数理解析研究所講究録
392 巻 1980 年 53-57

加法定理（予想 C_n）

東大 理 角田秀一郎

加法定理. $f: X \to Y$ を代数的ファイバー空間, $\kappa(X) \geq 0$, $\kappa(Y) = \dim Y$ ならば, $\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$。ここで F は f の一般ファイバー $f^{-1}(y)$.

証明. まず $P_g(X) \neq 0$ の場合に帰着させる。m を $P_m(X) \neq 0$ なる正整数とする。$\mathfrak{U} = \{U_i\}$ を X のアフィン開被覆, φ_{ij} を K_X の $\mathfrak{U}$ に関する変換関数とする。f_i を mK_X の非零切断に対応する U_i 上の関数で $f_i = \varphi_{ij}^m f_j$ をみたすものとする。$U_i' = \{(x, t) \in U_i \times \mathbb{C} \mid t^m = f_i(x)\}$ とおけば, U_i' たちは, 代数多様体 K_X の代数的集合 X' をつくる. X^* を X' の既約成分の非特異化, $\pi: X^* \to X$ を射影とすれば, X^* の構成法から, $H^0(X^*, \pi^* K_X) \neq 0$, R_π を π の分岐因子とすれば, $N \gg 0$ に対して, $0 \leq R_\pi \leq N\pi^* K_X$. したがって, $\kappa(X^*) = \kappa(X)$。一方, $X^* \xrightarrow{f_1} Y^* \to Y$ を $f \circ \pi$ のスタイン分解とすれば, $\kappa(Y^*) \geq \kappa(Y)$, $\kappa(F^*) \geq \kappa(F)$, F^* は f_1 の一般ファイバー。

よって、$X^* \longrightarrow Y^*$ について加法定理を示せばよいので、はじめから、$P_g(X)\neq 0$ としてよい。

F を f の一般ファイバーとすれば、$P_g(X)\neq 0$ より $P_g(F)\neq 0$。

$f: X\longrightarrow Y$ はモデルをとりかえることにより、中単化定理の系の仮定をみたすとしてよい。そこで、次の可換図式をえる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ X_1 = X\times_Y \tilde{Y} & \xrightarrow{f_1} & \tilde{Y} \\ {\scriptstyle \mu}\nearrow & \nearrow{\scriptstyle \tilde{f}} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

以下 F, D, $\tilde{D}$ その他も中単化定理の系と同様とする。

主補題によれば、$\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ は局所自由かつ半正値な層で、$P_g(F)\neq 0$ より非零がわかる。

補題[1]. L を非常に豊富な $\tilde{Y}$ 上の因子とする。このとき、正整数 m が存在し、$H^0(\tilde{Y}, m g^* K_Y - L)\neq 0$

$P=\mathbb{P}(\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}})$ とおき、$\pi: P\to\tilde{Y}$ を射影とする。H を P の基本因子とすると、は半正値。すなわち C を P 上の曲線とすれば、$(H.C)\geqq 0$。

$\nu: C^* \longrightarrow C$ を非特異化とする。π は $\varphi: C^*\longrightarrow\tilde{Y}$, $\varphi^*\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ の商可逆層を誘導するが、それは $\nu^* H$ に他ならない。したがって、$(H.C)=\deg_{C^*}\nu^* H\geqq 0$。

次の定理を使って、$mH+\pi^* L$ は豊富を示す。

定理(セシャドリの判定法)[2].

Sを完備代数多様体，DをS上のCartier因子．このとき，Dが豊富である必要十分条件は，正数εが存在して，S上の任意の曲線Cに対し，$(D, C) \geqq \varepsilon(m(C))$。ここで$m(C) = \max_{P \in C} m_P(C)$，とおいた。

Lは豊富なので，正数ε_1が存在して，Y上の曲線Cに対し，$(L, C) \geqq \varepsilon_1(m(C))$．$\pi$のファイバーは，射影空間で，$H$をファイバーに制限すると，超平面になる．したがって，

πのファイバーにふくまれる曲線Cに対し，$(H, C) \geqq m(C)$。

CをP上の曲線とする。Cがπのファイバーにふくまれれば，

$(mH + \pi^*L, C) = m(H, C) \geqq m \quad m(C) \geqq \quad m(C)$。

$\pi(C) = C_0$が曲線であれば，$(mH + \pi^*L, C) \geqq (\pi^*L, C)$

$= [C : C_0](L, C_0) \geqq [C : C_0]\varepsilon_1 m(C_0) \geqq \varepsilon_1 m(C)$

ここで$[C : C_0]$は$\pi : C \to C_0$の写像度を表わす。

よって，セシャドリの判定法により，$mH + \pi^*L$は豊富．

gは平坦であるから，平坦基底変換定理により，$K_{X_1/Y} = p^*K_{X/Y}$.

