数理解析研究所講究録
392巻 1980年 38-41

巾単化定理

東大 理　角田秀一郎

巾単化定理. X を非特異射影代数多様体, D を X 上の単純正規交叉因子とする. $D=\sum_{i=1}^{N} D_i$ を既約分解, D_i に正整数 m_i $(i=1,\dots,N)$ を与える. このとき, 有限全射正則写像 $p:\hat{X}\to X$ が存在し, 次の条件をみたす。

(1) $\hat{X}$ は非特異,

(2) $\hat{D}=p^{-1}(D)$ は $\hat{X}$ 上の単純正規交叉因子.

(3) $p^*D_i=\sum m_{ij}\hat{D}_j$ を既約分解とすれば, $m_i | m_{ij}$ が, 任意の i, j に対して成立.

証明　M を X 上の豊富な因子, m を m_1 の倍数で, $mM-D_1$ が非常に豊富になるものとする. H_k $(1\le k\le d=\dim X)$ を, $|mM-D_1|$ の一般元とすれば, $\sum_{k=1}^{d} H_k+D$ は単純正規交叉因子 (∵ベルチニの定理により). $\mathcal{U}=\{U_s\}$ を X のアフィン開被覆, a_{st} を $\mathcal{U}$ に関する M の変換関数とする. $\varphi_{k,s}$ を H_k+D_1 の U_s における局所方程式で, $\varphi_{k,s}=a_{st}^{m}\varphi_{k,t}$ $(1\le k\le d)$ をみ

たすものとする。$L = \mathbb{C}(X)(\sqrt[m]{\varphi_{1,s}}, \ldots, \sqrt[m]{\varphi_{d,s}})$ とおけば，定義から，L は s のとり方によらない。$p_1 : X_1 \to X$ を X の L 中の正規化とする．

<u>主張</u>　X_1 は非特異，$p_1^{-1}(D)$ は X_1 上の単純正規交叉因子，$p_1^* D_1 = m p_1^{-1}(D)$．

証明．$x \in U_s$，ψ_i を D_i の U_s における局所方程式とする。

case 1　$x \notin D_1$．

$x \in H_k$ $(1 \leq k \leq e)$，$x \notin H_k$ $(e+1 \leq k \leq d)$，$x \in D_2 \ldots D_f$，$x \notin D_{f+1} \ldots D_N$ とすれば，$\varphi_{1,s}, \ldots, \varphi_{e,s}, \psi_2, \ldots \psi_f$ は x の正則パラメタ系の一部，$\varphi_{e+1,s} \ldots \varphi_{d,s}$ は x において単元，

case 2　$x \in D_1$

$\bigcap_{k=1}^{d} H_k \cap D = \phi$ より，$x \notin H_1$ としてよい。$x \notin H_1 \ldots H_e$，$x \in H_{e+1}, \ldots, H_d$，$x \in D_2 \ldots D_f$，$x \notin D_{f+1} \ldots D_N$ とすれば，$\varphi_{1,s}$，$\varphi_{e+1,s}/\varphi_{1,s}$，$\varphi_{d,s}/\varphi_{1,s}$，$\psi_2 \ldots \psi_f$ は x の正則パラメタ系の一部，$\varphi_{2,s}/\varphi_{1,s} \ldots, \varphi_{e,s}/\varphi_{1,s}$ は x において単元。

次の補題によれば，主張は容易に従う。

補題([1]参照)　(R, m) を代数閉体 k 上の d 次元正則局所環で，$R/m = k$ とし，$(z_1 \ldots z_d)$ を R の正則パラメタ系，$u_1 \ldots u_s$ を R の単元とすれば，$R_1 = R[\sqrt[m]{z_1}, \ldots, \sqrt[m]{z_k}, \sqrt[m]{u_1}, \ldots, \sqrt[m]{u_s}]$ の極大イデアル m_1 による局所化 R_{1m_1} は $(\sqrt[m]{z_1}, \ldots, \sqrt[m]{z_k}, z_{k+1}, \ldots z_d)$ を正則パラメタ系とする正則局所環となる。

