数理解析研究所講究録
391巻 1980年 24-37

確率微分方程式と微分同相写像

阪大 理学部　　池田信行

1。<u>序</u>。　なめらかな多様体上の確率微分方程式は係数を与えるベクトル場とランダムな力を与える semi-martingale の組によって定まる。その解は初期条件とその semi-martingale を変数とする汎関数になる。解の定める拡散過程の測度は良く研究されているが，近年汎関数そのものの構造が注目されて来ている。この考察から対応する拡散過程について一歩進んだ研究が進められている。こゝではそれらについて，2，3の注意を与えるのが目的である。

2。<u>確率微分方程式とリー代数</u>。　M は σ-compact, connected な d 次元 C^∞ 多様体で，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ は M 上の完備な C^∞ なベクトル場とする。$[0,\infty) \longrightarrow M$ なる連続写像 w の作る空間を $W(M)$ とする。同様に $[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ なる連続写像 w の作る空間を W^m とする。これは通常の距離で完備可分な距離

空間になる。W^mの位相的なσ-fieldを$\mathcal{F}$とし，確率Pは$\{W^m, \mathcal{F}\}$上のWiener測度とする。確率空間$\{W^m, \mathcal{F}, P\}$上で確率微分方程式

$$(1) \qquad dX_t = \sum_{j=1}^{m} A_j \circ dw_t^j$$

を考える。この意味はM上の任意のC^∞関数fに対して

$$(2) \qquad df(X_t) = \sum_{j=1}^{m} (A_j f)(X_t) \circ dw_t^j$$

が成立することである。こゝで$\circ$はStratonovichの対称な確率微分を表わす。任意の$x \in M$を初期条件とする(1)の解$X(t, w; x)$が存在することが知られている。事情を簡単にするためにつぎの仮定が常に成立するとする。

仮定1。任意の$t \in [0, \infty)$に対して$X(t, w; x) \in M$。すなわち$[t \longmapsto X(t, w; x)] \in W(M)$とする。

注意。一般のMの場合にこの仮定1.がみたされる条件を$A_1, A_2, \cdots, A_m$の言葉で具体的に表わすのは必ずしも簡単ではない。しかし多くの場合充分条件が知られている。

Pに関し殆んどすべてのwに対して写像

$$(3) \qquad W^m \ni w \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

$$\text{(4)} \qquad W^m \ni w \longmapsto [t \longmapsto X(t,w;x)] \in W(M)$$

$$\text{(5)} \qquad M \ni x \longmapsto X(t,w;x) \in M$$

が定まるが，こゝでは (4)，(5) の写像に特に注目する。最も簡単なのは次の例の場合である。こゝで $\mathfrak{g}=\mathcal{L}(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ は $A_1,A_2,\cdots,A_m$ の生成するリー代数とする。

例．2.1．（Doss [2]）。$M=\mathbb{R}^d$，$\mathfrak{g}$ が Abelian の場合。いま

$$A_i=\sum_{j=1}^{d}A_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i=1,2,\cdots,m,$$

とおけば全微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial \beta^i}h^j(\alpha,\beta)=A_i^j(h(\alpha,\beta)), \qquad 1\le i\le m,\ 1\le j\le d,\ \alpha\in\mathbb{R}^d,\ \beta\in\mathbb{R}^m$$

が完全積分可能になり，

$$X(t,w;x)=h(x,w_t)$$

となる。これより (4)，(5) の写像のこの場合の性質が容易にわかる。例えば (4) の写像は W^m の連続写像になっている。

(4) の写像の W^m 上の連続性は一般に成立しないことは，McShane [15] によって指摘されている。その事情は次の例で知ることが出来る。

例。2.2。（McShane [15]，Gaveau [5]）。Heisenberg 群の場合。$H_{2n+1}=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ の座標を $(z,\eta)=(z^1,z^2,\cdots,z^n,\eta)$，$z^j=x^j+\sqrt{-1}\,y^j$ とし，

積を $(z,\eta)(z',\eta')=(z+z',\ \eta+\eta'+2\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n} z^j\overline{z'^j})$ で定めると, 2-step の巾零群になる。その時不変なベクトル場

