

コンパクトリーマン面上のブラウン運動の道々の homological behavior

阪大 教養 眞鍋 昭治郎

§1. 問題の設定と定理

(M, g) を, 二次元コンパクト, 連結, 向きづけ可能な C^∞ リーマン多様体で, その種数を, $k (\geq 1)$ とする。以下, 等温座標をとって M をリーマン面と見なす。 X を M 上のブラウン運動, 即ち, その local generator が, $\Delta/2$ ($\Delta =$ ラプラス・ベルトラミ作用素) なる M 上の拡散過程とする。 $A_1, \dots, A_{2k}$ を, M の標準ホモロジー基底とする (但し, A_i と A_{k+i} は, 丁度 1 回交わり, 他は交わらないようにする ($i=1, \dots, k$)). X の道 $t \mapsto X_t$ に対して, $X[0, t] = \{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ とおく。 $X[0, t]$ のホモロジー的な性質を調べるのが, このノート の目的である。そのため 次 のように問題を設定する。

任意の $x, y \in M$ を与えたとき, $\varphi_{x,y}(0) = x$, $\varphi_{x,y}(1) = y$ となる滑らかな曲線 $\varphi_{x,y}$ でどの A_i ($1 \leq i \leq 2k$) とも交わらないもの をとって固定し, $C = \{\varphi_{x,y} \mid x, y \in M\}$ とおく。 $X[0, t]$ の

終点と始点を $q_{X(t), X(0)} \in C$ で結んで得られる閉曲線を $\bar{X}[0, t]$

とすると, これは, $A_1, \dots, A_{2k}$ を用いて

$$\bar{X}[0, t] = \sum_{i=1}^{2k} x_i(t) A_i, \quad x_i(t) : \text{整数}$$

と表わされる (等号は, 両辺が "ホモローク" を意味する)。

$(x_1(t), \dots, x_{2k}(t))$ を, Arnold-Avez [1] に従って $X[0, t]$ の "ホモロジー的位置" と呼ぶ。ここで問題にするのは, この $t \rightarrow \infty$ の時の漸近的挙動である。以下でこれが, M の Abelian covering surfaces の型問題と関係していることを述べる。

N を, $1 \leq N \leq 2k$ なる自然数, $1 \leq i_1 < \dots < i_N \leq 2k$,

$I = (i_1, \dots, i_N)$ とする。

定義 X が, $(A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ にホモロジー的に巻きつく

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^N x_{i_\lambda}(t)^2 = \infty, \quad P_x\text{-a.s.}$$

結果は, 次の通り。

定理 X が, $(A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ にホモロジー的に巻きつくための必要十分条件は, $N \geq 3$ 。

注意 1. $x_i(t)$ は, $\bar{X}[0, t]$ が, A_{i+t} と交わる回数を示していると考えられる ([5] 参照)。

注意 2. (ホモトピー的な巻きつき方の比較) $\pi_1(M)$ の generator を, $(a_1, \dots, a_{2k})$ とする。 $\bar{X}[0, t] = a_{j_1}^{e_1} \dots a_{j_n(t)}^{e_n(t)}$,

($\varepsilon_i = \pm 1$) とホモトピーの意味で書き表わしたとき,

$$l(t) = \min \{ n(t); \bar{X}[0, t] = a_{j_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{j_{n(t)}}^{\varepsilon_{n(t)}} \}$$

とおいて, $l(t)$ を $X[0, t]$ の長さと呼ぶことにする。 X が,

$(A_1, \dots, A_{2k})$ をホモトピー的に巻きつくというとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty$, P.R.S.

で定義すれば, 次が成立: X が, $(A_1, \dots, A_{2k})$ にホモトピー的に

巻きつく $\Leftrightarrow k \geq 2$.