したがって，$K_{X_1} = p^*K_{X/Y} \otimes f_1^*K_Y$となり，$X_1$はゴレンスタイン。次の命題によれば，$\mathrm{Hom}(\mu_* K_{\tilde{X}}, K_{X_1}) \neq 0$がわかる。

命題[3]．$f : M \to V$を全射正則写像とする。ここにM, Vは次元の等しい，局所マコーレー完備代数多様体。

そのとき，$\mathrm{Hom}(f_* \omega_M, \omega_V) \neq 0$。ここに$\omega_M$と$\omega_V$は dualizing sheaf.

次の準同型がつくれる.

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{Y}}\hat{f}_*K_{\hat{X}/\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathcal{Y}} f_{1*}K_{X_1/\mathcal{Y}} \to \sum_{n\geq 0} f_{1*}(nK_{X_1/\mathcal{Y}})$$

上の準同型は，Pの部分スキームRを定め，$\pi: R\to\mathcal{Y}$を誘導する. $\dim\mathcal{Y}=0$なら主張は自明. $\dim\mathcal{Y}>0$とし，$y_1, y_2 \in\mathcal{Y}$を異なる点，r_1, r_2をRの点でそれぞれy_1, y_2におちるとする. $mH+\pi^*L$は豊富であるから 正整数nと$n(mH+\pi^*L)$の切断s_1, s_2が存在し，$s_1|_{\pi^{-1}(y_1)}=0$, $s_1(r_2)\neq 0$, $s_2|_{\pi^{-1}(y_2)}=0$, $s_2(r_1)\neq 0$. $H^0(P, n(mH+\pi^*L)) = H^0(\mathcal{Y}, \mathrm{Sym}^{nm}\hat{f}_*K_{\hat{X}/\mathcal{Y}}\otimes nL) \to H^0(\mathcal{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\mathcal{Y}})\otimes nL)$により，$s_1, s_2$は$H^0(\mathcal{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\mathcal{Y}})\otimes nL)$の切断$\omega_1$, ω_2を誘導する. s_1, s_2の性質から，$\omega_1(y_1)=0$, $\omega_1(y_2)\neq 0$, $\omega_2(y_2)=0$, $\omega_2(y_1)\neq 0$. したがって，$h^0(\mathcal{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\mathcal{Y}})\otimes nL)\geq 2$. よって，$\kappa(nmK_{X_1/\mathcal{Y}}\otimes nf_1^*L, X_1)>0$

$\Longrightarrow \kappa(nmK_{X_1/\mathcal{Y}}\otimes mf_1^*g^*K_Y, X_1)>0$

$\Longrightarrow \kappa(p^*K_X, X_1)>0 \Longrightarrow \kappa(X)>0$.

$\Phi: X\to Z$を飯高ファイバリング，Gを$(f,\Phi): X\to Y\times Z$の像とする. Zの一般超平面切断の共通部分Z'をとって，$Y^*=G\times_Z Z'$がY上支配的かつ，次元が等しくできる. $\dim Y^*\geq\kappa(Y^*)\geq\kappa(Y)=\dim Y=\dim Y^*$より $\kappa(Y^*)=\dim Y^*$が従う. $Y^*\to Z'$の一般ファイバーは$f(\Phi^{-1}(z))$ $(z\in Z')$. $Y^*\to Z'$に基本不等式を使う $\kappa(Y^*)\leq\kappa(f\Phi^{-1}(z))+\dim Z'$より $\kappa(f\Phi^{-1}(z))=\dim f\Phi^{-1}(z)$

$\Phi^{-1}(z) \longrightarrow f(\Phi^{-1}(z))$ を考えると、$\dim f\Phi^{-1}(z) > 0$ であれば、上に証明したことにより、$\kappa(\Phi^{-1}(z)) > 0$ でなければならず、$\kappa(\Phi^{-1}(z)) = 0$ に矛盾。したがって、$\dim f\Phi^{-1}(z) = 0$。よって、有理写像 $g: Z \to Y$ が存在して、$f = g \cdot \Phi$。モデルをとりかえて、g は正則写像としてよい。$y \in Y$ を一般点とし

$f^{-1}(y) \longrightarrow g^{-1}(y)$ に基本不等式(弱加法性)をつかって、$\kappa(f^{-1}(y))$
$\leq \kappa(\Phi\text{の fiber}) + \dim g^{-1}(y)$。 $\dim g^{-1}(y) =$
$\dim Z - \dim Y = \kappa(X) - \kappa(Y)$ よって、$\kappa(F) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$
一方基本不等式から、$\kappa(X) \leq \kappa(F) + \kappa(Y)$.
したがって $\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$ Q.E.D.

文　献

[1] K. Kodaira: Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geo., 6 (1971), 33–46

[2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties; Springer Lecture Notes in Math. 156. P37.

[3] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan. Vol 30, No 4, 1978 779–794