(6) $\quad A_{2j-1}=\frac{\partial}{\partial x^j}+2y^j\frac{\partial}{\partial\eta},\quad A_{2j}=\frac{\partial}{\partial y^j}-2x^j\frac{\partial}{\partial\eta},\quad Y=\frac{\partial}{\partial\eta},\quad j=1,2,\cdots,n$

が得られる。この $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ に対する方程式(1) ($m=2n$) の解はつぎの形で与えられる。

(7)
$$X^i(t,w;0)=w_t^i,\quad i=1,2,\cdots,2n,\qquad X^{2n+1}(t,w;0)=4\sum_{j=1}^{n}S_t^{2j-1,2j}(w)$$
$$S_t^{2j-1,2j}(w)=\frac{1}{2}\int_0^t(w_s^{2j}\circ dw_s^{2j-1}-w_s^{2j-1}\circ dw_s^{2j})\ .$$

この $S_t^{2j-1,2j}(w)$ は (w_s^{2j-1}, w_s^{2j}), $0\le s\le t$, より定まる確率積分と呼ばれ, W^m 上で連続でない。その証明については例えば Ikeda-Nakao-Yamato [7] 参照。

これらの例は写像(4)や(5)の考察に $\mathfrak{g}$ の代数的性質が重要な役割を持つことを示している。この考えを推進するのに役に立つのは重川[48]によって具体的に指摘された次の事実である。いま connected なリー群 G が M 上に変換群として effective に作用しているとする。G の右不変なベクトル場の生成するリー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ に対して M 上のベクトル場の生成するリー代数 $\mathfrak{g}$ が自然に対応する。それは $\tilde{\mathfrak{g}}$ の元 $\tilde{A}$ に対して M 上の1径数変換群が定まるので, それより M

上のベクトル場 A が定まる。この対応で $\tilde{\mathfrak{g}}$ と $\mathfrak{g}$ の間の同型が得られる。いま $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathfrak{g}$ に対して，$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_m \in \tilde{\mathfrak{g}}$ が対応しているとする。このとき

(I) G 上の確率微分方程式，

(8) $$dg_t = \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i \circ dw_t^i \quad , \quad g_0 = e$$

(II) M 上の確率微分方程式，

(9) $$dx_t = \sum_{i=1}^{m} A_i \circ dw_t^i \quad , \quad x_0 = x$$

を考える。この２つの方程式の解について

命題。1。（室川[18]）。殆んどすべての w に対して，t を固定すれば写像

(10) $$M \ni x \longmapsto X(t, w; x) \in M$$

が M の微分同相写像になっている。さらにそれは (8) の解 $g(t, w)$ である．すなわち

(11) $$X(t, w; x) = g(t, w)x$$

となる。

ところが方程式 (1) を考える時，もし

仮定。2。 $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(A_1, A_2, \cdots, A_{2m})$ が有限次元，

がみたされているならば—群論の結果より，先に述べた形

のリー群が存在することが知られている。したがって命題1が使えることになり，確率微分方程式(1)の構造はリー群上の確率微分方程式で決定されることがわかる。さらに(8)の形の解より定まる拡散過程は群上で考えて加法過程になっていることも知られている（McKean[4]参照）。

注意。このように多様体上の確率微分方程式を微分同相写像の値をとる確率微分方程式に帰着して考察する試みは，仮定2がみたされない場合にも，たとえば M が compact の時に Elworthy[3] によって行われている。そこでは微分同相写像の全体が写像の合成について作る群を用いている。

このようにして，仮定2の下ではリー群上の確率微分方程式の考察が基本であることがわかったが，その時つぎの事実が有効に使える。

connected なリー群 G_1, G_2 があり，G_1 は simply connected とする。さらに G_i, $i=1,2$, の右不変なベクトル場の生成するリー代数を $\mathfrak{g}_i$, $i=1,2$, とする。いま $\alpha : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ なる準同型が存在するとする。その時準同型 $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ で $\varphi_* = \alpha$ となるものが存在する。いま確率微分方程式

(12) $$dX_t = \sum_{i=1}^{m} A_i \circ dW_t^i, \qquad A_i \in \mathfrak{g}_1, \quad i=1,2,\dots,m$$