§2. $x_i(t)$ の表現

$\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(2k)}$ を, 調和一次微分型式で,

$$\int_{A_j} \alpha^{(i)} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2k$$

となるものとする。そうすれば,

$$x_i(t) = \int_{X[0, t]} \alpha^{(i)} + \int_{\varphi_{X(t), X(0)}} \alpha^{(i)},$$

ここで, 右辺の1項は, $\alpha^{(i)}$ の X の path に沿う積分を表わす

([2])。この時, 次のことが容易にわかる。

Lemma 1 $\int_{\varphi_{X(t), X(0)}} \alpha^{(i)}$ は, t, ω について有界。

Lemma 2 α を, 調和一次微分型式とすると,

(i) $\int_{X[0, t]} \alpha$ は, マルチンゲール,

(ii) $\int_{X[0, t]} \alpha$ は, $X[0, t]$ のホモロジー類のみに依存する。

この2つの lemma を用いると、次の命題は直ちにわかる。

命題 $m(dx)$ を、 M の体積要素とすると、

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = - \frac{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = \left(\int_M \langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(i)} \rangle(x) m(dx) \right)^{1/2}$$

従って、特に、§1の定理が、 $N=1$ の場合は、示せたことになる。

§3. Covering motion との関係

この節からあとでは、 $2 \leq N \leq 2n$ とする。 $\tilde{Y}^{(i)}(t)$, $\tilde{Y}_I(t)$ を、それぞれ

$$\tilde{Y}^{(i)}(t) = \int_{X[0,t]} \alpha^{(i)}, \quad \tilde{Y}_I(t) = (\tilde{Y}^{(1)}(t), \dots, \tilde{Y}^{(N)}(t))$$

で定義する。

まず I に応じた M の被覆面 $\tilde{M}(I)$ を定義する。 $x_0 \in M$ を固定する。関数 $M \ni x \mapsto \left(\int_{x_0}^x \alpha^{(1)}, \dots, \int_{x_0}^x \alpha^{(N)} \right)$ (積分路は、 N 個の積分について同じものを用いる) は、 M 上の関数としては多価関数。これを、一価にする M の最小の被覆面を $\tilde{M}(I)$ とする。 $\pi_I: \tilde{M}(I) \rightarrow M$ を自然な射影とする。 $\tilde{M}(I)$ は、不分岐、正規な M の被覆面であるから、 X の covering motion を次のように定義できる (Itô-McKean [3] 参照)。

定義 (covering Brownian motion) $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}(I)$ を、 $\pi_I(\tilde{x}_0) = x_0$ なるものとして固定。 X_t の $\tilde{M}(I)$ への持ち上げで、 $\tilde{x}_0$ から出発するものがただ一つ決まるから、これを $\tilde{X}_t$ として $\tilde{M}(I)$ 上の

ブラウン運動と呼ぶ。 $\pi_I(\hat{X}_I(t)) = X(t)$ が成立。

次に、今定義した $\hat{X}_I$ と、 $\tilde{Y}_I$ の関係を、調べる。

γ を、 $x_0(\in M)$ から出発する M の曲線とし、 $\tilde{\gamma}$ を、 $\tilde{x}_0(\in \tilde{M}(I))$ から出る γ の持ち上げとする ($\pi_I(\tilde{x}_0) = x_0$)。

$$\Psi_I(\gamma) = \left(\int_{\gamma} \alpha^{(1)}, \dots, \int_{\gamma} \alpha^{(N)} \right)$$

を考える。容易に次のことがわかる。

$$\text{Lemma 3. (i) } \Psi_I(\gamma) = \left(\int_{\tilde{\gamma}} \pi_I^* \alpha^{(1)}, \dots, \int_{\tilde{\gamma}} \pi_I^* \alpha^{(N)} \right) \text{ かつ}$$

この右辺の値は、 $\tilde{\gamma}$ の終点 $\tilde{x}$ のみによって定まる。

$$\text{(ii) この値を、} \Phi_I(\tilde{x}) \text{ と書くと、} \Phi_I \text{ は、} 1:1 \text{。}$$

こうして定まった Φ_I を用いると、次の命題が証明できる。

$$\text{命題} \quad \tilde{Y}_I(t) = \Phi_I(\tilde{X}_I(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

証明は、 $X[0, t]$ を滑らかな曲線 γ_m で、一様近似すれば、§2 の Lemma 2 を用いていえる。

この命題とその直前の Lemma によって、

Lemma 4. X が、 $(A_1, \dots, A_N)$ にホモロジー的に巻きつくための必要十分条件は、 $\tilde{X}_I$ が、transient であることである。

