数理解析研究所講究録
393巻 1980年 75-83

爆風伝播の高近似計算

東京電機大学　桜井　明

瞬間エネルギー点源からの爆風の伝播の問題は $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$, $\lambda(y)$, $0 \le x, y \le 1$ についての以下の式の解を求めることに帰着する。[1)]

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\lambda f + (f-x)\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{\gamma h}\frac{\partial g}{\partial x} \\
(f-x)\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial h}{\partial y} &= -h\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right) \\
-\lambda g + (f-x)\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial g}{\partial y} &= -\gamma g\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right)
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
f(1,y) &= \frac{2}{\gamma+1}(1-y) \\
g(1,y) &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}y \\
h(1,y) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\right)^{-1}
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

$$
\lambda = \left[(\alpha+1)J - \frac{1}{\gamma-1}y\right]\left(J - y\frac{dJ}{dy}\right)^{-1}, \quad J = \int_0^1\left(\frac{\gamma}{2}hf^2 + \frac{g}{\gamma-1}\right)x^\alpha dx
$$

$\alpha = 0, 1, 2$; γ : 比熱の比 (3)

ここで、条件(3)は次の条件

$$f(0, y) = 0 \tag{4}$$

で置きかえることも出来る。

いま、$f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ を形式的に

$$\begin{cases} f = f^{(0)}(x) + y f^{(1)}(x) + y^2 f^{(2)}(x) + \cdots \\ g = g^{(0)}(x) + y g^{(1)}(x) + y^2 g^{(2)}(x) + \cdots \\ h = h^{(0)}(x) + y h^{(1)}(x) + y^2 h^{(2)}(x) + \cdots \end{cases} \tag{5}$$

とおくと (3) から

$$J = J_0 \left(1 + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 + \cdots\right)$$

ここで $J_0 = \int_0^1 \left(\frac{\gamma}{2} h^{(0)} f^{(0)2} + \frac{g^{(0)}}{\gamma - 1}\right) x^\alpha dx$

$$\sigma_1 J_0 = \int_0^1 \left(\gamma h^{(0)} f^{(0)} f^{(1)} + \frac{\gamma}{2} f^{(0)2} h^{(1)} + \frac{g^{(0)}}{\gamma - 1}\right) x^\alpha dx$$

$$\cdots$$

となり、これから

$$\lambda(y) = (\alpha + 1)\left(1 + \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + \cdots\right) \tag{6}$$

但し、$\lambda_1 = \sigma_1 - \frac{1}{J_0(\alpha+1)(\gamma-1)}$, $\lambda_2 = 2\sigma_2$, $\cdots$

となるが、$f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$, $h^{(i)}(x)$, λ_i ($\lambda_0 \equiv 1$) は $i = 0$ の場合から出発して、以下のように順次に定めることが出来る。このことは非線形系では、常に可能とは限ら

ないことに注意しよう。

即ち、(5), (6) を (1), (2) に代入すると、以下のように $\lambda^{(i)}$ を固有値として含む $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$, $h^{(i)}(x)$ に関する聯立常微分方程式の系とそれに対する $x=1$ での境界条件をうる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(f^{(0)}-x)h^{(0)}f^{(0)\prime}+\frac{1}{\gamma}g^{(0)\prime}=\frac{\alpha+1}{2}f^{(0)}h^{(0)}\\
&f^{(0)\prime}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}=(x-f^{(0)})\frac{h^{(0)\prime}}{h^{(0)}}\\
&\gamma\left(f^{(0)\prime}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}\right)-\alpha-1=(x-f^{(0)})\frac{g^{(0)\prime}}{g^{(0)}}
\end{aligned}
\right.
\qquad (7)
$$

$$
f^{(0)}(1)=\frac{2}{\gamma+1}\ ,\quad g^{(0)}(1)=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\ ,\quad h^{(0)}(1)=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&h^{(0)}(f^{(0)}-x)f^{(1)\prime}+\frac{1}{\gamma}g^{(1)\prime}=-\left(\frac{\alpha+1}{2}+f^{(0)\prime}\right)h^{(0)}f^{(1)}\\
&\qquad\qquad+\left\{\frac{\alpha+1}{2}f^{(0)}+(x-f^{(0)})f^{(0)\prime}\right\}h^{(1)}+\frac{\alpha+1}{2}\lambda_1 g^{(0)}h^{(0)} \qquad (8)\\
&h^{(0)}f^{(1)\prime}-(x-f^{(0)})h^{(1)\prime}=-\left(h^{(0)\prime}+\frac{\alpha}{x}h^{(0)}\right)f^{(1)}-\left(f^{(0)\prime}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}+\alpha+1\right)h^{(1)}\\
&\gamma g^{(0)}f^{(1)\prime}-(x-f^{(0)})g^{(1)\prime}=-\left(g^{(0)\prime}+\frac{\alpha\gamma}{x}g^{(0)}\right)f^{(1)}-\gamma\left(f^{(0)\prime}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}\right)+(\alpha+1)\lambda_1 g^{(0)}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
f^{(1)}(1)=-\frac{2}{\gamma+1}\ ,\quad g^{(1)}(1)=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\ ,\quad h^{(1)}(1)=-\frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2}
$$

— — —

これらを (6) の條件と組合せるか、あるいは (4) の條件から出る $f^{(i)}(0)=0$ と組合せると $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$, λ_i が $i=0$ から出発して順次に定まることになる。

さて $i=0$ および $i=1$ の場合はパラメタ $\alpha=0, 1, 2$ のそれぞれについて γ の種々の値をとって、また $i=2$ の場合も $\alpha=1, \gamma=1.4$ の場合だけは以前から計算されていた。[1] その后、$i=3$ の場合も $\gamma=1.4$ として $\alpha=0. 1. 2$ の場合に計算された。[2] ここでは、それらをさらに進めて、α のすべての値に対して $\gamma=1.2$, 1.4 および 1.667 の場合を $i=4$ まで計算した。