(13) $$dY_t = \sum_{i=1}^{m} \alpha(A_i) \circ dW_t^i$$

をそれぞれ G_1, G_2 上で考えるとき，つぎのことが成立する。

命題 2。$x \in G_1$ なる値に対して，$X_0 = x$ をみたす (12) の解を $X(t, w; x)$，$y \in G_2$ に対し，$Y_0 = y$ なる (13) の解を $Y(t, w; y)$ とする，そのとき

$$(14) \qquad Y(t, w; \varphi(x)) = \varphi(X(t, w; x))\ 。$$

この事実より，リー群でしかも simply connected な場合に考えれば本質的には構造が定まってしまうことがわかる。

3。<u>巾零なリー代数の場合</u>。仮定2がみたされる典型的な場合が巾零の場合である。しかも simply connected な場合を考えればよい。すなわち，m 生成元の p-step 自由巾零リー代数 $\mathfrak{N}_{m,p}$ の場合を任意の p に対して考えるとよい。(この概念については Jacobson [8]，Rothschild-Stein [17] 等参照)。通常のリー群論と話をそろえるためにリー代数はリー群の左不変なベクトル場より生成されるように，この節では考える。その時

$$(15) \qquad \mathfrak{N}_{m,p} = \sum_{i=1}^{p} \oplus V^i$$

ここで，V^1 の基を $A_1, A_2, \cdots, A_m$ とし，各 V^i は

$$[A_{j_1}[A_{j_2} \cdots [A_{j_{i-1}}, A_{j_i}]] \cdots], \quad j_1, j_2, \cdots, j_i = 1, 2, \cdots, m$$

で生成される。$N_{m,p}$ はリー代数 $\mathfrak{n}_{m,p}$ を持つ simply connected な connected リー群とし，その上に確率微分方程式

(16) $$dg_t = \sum_{i=1}^{m} A_i(g(t))\circ dW_t^i$$

を考える。この解については $p=2$ の時 Gaveau [5] により，一般の p に対しては Yamato [20] によって詳細に考察されている。それはこれまで述べた方針によれば次の形になる。

いま $E=\{1,2,\dots,m\}$，$E[1,\infty)=\{(i_1,\dots,i_a)\,;\,i_1,\dots,i_a\in E,\ 1\le a<\infty\}$ $E[1,p]=\{(i_1,i_2,\dots,i_a)\in E[1,\infty)\,;\,1\le a\le p\}$，$(\mathcal{A}_E,\tau)$ を E の生成する自由代数，$(\mathcal{L}_E,\tau')$ を E の生成する自由リー代数とする。$E[1,\infty)\ni I=(i_1,i_2,\dots,i_a)$ に対し $[I]\in\mathcal{L}_E$ を

(17) $$[i_1 i_2\cdots i_a]=[[i_1 i_2\cdots i_{a-1}],i_a]\ ,\quad [i]=i\in E$$

で定める。$[I]$, $I\in E[1,p]$, の生成する $\mathcal{L}_E$ の部分空間を $\mathcal{L}_{E[1,p]}$ とする。この時 $S\subset E[1,p]$ で $\{[I],I\in S\}$ が $\mathcal{L}_{E[1,p]}$ の基となるものが少くとも1つとれる。いま $I=(i_1,\dots,i_a)\in E[1,\infty)$ に対し

$$A_{[I]}=[\cdots[[A_{i_1},A_{i_2}]\cdots]A_{i_a}]$$

とおけば，

(18) $$\mathbb{R}^{\#S}\ni\{u^{[I]}\,;\,I\in S\}\longrightarrow \exp\{\sum_{I\in S}u^{[I]}A_{[I]}\}\in N_{m,p}$$

によって $N_{m,p}$ に座標が定まる。この座標を用いて，(16) の解 $g_t(w)$ を $g_t(w)=(\xi_t^{[I]}\,;\,I\in S)\in\mathbb{R}^{\#S}$ と表わせ

ば

$$(19)\quad d\xi_t^{[I]} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{i, I_1, \dots, I_{k-1} \in \mathcal{S} \\ |I_1|+\cdots+|I_{k-1}|=|I|-1}} K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k-1}])\, \xi_t^{[I_1]} \cdots \xi_t^{[I_{k-1}]} \circ dW_t^i$$