証明. $\mathfrak{m}_1$ は $\sqrt[m]{z_1},\ldots,\sqrt[m]{z_k}$, $z_{k+1},\ldots,z_d$, $\sqrt[m]{u_1}-\alpha_1,\ldots,\sqrt[m]{u_s}-\alpha_s$ $(\alpha_i\in k)$ で生成されるので, $\sqrt[m]{u_i}-\alpha_i\in(\sqrt[m]{z_1},\ldots,z_d)R_{\mathfrak{m}_1}$ $(i=1,\ldots,s)$ をみればよい。$u_1-\alpha_1=(\sqrt[m]{u_1}-\alpha_1)\cdot v$ (v は $R_{\mathfrak{m}_1}$ の単元) とかける。$u_1-\alpha_1\in\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}_1$。よって, $\sqrt[m]{u_1}-\alpha_1\in(\sqrt[m]{z_1},\ldots,z_d)R_{\mathfrak{m}_1}$ Q.E.A.

同様の操作を, $(X_1, P_1^{-1}(D))$ に対してくりかえす。$P_1^{-1}(D_2)$ は既約とは限らないが, 上の議論より非特異だから, $P_1^{-1}(D_2)$ に対して, D_1 と同様のことができる。

これで, 定理の $\hat{X}$ の存在がわかった。 Q.E.D.

系. $f: X\to Y$ を代数的ファイバー空間, Y のあるザリスキ開集合 Y_0 が存在し, $D=Y-Y_0$ は正規交叉因子, $f_0=f|X_0=f^{-1}(Y_0)$ はスムーズとする。このとき, 有限全射正則写像 $P:\hat{Y}\to Y$ が存在し, $\hat{X}$ を $X_1=X\times_Y\hat{Y}$ の適当な非特異化, $\hat{f}:\hat{X}\to\hat{Y}$ を f から誘導される正則写像, $\hat{D}=P^{-1}(D)$, $\hat{X}_0=\hat{f}^{-1}P^{-1}(Y_0)$, $\hat{f}_0=\hat{f}|\hat{X}_0$ とおけば, $R^n\hat{f}_{0*}\mathbb{C}_{\hat{X}_0}$ の $\hat{D}$ のまわりの局所モノドロミーは巾単, ここで $n=\dim X-\dim Y$.

局所モノドロミーの定義から復習する。

$x\in D$; x の適当な開近傍 $\mathcal{U}$ をとれば, $\mathcal{U}=\Delta^d$, $d=\dim Y$ $(\Delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\})$ $\mathcal{U}\setminus D\cong\Delta^{*k}\times\Delta^{d-k}$.
$(\Delta^*=\Delta\setminus\{0\})$ $f^{-1}(\mathcal{U}\setminus D)\longrightarrow\mathcal{U}\setminus D$ は C^∞ ファイバーバンドルとみなせる。したがって, $\pi_1(\mathcal{U}\setminus D)$ は自然に

$H^n(X_t, \mathbb{C})$ $(X_t = \pi^{-1}(t),\ t \in \mathcal{U} \setminus D)$ に作用する。このとき、$\pi_1(\mathcal{U} \setminus D)$ の元を $GL(H^n(X_t, \mathbb{C}))$ とみなしたものを、x におけるDのまわりの局所モノドロミーという。

定理[2].

上の条件下で、局所モノドロミーは準巾単。

証明は[2] or [3]参照

上の定理によれば、D_i の一般点における局所モノドロミーを δ_i とし、m_i を $\delta_i^{m_i}$ が巾単になる正整数として、(Y, D, m_i) に巾単化定理をつかえば、系をえる。

文　献

[1] H. Popp: Fundamentalgruppen algebraischen Mannigfaltigkeiten. Springer Lecture Notes in Math. 176 1970

[2] A. Landman: On the Picard-Lefschetz transformations. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[3] W. Schmidt: Variation of Hodge Structure. Inventiones math. 22 (1973) 211-319