数理解析研究所講究録
392巻 1980年 64-73

代数曲面の対数的 i 種数について

東大 理　倉本義之
東大 理　角田秀一郎

Sを複素数体$\mathbb{C}$上で定義された非特異代数曲面とする。Sの非特異完備化$\bar{S}\supset S$を$D=\bar{S}-S$が$\bar{S}$上の正規交叉型因子となるようにとる。Sの対数的i種数$\bar{P}_i(S)$, 対数的小平次元$\bar{\kappa}(S)$は次のように定義される：

$\bar{P}_i(S)=\dim H^0(\bar{S}, i(K_{\bar{S}}+D))$, $\bar{\kappa}(S)=\kappa(K_{\bar{S}}+D, \bar{S})$。

これらは$\bar{S}$, Dのとり方によらずに定まる。（[1]）とくに$\bar{P}_1(S)=\bar{p}_g(S)$とかき対数的種数という。

ここでは次の問題を考える。

問題　$\bar{\kappa}(S)\geq 0 \Rightarrow \bar{P}_i(S)\geq 1$ なるSによらない最小のiを求めよ。

Sがコンパクトのときは$i=12$でよいことはよく知られている。

前半ではSの対数的不正則数$\bar{q}(S)=\dim H^0(\bar{S}, \Omega^1_{\bar{S}}(\log D))$が正である場合を考える。このとき次の結果が成り立つ。

定理1　$\bar{\kappa}(S)\geq 0$, $\bar{q}(S)\geq 1$ ならば, $\bar{P}_{12}(S)\geq 1$ (詳しくは $\bar{P}_4(S)\geq 1$ または $\bar{P}_6(S)\geq 1$) である。

$\bar{q}(S)\geq 1$ とすると, S の quasi-Albanese 写像 $\alpha: S\to B\subset\tilde{\mathcal{A}}_S$ が考えられる。ここに $\tilde{\mathcal{A}}_S$ は S の quasi-Albanese variety, B は $\alpha(S)$ の $\tilde{\mathcal{A}}_S$ 内での closure とする。$\dim B=2$ ならば $\bar{p}_g(S)\geq 1$ となるので $\dim B=1$ としてよい。このとき, B は非特異で $\bar{\kappa}(B)\geq 0$ であり, α の一般ファイバーは既約である。(quasi-Albanese 写像については [2] を参照)　$\bar{\kappa}(S)\geq 0$ だから $\bar{\kappa}$(αの一般ファイバー) ≥ 0 である。そこで, 定理1を示すためには次の定理を示せばよいことがわかる。

定理2　$f: S\to\Delta$ を非特異代数曲面 S から非特異代数曲線 Δ への全射正則写像とし, その一般ファイバーは既約とする。$\bar{\kappa}(\Delta)\geqq 0$, $\bar{\kappa}$(fの一般ファイバー)$\geqq 0$ とすると, $\bar{P}_4(S)\geqq 1$ または $\bar{P}_6(S)\geqq 1$ である。

以下定理2の証明の概要を述べる。

fの一般ファイバーを C_w とかく。S, Δ の非特異完備化 $\bar{S}$, $\bar{\Delta}$, 全射正則写像 $\bar{f}: \bar{S}\to\bar{\Delta}$ を次の図式が可換になるようにとる。

$$\begin{array}{ccc} \bar{f}: & \bar{S} & \longrightarrow & \bar{\Delta} \\ & \uparrow & & \uparrow \\ f: & S & \longrightarrow & \Delta \end{array}$$

一般に $\overline{P}_i(S) \geqq P_i(\overline{S})$ であるから，コンパクトな場合の結果により，$\overline{S}$ が線織面または有理曲面の場合を考えればよい。従って，$\overline{f}$ の一般ファイバーを $\overline{C_w}$ とすれば，$\kappa(\overline{C_w})=-\infty$ または $\kappa(\overline{\Delta})=-\infty$ の場合を考えればよい。そこで $\kappa(\overline{C_w})$, $\kappa(\overline{\Delta})$, $\overline{S}$ の不正則数 $q(\overline{S})$ の値に応じたいくつかの場合に分けて考える。まず各場合の結果をまとめておく。

