}$  における一意解になる。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = \sup_{u \in \Gamma} L^u Q(t, x) - C^u(x) Q(t, x) + f^u(x), & \forall t, x \\ Q(0, x) = \varphi(x) & \forall x \end{cases}$$

たゞし、(2.1) の右辺では、 $Q$  の 1 次微分、2 次微分を固定し、 $u$  に関する supremum をとることにする。

定理 4. 前定理と同じ条件で、 $V(t) \varphi(x)$  は次の自由境界問題 (2.2) の  $W_{2n+2, loc}^{1,2}$  における一意解になる。

$$(i) \quad V(0, x) = \varphi(x) \quad \forall x$$

$$(2.2) \quad (ii) \quad V(t, x) \geq \varphi(x) \quad \forall t, x$$

$$(iii) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \geq \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - C^u(x) V(t, x) + f^u(x), \quad \forall t, x$$

$$(iv) \quad (V(t, x) - \varphi(x)) \left( \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - C^u(x) V(t, x) + f^u(x) \right) = 0, \quad \forall t, x$$

定理4によろ,  $v(t, x) = V(t) \varphi(x)$  は生成作用素  $A$  (= 対する発展方程式の解となることのみある。何故ぞろぞろ,

$$D = \{ (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n; V(t) \varphi(x) = \varphi(x) \}$$

とある。  $D$  は開集合で,  $(0, x) \in D, \forall x$ . さらに,  $V(t) \varphi(x)$  は  $t$  の増大と共にあるから, " $t \leq T(x) \Rightarrow (t, x) \in D, t > T(x) \Rightarrow (t, x) \notin D$ " とある  $T(x) (\leq \infty)$  が定まる。ゆえに, (iv) よろ,  $\forall t, x$  に対し

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = 0 \chi_D(t, x) + \left( \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - c^u(x) V(t, x) + f^u(x) \right) \chi_{D^c}$$

(iii) と  $\frac{\partial V}{\partial t} \geq 0$  を考慮し合めると,  $\forall t, x$  に対し

$$(2.3) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \max \left( \sup_{u \in \Gamma} L^u V(t, x) - c^u(x) V(t, x) + f^u(x), 0 \right)$$

定理4. (iv) の証明の概略を平そろ。 次の不等式 Lemma 1 が有用である。

$A$ ;  $n \times n$  対称行列の値をとる  $\mathbb{F}_t$ -発展的可能な確率過程で,  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t, \omega) \theta_i \theta_j \geq \lambda |\theta|^2 \quad \forall t, \omega, \theta, \quad |A(t, \omega)| \leq k \quad \forall t, \omega.$

$R$ ;  $\mathbb{F}_t$ -発展的可能な  $n$  次元確率過程で,  $|R(t, \omega)| \leq k, \quad \forall t, \omega.$  上の条件をみたす  $(A, R)$  の全体を  $M = M_{k, \lambda}$  とする。

$S = S(0, d) \ni$ ,  $\sigma \in \overline{S}^c$  の hitting time とする。

Lemma 1.

$$W(t, x; h, M, K, \lambda, d) = \sup_{(A, R) \in M} \mathbb{E} \int_0^{(T-t) \wedge \sigma} e^{-\mu s} h(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^s R d\theta) ds$$

と仮定し,  $\mu \geq \frac{1+2K}{n\lambda^2}$ ,  $\rho \geq 2n+2$  のとき

$$\|W\|_{L_p([0, T] \times S)} \leq \|h\|_{L_p([0, T] \times S)} \frac{\tilde{K}}{\mu}$$

ここで  $\tilde{K}$  は  $K, n, \lambda$  のみに依存する定数。

(iv) を示すために, random stopping を導入する。

互に発展的可能な非負有界確率過程の全体を  $\mathcal{R}$  とする。

$r \in \mathcal{R}$  に対し, 次の random stopping を考え,

$$(2.4) \quad P((t, t+dt) \text{ stop} \mid t \leq 1 - \text{stop}(t)) = r(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} dt$$

pay off  $J$  を次式で与える。

$$J(T, x, \varphi, U, r) = \int_0^T I(t, x, \varphi, U) r(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} r(t) dt \\ + I(T, x, \varphi, U) e^{-\int_0^T r(s) ds}$$

すなわち,  $T$  迄の stop を density  $r(t)$  の random stopping で行う。

$\tau$  で停止することは, random stopping の極限とみなす。

§

とすから、実際、次の Lemma 2 が成り立つ。

Lemma 2.

$$V(T)\varphi(x) = \sup_{U \in \mathcal{A}, r \in \mathcal{R}} \mathbb{E} J(T, x, \varphi, U, r)$$

以後簡潔のため、

$$F(t, x, U, h) = L^h h(t, x) - c^h(x) h(t, x) + f^h(x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x)$$