が成立する。こゝで $|I|$ は $I\in\mathcal{S}$ の長さを表わす。また係数 $K^{[I]}(k, i; [I_1], \dots, [I_{k-1}])$ は Campbell-Hausdorff の公式を用いて具体的に決定される定数である。よって，$\{\xi_t^{[I]}; |I|\leq g\}$ がわかると，それらの積の確率積分の一次結合として，$\xi_t^{[I]}$，$|I|=g+1$ が求まる。また $\mathfrak{g}$ が step p の巾零リー代数で対応するリー群を G とする。その時は準同型 $\alpha : \mathcal{N}_{m,p} \longrightarrow \mathfrak{g}$，準同型 $\varphi : N_{m,p} \longrightarrow G$，$\varphi_* = \alpha$ に対して

$$(20)\quad \varphi\Big(\exp\Big\{\sum_{I\in\mathcal{S}} \xi_t^{[I]} A_{[I]}\Big\}\Big) = \exp\Big\{\sum_{I\in\mathcal{S}} \xi_t^{[I]} A_{\alpha([I])}\Big\}$$

となるので，2節の命題2を用いると $\mathfrak{g}$ に対応する確率微分方程式の解は $\mathcal{N}_{m,p}$ の場合の解よりきわめて単純な方法で得られる。

特に $p=2$ ならば $\mathcal{S}=\{1, 2, \dots, m, (1,2), (1,3), \dots, (1,m), (2,3), (2,4), \dots, (2,m), \dots, (m-1,m)\}$ ととることが出来るので，

$$(21)\quad \begin{cases} d\xi_t^{[J]} = dW_t^J, & |J|=1 \text{ の時} \\ d\xi_t^{[J]} = \frac{1}{2}(W_t^i \circ dW_t^j - W_t^j \circ dW_t^i), & J=(i,j) \text{ の時}, \end{cases}$$

となり、Gaveau[5]の結果が得られる。Heisenberg群の時の例2.2に述べたことは、(20),(21)より容易に導かれる。

またKaplan[9]は2-step巾零で2次形式に関連して定まるリー代数のあるクラスについて、対応するラプラス作用素の基本解を求めているが、この場合も(20),(21)を用いて確率微分方程式によって考察することが出来る。逆に解のみたすべき性質によって、Kaplanが考えたクラスを特徴づけることも出来る。

注意。重川[18]，国田[10]で論じられている解の分解に関する公式を用いると、仮定2の下でもっと一般の場合の考察が出来る。たとえば国田[10]は $\mathfrak{g}$ が可解の場合を論じている。

4. <u>近似論.</u> $\mathfrak{g}=\mathcal{L}(A_1,A_2,\dots,A_m)$ が有限次元の時はこれまで述べたように、リー群上の確率微分方程式の解により、微分同相写像の値をとる加法過程に帰着された。しかもその構造も具体的に解明されることが多い。この内容を $\mathfrak{g}$ が有限次元でない時に研究することは興味深いことである。既に述べたようにElworthy[3]はその1つの方法を提供している。Mがコンパクトな時は大森[16]でも研究している([4]参照)。とくにこの問題を系統的に追求しているのはMalliavinで、たとえば[12],[13]等で考察している。彼の考えは確率微分方

程式 (1) でブラウン運動 w を適当に近似した w_n でおきかえ常微分方程式系を得ることを基礎にしている。この近似 w_n に対応する方程式の解 $X_n(t,w;x)$ は近似が全く一般では $X(t,w;x)$ に収束しないことは既に述べたが，適当な近似をとれば収束することも知られている。しかも近似の段階で目的の性質を示すことは比較的容易に出来る。そこで $X_n(t,w;x)$ の持っている性質の極限移行として $X(t,w;x)$ の性質を示そうとするのが Malliavin [12] [13] の方法である。$M=\mathbb{R}^d$ の場合には，この Malliavin の考えに詳細な証明が Ikeda-Watanabe [6] で与えられている。そこでは $M=\mathbb{R}^d$ とし，例えば $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の係数が1次の増大度で，すべての次数の偏微分が有界の時に，任意に t を固定すると，a.a w (P) に対して

$$(22) \qquad \mathbb{R}^d \ni x \longmapsto X(t,w;x) \in \mathbb{R}^d$$

が微分同相写像になることを示している。最近 Bismut [1] は a.a w (P) に対して，任意の t に対して (22) が微分同相写像になることを上の結果より導く方法を与えている。