① $\kappa(\overline{C_w})=-\infty$, $\kappa(\overline{\Delta})=-\infty \Rightarrow \overline{P}_2(S) \geqq 1$ 。

② $\kappa(\overline{C_w})=-\infty$, $\kappa(\overline{\Delta})=0 \Rightarrow \overline{P}_2(S) \geqq 1$ 。

③ $\kappa(\overline{C_w})=-\infty$, $\kappa(\overline{\Delta})=1 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geqq 1$ 。

④ $\kappa(\overline{C_w}) \geqq 0$, $\kappa(\overline{\Delta})=-\infty$, $q(\overline{S}) \geqq 1 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geqq 1$。

⑤ $\kappa(\overline{C_w})=0$, $\kappa(\overline{\Delta})=-\infty$, $q(\overline{S})=0 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geqq 1$ または $\overline{P}_4(S) \geqq 1$ 。

⑥ $\kappa(\overline{C_w})=1$, $\kappa(\overline{\Delta})=-\infty$, $q(\overline{S})=0 \Rightarrow \overline{P}_4(S) \geqq 1$ または $\overline{P}_6(S) \geqq 1$ 。

$\overline{\kappa}(C_w) \geqq 0$, $\overline{\kappa}(\Delta) \geqq 0$ であるから，$\kappa(\overline{C_w})=-\infty$ のとき $C_w \subset \mathbb{C}^*$ 即ち $(D, \overline{C_w}) \geqq 2$ であり，$\kappa(\overline{\Delta})=-\infty$ のとき $\Delta \subset \mathbb{C}^*$ 即ち $D \supset$ ($\overline{f}$ の２本のファイバーの support) である。

<u>補題 1</u>　$\overline{S}$ 上に第一種例外曲線 E があって $(K_{\overline{S}}+D, E) \leqq 0$ なるとき，E の *blow down* を $\mu: \overline{S} \to \hat{\overline{S}}$ とし $\hat{S} = \hat{\overline{S}} - \mu_* D$ とすれば，$\mu_* D$ は $\hat{\overline{S}}$ 上の正規交叉型因子であって，$\overline{P}_i(S) = \overline{P}_i(\hat{S})$ となる。

証明は容易である。

特に $D \not\supset E$, $(D, E) = 1$ のとき μ を S の半点除去といい, $D \supset E$, $(D-E, E) = 2$ のとき μ を canonical flow down という。

$\overline{p_g}(S)$ については次の公式がある。

<u>補題2</u> $\overline{p_g}(S) = \sum_{i=1}^{r} \pi(D_i) + h(\Gamma(D)) + (p_g(\bar{S}) - q(\bar{S}) + t)$.

ここに, $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ を既約分解とし $\pi(D_i) = \frac{1}{2}(D_i, D_i + K_{\bar{S}}) + 1$,

$h(\Gamma(D))$ は D の dual graph $\Gamma(D)$ の輪状数,

$t = \dim(\text{kernel of } H^1(\bar{S}, \mathcal{O}_{\bar{S}}) \to H^1(D, \mathcal{O}_D))$ である。

([3] 参照)

以下①〜⑥の各場合について論ずる。

① $\kappa(\overline{C_w}) = -\infty$, $\kappa(\Delta) = -\infty$ のとき, F_1, F_2 をそのsupportが D に含まれる2本のファイバーとし, D の f に関する horizontal component を H とする。$\overline{p_g}(S) = 0$ とすると補題2により D の各成分は $\mathbb{P}^1$ であって $\Gamma(D)$ はサイクルを含まない。よって H は既約である。また $(D, \overline{C_w}) \geq 2$ であるから, F_1 及び F_2 の H と交わる既約成分は重複度2以上である。以上のことと補題1による reduction を用いて $\overline{P_2}(S) \geq 1$ が示される。