と置く。  $T$  は任意に固定し、  $h(t, x) = V(T-t)\varphi(x)$  とおけば、 Lemma 2 より

$$(2.5) \quad 0 = \sup_{U \in \mathcal{A}, r \in \mathcal{R}} \left( \mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t c(X(s); U, x) + r(s) ds} F(t, X(t); U, x, U(t), h) dt \right. \\ \left. + \mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t c(X(s); U, x) + r(s) ds} r(t) (\varphi(X(t); U, x) - h(t, X(t); U, x)) dt \right)$$

$$D_\varepsilon(T) = \{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n; V(T-t)\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon \}$$

とおけば、  $D_\varepsilon(T)$  は閉集合。ゆえに、  $(0, y) \notin D_\varepsilon(T)$  のとき、  $[0, \Delta] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T)^c$  とある  $\Delta, \delta > 0$  が存在する。

$\tau \in \partial S(y, \delta) \cap$  の hitting time とする。 (2.5) に定理の (iii) を用いると、  $T \in T \cap \tau$  に代えることから、

$x \in S(y, \delta)$  を任意に固定し、  $(U_k, r_k) \in \text{supremum}$  の数列をとる。  $t < \tau$  のとき、  $\varphi(X(t)) - h(t, X(t)) < -\varepsilon$  とあるから、  $F \leq 0$  に注意すれば

$$E \int_0^{T_n \wedge \tau_n} e^{-\int_0^t V_n(s) ds} V_n(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ここで  $\tau_n$  は  $X(t; U_n, x)$  の  $\partial S(y, \delta)$  への hitting time. 同様に

$$(2.6) \quad E \int_0^{T_n \wedge \tau_n} V_n(s) ds \rightarrow 1 \quad \text{in prob.}$$

再び (2.5) (2.6) より

$$(2.7) \quad E \int_0^{T_n \wedge \tau_n} F(t, X(t; U_n, x), U_n(t), h) dt \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

$$M_T(t, x) = \sup_{u \in P} F(t, x, u, V(T-\cdot) \varphi)$$

と仮定し, (iii) と (2.7) より,  $M_T \leq 0$  かつ

$$\sup_{(A, R) \in M} E \int_0^{\Delta \wedge \tau} M_T(t, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

と仮定し,  $T \in T-s$  ( $s < \Delta$ ) に  $\mathcal{F}_{t+s}$  と,

$$V(T-s-t) \varphi(x) \geq V(T-\Delta) \varphi(x) > \varphi(x) + \varepsilon, \quad t+s \leq \Delta, x \in S(y, \delta)$$

同様に,  $[0, \Delta-s] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T-s)^c$ , と仮定し,

同様の計算により

$$\sup_{(A, R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s) \wedge \tau} M_{T-s}(t, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

$M_T$  の定義より,  $M_{T-s}(t, x) = M_T(t+s, x)$  と仮定し

$$\sup_{(A,R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s)\wedge \tau} M_T(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0$$

$M_T \leq 0$  となるから、上式より

$$\sup_{(A,R) \in M} E \int_0^{(\Delta-s)\wedge \tau} \mu e^{-\mu t} M_T(t+s, x + \int_0^t A dB + \int_0^t R d\theta) dt = 0,$$

Lemma 1 より、 $\mu \rightarrow \infty$  とし

$$M_T(s, x) = 0 \quad \tilde{V}(s, x) \in [0, \Delta] \times S(y, \delta)$$

を得る。すなわち、 $\exists \varepsilon < \delta$  なる  $(t, x) \in (T-\Delta, T) \times S(y, \delta)$  なる

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(t) \varphi(x) = \sup_{u \in P} L^u V(t) \varphi(x) - C^u(x) V(t) \varphi(x) + f^u(x).$$

一方、 $\theta > 0$  に対し、 $V(t) \varphi$  の増大性より

$$[0, \Delta + \theta] \times S(y, \delta) \subset D_\varepsilon(T + \theta)^c$$

ゆえに、(2.8) は  $\exists \varepsilon < \delta$  なる  $(t, x) \in (T-\Delta, T+\theta) \times S(y, \delta)$

なる  $(T, y)$  は  $V(T) \varphi(y) > \varphi(y) + \varepsilon$  となる位置の存在

を示すから、 $\varepsilon \searrow 0$  とし、(iv) を得る。

### Reference

1. N. V. Krylov, The control of the solution of a stochastic integral equation  
Th. Proba. Appl. 17 (1972), 114-131
2. Some estimates of the probability density of a stochastic  
integral, Math. USSR. Izv. 8 (1974) 233-254.
3. M. Kisio, On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroup  
Proc. Int. Symp. S.P.E. Kyoto 1976 297-325
4. On nonlinear semigroup associated with optimal stopping for  
Markov processes, Appl. Math. Opt. 4 (1978) 143-169.