なお Ikeda-Watanabe [6] で示した近似の方法による時は，単に収束を示すだけでなく，特定の性質が保存されるような収束であることを示す必要がある。そのために近似についての結果についても新たな考察をすることが必要である。たと

えば

$$(23)\qquad w_n(t) = n\left[\left(\frac{j+1}{n}-t\right)w\left(\frac{j}{n}\right) + \left(t-\frac{j}{n}\right)w\left(\frac{j+1}{n}\right)\right], \qquad \frac{j}{n}\le t \le \frac{j+1}{n}$$

に対して、

$$(24)\qquad \frac{dX_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} A_i(X_n(t))\frac{dw_n^i}{dt}(t)$$

の解で初期条件 x のものを $X_n(t,w;x)$ とする。そのとき、任意に固定した T と N に対して

$$(25)\qquad \sup_{|x|\le N}\ \sup_{n} E\left[\sup_{0\le t\le T}\|D^{\alpha}X_n(t,w;x)\|^p\right] < \infty, \qquad p\ge 2$$

を示す必要がある。こゝで D^{α} は multi-index α に関する偏微分を表わす。(24) の形の近似の特徴として、$X_n(t,w;x)$ およびその微分が $X(t,w;x)$ およびその微分に収束する証明の評価で直接的なマルチンゲール不等式の使用だけでなく工夫を要する部分があるが、(25) の評価では特にそれらの工夫が重要になる。

a.a.w に対して、任意の t に対して (22) の写像が微分同相写像であることを示す時の onto, 1対1 の部分の証明に Varadhan [19] は最近新たな考えを提出した。彼の考えは R^d を一点コンパクト化し、∞ での連続性を確かめることと、伊藤の公式より導かれる $X(t,w;x) - X(t,w;y)$ のノルムの巾の平均に関する評価の不等式を基礎にしている。国田 [11] はこの

表示を用いて、係数がなめらかでない時に位相同型の問題を論じている。

一般にここでの問題を論ずることは、関連の問題もこめて未解明な点が多い。

[1] Bismut, 未発表。

[2] H. Doss, Liens entre équations differéntielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1977).

[3] K. D. Elworthy, Stochastic dynamical systems and their flows, Stochastic Analysis ed. by A. Friedman and M. Pinsky 79-95. 1978.

[4] T. Funaki. Construction of a solution of random transport equation with boundary condition, J. Math. Soc. Japan 31 (1979)

[5] B. Gaveau, Principle de moindre action, propagation de la chaleur ét estimées sous elliptiques sur certain groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977)

[6] N. Ikeda - S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, 講談社, 近刊。

[7] N. Ikeda, S. Nakao and Y. Yamato, A class of approximations of Brownian mation. Publ. RIMS., Kyoto Univ. 13 (1977).

[8] N. Jacobson, Lie Algebras, Intersience. Publ.

[9] A. Kaplan, Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of guadratic forms. Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980).

[10] H. kunita, On the representation of solutions of stochastic differential equation. Lecture Notes, No. 784, 1980.

[11] H. Kunita, 1980年 阪大集中講義.

[12] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, ed. by K. Itô, 1978.

[13] P. Malliavin, C^k-hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. A. Friedman and M. Pinsky, 1978.

[14] H. P. McKean, Stochastic integrals. Academic Press, 1969.

[15] E. J. McShane, Stochastic differential equations and models of randon processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1972.

[16] H. Omori, Symp.の報告。

[17] L. P. Rothschild and E. M. Stein. Hypoelliptic differential operators and miplotent groups Acta Math. 137 (1977).

[18] I. Shigekawa : 阪大確率論セミナー報告, 1980.

[19] S. R. S. Varadhan : 未発表（阪大における討論）。

[20] Y. Yamato, Stchastic differential equations and nilpotent Lie algebras, Z. Wahr. Geb. 47 (1979).