② $\kappa(\overline{C_w}) = -\infty$, $\kappa(\Delta) = 0$ のとき, 補題2により D が既約楕円曲線である場合に帰着される。$d = \deg(f|D : D \to \Delta)$ とおくと, $\bar{\kappa}(C_w) \geq 0$ であるから $d \geq 2$ である。$d = 2$ のと

きは，$f|_D : D \to \overline{\Delta}$ によって2重不分岐被覆 $\tilde{\overline{S}} \to \overline{S}$ をつくることにより，$\overline{P}_2(S) \geq 1$ がわかる。$d \geq 3$ のときは，$\overline{S}$ の極小モデル $\hat{S}$，固有双有理正則写像 $\mu : \overline{S} \to \hat{S}$ を考える。$\mu = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \cdots \circ \mu_r$，$\mu_i : \overline{S}_i \to \overline{S}_{i-1}$ は $\mu_i(E_i) = p_i$ なる blow down となっているとする。$\mu_* D$ の $\overline{S}_{i-1}$ への proper transform の p_i における重複度を ν_i とすると，補題1による reduction によって $\nu_i \leq d-2$ としてよいことがわかる。$\hat{S}$ において Rieman-Roch を用いて $\dim H^0(\hat{S}, m(K_{\hat{S}} + \mu_* D))$ を計算し，ν_i の評価とあわせて $\overline{P}_2(S) \geq 1$ が出る。

③ $\kappa(\overline{C_w}) = -\infty$，$\kappa(\overline{\Delta}) = 1$ のとき，補題2と Hurwitz の公式から容易に $\overline{P}_g(S) \geq 1$ が出る。

④ $\kappa(\overline{C_w}) \geq 0$，$\kappa(\overline{\Delta}) = -\infty$，$q(\overline{S}) \geq 1$ のとき，補題2より容易に $\overline{P}_g(S) \geq 1$ が出る。なおこの case は，定理1を示すためには考えなくてよい。

⑤ $\kappa(\overline{C_w}) = 0$，$\kappa(\overline{\Delta}) = -\infty$，$q(\overline{S}) = 0$ のとき，$f : \overline{S} \to \overline{\Delta}$ は有理楕円曲面である。f の2つのファイバー F_1，F_2 に対して，$D = \mathrm{supp}\, F_1 + \mathrm{supp}\, F_2$ となる場合を考えればよい。楕円曲面の理論（[4]，[5]）を用いれば，このとき $\overline{P}_2(S) = 0$ となるのは次の3つの場合しかないことがわかる。各場合について実例が存在する。

Case 1. F_1，F_2 は III^* 型と II 型。

このとき，$\overline{P_2}(S)=\overline{P_3}(S)=0$，$\overline{P_4}(S)=1$，$\overline{P_{12}}(S)=2$，$\overline{\kappa}(S)=1$ となる。

Case 2. F_1，F_2 は IV^* 型と III 型。

このとき，$\overline{P_2}(S)=0$，$\overline{P_3}(S)=1$，$\overline{P_{12}}(S)=2$，$\overline{\kappa}(S)=1$ となる。

Case 3. F_1，F_2 は IV^* 型と II 型。

このとき，$\overline{P_2}(S)=0$，$\overline{P_3}(S)=1$，$\overline{P_6}(S)=2$，$\overline{\kappa}(S)=1$ となる。

⑥ $\kappa(\overline{C_w})=1$，$\kappa(\Delta)=-\infty$，$q(\overline{S})=0$ のとき，$\overline{\kappa}(C_w)=1$ であるから加法公式により $\overline{\kappa}(S)\geqq 1$ となる。$\overline{\kappa}(S)=1$ のときは，一般論において得られている $\overline{P_i}(S)$ の公式（[6] (2.3)～(2.8)）を適用することにより，$\overline{P_4}(S)\geqq 1$ または $\overline{P_6}(S)\geqq 1$ がわかる。$\overline{\kappa}(S)=2$ のときは次の定理による。