§4. $\tilde{M}(I)$ の型問題

§3 の最後の Lemma 4 によって、問題が、 $\tilde{X}_I$ の transience に

帰着されたが, $\tilde{X}_I$ の transience, recurrence の問題は, 実は次のようにして $\tilde{M}(I)$ の型問題と同等であることが示される。

最初に, $\tilde{M}(I)$ の型を定義する。

定義. $\tilde{M}(I)$ が放物型 ($\tilde{M} \in O_G$ と書く) $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \tilde{M}(I)$ 上の有限なグリーン関数は, 存在しない。

$\tilde{M} \notin O_G$ のとき, $\tilde{M}(I)$ は, 双曲型という。

Lemma 5. $\tilde{M}(I) \notin O_G$ のための必要十分条件は, $\tilde{X}_I$ が transient であることである。

この結果は, 単連結なリーマン面の場合には, 既に角谷 [4] によって示されている。

このように問題は, $\tilde{M}(I)$ の型を決めることに帰着されたが, $\tilde{M}(I)$ の型は, A. Mori [7] によって次のように決定されている。

定理 (A. Mori) $\tilde{M}(I) \in O_G$ のための必要十分条件は, $N \leq 2$.

我々の定理は, Lemma 4, 5 及び Mori の定理より従う。

§5. ある種のフックス群の Poincaré 級数の収束・発散との関係
以下では, 種数 $g \geq 2$ とする。この時, M は, 基本領域がコンパクトなフックス群 Γ を用いて, $M \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ は上半平面, $\cong$ は, 等角同値を表わす) となる。又, $\tilde{M}(I)$ は,

$\tilde{M}(I) \cong \tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{H}$, $\tilde{\Gamma}$ は, Γ の正規部分群 となる。

M 及び $\tilde{M}(I)$ のブラウン運動は, $\mathcal{H}$ 上のブラウン運動から構成できる。それらの推移確率密度を, p 及び $\tilde{p}_I$ とすれば, $\mathcal{H}$ 上のそれを $\hat{p}$ として,

$$p(t, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{p}(t, \hat{x}, \gamma \hat{y}) \quad (\pi(\hat{x}) = x, \pi(\hat{y}) = y)$$

$$\tilde{p}_I(t, \hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} \hat{p}(t, \hat{x}, \gamma \hat{y})$$

で与えられる。 $\tilde{M}(I)$ のグリーン関数が $\int_0^\infty \tilde{p}_I(t, \hat{x}, \hat{y}) dt$ で与えられることと, $\hat{p}$ の具体的な形を用いれば, 次の結果を示すことがでる ($\tilde{M}(I) \in O_q$ の条件の言い換え)。

命題. $\sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} \|\gamma\|^{-2} = \infty \iff N = 2$

ただし, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$, $\|\gamma\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

特に, $I = (1, 2, \dots, 2k)$ のときは, $\tilde{\Gamma} = [\Gamma, \Gamma]$ (交換子群)

で, $\sum_{\gamma \in [\Gamma, \Gamma]} \|\gamma\|^{-2} < \infty$ ($k \geq 2$) が成り立つ。

注意 McKean は, $M = \mathbb{R}^2 - \{0, 1\}$ の場合について同じ問題を扱っている ([6] 参照)。

文 献

[1] Arnold - Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique

- [2] Ikeda-Manabe : Integral of differential forms along the path of diffusion process , Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979) 827-852.
- [3] Ho-McKean : Diffusion processes and their sample paths.
- [4] Kakutani : Random walk and the type problem of Riemann surfaces , Contribution to the theory of Riemannian surfaces , p. 95-101.
- [5] Manabe : On the intersection number of the path of a diffusion and chains , Proc. Japan Acad. 55 (1979) 23-26.
- [6] McKean : Stochastic integrals
- [7] Mori : A note on unramified abelian covering surfaces of a closed Riemann surface , J. Math. Soc. Japan 6 (1954) 162-176.