<u>定理3</u>　$\overline{\kappa}(S)=2$，D の intersection matrix が negative definite でないならば，$\overline{P_4}(S)\geqq 1$ または $\overline{P_6}(S)\geqq 1$ である。

⑥の場合 D は f のファイバーの support を含んでいるので定理3の仮定がみたされている。定理3の証明は本稿の後半にある。

文献

[1] Iitaka, S., On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, Complex Analysis and Algebraic Geometry, IWANAMI, Tokyo, 1977.

[2] Iitaka, S., Logarithmic forms of algebraic varieties, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 23 (1976), 525–544.

[3] Kodaira, K., On compact complex analytic surfaces I, Ann. of Math. 71 (1960), 111–152.

[4] Kodaira, K., On compact analytic surfaces II, III, Ann. of Math. 77 (1963), 563–626, 78 (1963), 1–40.

[5] Kodaira, K., On the structure of compact complex analytic surfaces I, Amer. J. Math. 86 (1964), 751–798.

[6] Kawamata, Y., On the classification of non-complete algebraic surfaces, Algebraic Geometry, Lect. Note in Math., vol. 732, Springer, PP. 215–232 (1979).

定理 $(S, \bar{S}, D)$ を2次元非特異3対，$\bar{\kappa}(S)=2$ とする．D の交点行列が負定値でないならば，$\bar{P}_4(S)\geq 1$ or $\bar{P}_6(S)\geq 1$．

証明．　　用語等については[1]参照

[1]によって，$(S, \bar{S}, D)$ を相対極小モデルとしてよい．$K_{\bar{S}}$ を K とかく．$K+D$ の半正値成分を $K+D_m$ とかく．[1]によれば，k を十分大きくとれば，$Bs|k(K+D_m)|=\phi$．よって[2]により，$h^1(\bar{S}, nK-[-(n-1)D_m])=0$，$n\geq 2$．

また D の交点行列が負定値でないことから，$[D_m]\neq 0$ が従う．

層の完全系列

$$0\to \mathcal{O}_{\bar{S}}(nK-[-(n-1)D_m])\to \mathcal{O}_{\bar{S}}(nK-[-(n-1)D_m]+[D_m])$$
$$\to \mathcal{O}_{[D_m]}((nK-[-(n-1)D_m]+[D_m])|_{[D_m]})\to 0$$

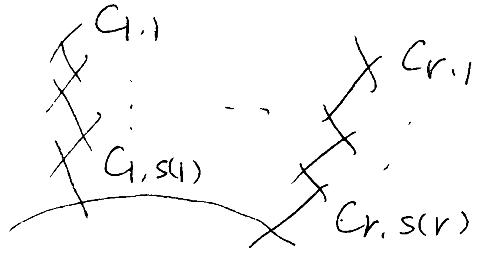
から，

$$0\to H^0(\bar{S}, nK-[-(n-1)D_m])\to H^0(nK-[-(n-1)D_m]+[D_m])$$
$$\to H^0([D_m], (nK-[-(n-1)D_m]+[D_m])|_{[D_m]})\to 0$$

をえる．この§の前半の議論により $\bar{S}$ を有理曲面としてよい．

$nK-[-(n-1)D_m]+[D_m]\leq nK+nD$ に注意すれば，$\bar{P}_n(S)\neq 0$ をいうには，$H^0([D_m], nK-[-(n-1)D_m]+[D_m]|_{[D_m]})\neq 0$ をいえばよいことがわかる．$H^0([D_m], nK-[-(n-1)D_m]+[D_m]|_{[D_m]})$ は，D のグラフを分類することで，n が4または6で非零になることがわかる．以下でそれを見よう．$\bar{p}_g(S)=0$ としてよいから，D の各既約成分は $\mathbb{P}^1$．

D_1をDの連結成分で、D_mにおける係数が1になるものを含むとし、$D_{1,m}$をD_mにおけるD_1の成分とする。$H^0([D_{1,m}], nK - [-(n-1)D_m] + [D_m] \mid [D_{1,m}]) = H^0([D_{1,m}], nK - [-(n-1)D_m + [D_{1,m}] \mid [D_{1,m}]) \neq 0$をみたせばよい。$D_{1,m}$を求める。まず$D_{1,m}$の端成分を$C_{1,1}, \dots, C_{r,1}$とする。ここで端成分とは、の成分$E$で、$(D-E, E) = 1$となるもの。次に各$C_{i,1}$からはじまって、$C_{i,j}$ $(1 \leq j \leq s(i))$を下図のようにとる。しかも$C_{i,s(i)}$はDの他の成分と少くとも3点で交わるとする。



$a_{ij} = -(C_{ij}^2)$とおく。$F_r(x_1 \dots x_r)/G_r(x_1 \dots x_r)$を$x_1, \dots, x_r$の連分数展開、$d_{ij} = 1 - F_{r-j}(a_{i,j+1} \dots a_{i,s(i)})/F_r(a_{i1} \dots a_{i,s(i)})$とすれば、$D_{1,m} = [D_{1,m}] + \sum_{i,j} (1 - d_{ij}/d_{i0}) C_{ij}$となる。([1]の$D_m$の求め方参照)

とくに、$C_{i\,s(i)}$のD_mにおける係数は、$1 - \frac{1}{d_{i0}}$となることに注意する。C_0を$\sum C_{ij}$と交わる$\sum C_{ij}$にふくまれないD_1の既約成分とする。

$(C_{1,s(1)}, C_0) = \cdots = (C_{t,s(t)}, C_0) = 1$

$(C_{t+1,s(t+1)}, C_0) = \qquad (C_{r,s(r)}, C_0) = 0$

$B_1, \ldots, B_p$ を C_0 と交わる $[D_{1,m}]$ の既約成分とする。
このとき，$K+D_m$ は半正値であるから，$(K+D_m, C_0) \geq 0$。
したがって，$-2 + (1-\frac{1}{d_{1,0}}) + \cdots + (1-\frac{1}{d_{t,0}}) + p \geq 0$。
このとき $\deg_{C_0}(nK - [-(n-1)D_m] + [D_{1,m}]|_{C_0})$
$= (nK - [-(n-1)D_m] + [D_{1,m}], C_0) = -2n + np$
$- [-(n-1)(1-\frac{1}{d_{1,0}})] \cdots - [-(n-1)(1-\frac{1}{d_{t,0}})]$。
初等整数論より，$-2 + (1-\frac{1}{d_{1,0}}) + \cdots + (1-\frac{1}{d_{t,0}}) + p \geq 0$
から，$n=4$ または $n=6$ で $-2n + np - [-(n-1)(1-\frac{1}{d_{1,0}})]$
$\cdots - [-(n-1)(1-\frac{1}{d_{t,0}})] \geq 0$．したがって，$H^0(C_0,$
$nK - [-(n-1)D_m] + [D_m]|_{[D_m]}) \neq 0$．$H^0([D_m], nK$
$- [-(n-1)D_m] + [D_m]|_{[D_m]}) \neq 0$．（$n=4$ または $n=6$ に対して）
したがって，証明の前半の議論から，$\overline{P}_4(S) \neq 0$ または $\overline{P}_6(S) \neq 0$ をえる。

文　献

[1] Y. Kawamata, *Classification of non-complete algebraic surface*, Proc. Japan Acad. <u>54</u> 133-135 (1978)

[2] ———, *On the cohomology of Q-Divisors*, Proc. Japan Acad. <u>56</u> 34-35 (1980)