ところで、このような高近似の場合、実際の計算にあたって以下のような配慮が必要であった。

まず、$i\,(>0)$ 番目の場合の計算には $i-1$ 番目までの解の値が必要であるが、これらをすべて記憶させることは能率が悪く、また容量上も殆んど不可能である。そこで、前の段階で求められた $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}$ の値だけは用いるが、それ以外は未知として、$i=0, 1, \cdots, i$ の場合のすべての式を聯立させ、λ_i はその固有値として求めるのが便利であった。たとえば $i=4$ のとき、未知関数 $f^{(0)}(x), g^{(0)}(x), h^{(0)}(x); \cdots; f^{(4)}(x), g^{(4)}(x), h^{(4)}(x)$ をそれらの初期値 $f^{(0)}(1), g^{(0)}(1), h^{(0)}(1); \cdots; f^{(4)}(1), g^{(4)}(1), h^{(4)}(1)$ のもとに 15 元の聯立常微分方程式((7), (8) など)で $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は既知、λ_4 を固有値として条件 (6) もしくは (4) を満足するように求める。

$f^{(i)}(x)$ の $x\sim 0$ での値は λ_i の値に極めて敏感である。

従って、解を $x=0$ の近くまで決定するには λ_i の値を高精度に求める必要があり、そのためには $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}$ の値も精密に求まっている必要がある。

実際の計算では、まず λ_i の粗値を条件(6)を用いて決定する。それには、解 $f^{(i)}, g^{(i)}, h^{(i)}$ は λ_i について1次式になっていることを利用し、$f^{(i)} = f_1^{(i)}(x) + \lambda_i\, g_2^{(i)}(x)$, $g^{(i)} = g_1^{(i)}(x) + \lambda_i\, g_2^{(i)}(x)$, $h^{(i)} = h_1^{(i)}(x) + \lambda_i\, h_2^{(i)}(x)$ とおくと $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \cdots, h_2^{(i)}$ についての λ_i が含まれない方程式系をうる。これを初期値のもとに解き、その解を(6)に代入することにより λ_i の値が求まる。この λ_i の値を出発値として条件(4)からの式 $f^{(i)}(0)=0$ を満足するように計算を繰返し、出来る限りの精度で λ_i を決定すると同時に解が $x=0$ の近くまで求まることになる。

以下の(附)に $i=4$ の計算のための15元方程式と $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ の計算結果が示してある。そこで $\alpha=2$, $\gamma=1.2$ の場合は計算精度の不足のため結果が出なかったものである。

---

1) A. Sakurai: Basic Developements in Fluid Dynamics 1, Academic Press (1965) 309

2) G.G. Back & J.H. Lee: AIAA Journal 7 (1969) 742.

(附1) $i=4$ の方程式

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
(f^{(0)}-x)h^{(0)}f_x^{(0)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(0)} = \frac{\alpha+1}{z} f^{(0)}h^{(0)} & \text{(A1)} \\
h^{(0)}f_x^{(0)} - (x-f^{(0)})h_x^{(0)} = -\frac{\alpha}{x} f^{(0)}h^{(0)} & \text{(A2)} \\
\gamma g^{(0)}f_x^{(0)} - (x-f^{(0)})g_x^{(0)} = g^{(0)}\left(\alpha+1-\frac{\alpha\gamma}{x} f^{(0)}\right) & \text{(A3)}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
h^{(0)}(f^{(0)}-x)f_x^{(1)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(1)} = -\left(\frac{\alpha+1}{z} + f_x^{(0)}\right)h^{(0)}f^{(1)} & \text{(A4)} \\
\quad + \left\{\frac{\alpha+1}{z} f^{(0)} + (x-f^{(0)})f_x^{(0)}\right\} h^{(1)} + \frac{\alpha+1}{z} \lambda_1 f^{(0)}h^{(0)} & \\
h^{(0)}f_x^{(1)} - (x-f^{(0)})h_x^{(1)} = -\left(h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)}\right) f^{(1)} & \text{(A5)} \\
\quad - \left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \alpha + 1\right) h^{(1)} & \\
\gamma g^{(0)}f_x^{(1)} - (x-f^{(0)})g_x^{(1)} = -\left(g_x^{(0)} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)}\right) f^{(1)} & \text{(A6)} \\
\quad - \gamma\left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)}\right) g^{(1)} + (\alpha+1)\lambda_1 g^{(0)} &
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
h^{(0)}(f^{(0)}-x)f_x^{(2)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(2)} = -\left\{\frac{3}{z}(\alpha+1) + f_x^{(0)}\right\} h^{(0)}f^{(2)} & \\
\quad + \left\{\frac{\alpha+1}{z} f^{(0)} + (x-f^{(0)})f_x^{(0)}\right\} h^{(2)} + \frac{\alpha+1}{z} \lambda_2 f^{(0)}h^{(0)} & \text{(A7)} \\
\quad - \frac{\alpha+1}{z} f^{(1)}h^{(1)} + \frac{\alpha+1}{z}\left(-f^{(1)}h^{(0)} + f^{(0)}h^{(1)}\right)\lambda_1 & \\
\quad - \left\{f^{(0)}h^{(0)} - (x-f^{(0)})h^{(1)}\right\} f_x^{(1)} - f^{(1)}h^{(1)}f_x^{(0)} & \\
h^{(0)}f_x^{(2)} - (x-f^{(0)})h_x^{(2)} = -\left(h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)}\right) f^{(2)} - \left[f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)}\right. & \\
\quad \left. + z(\alpha+1)\right] h^{(2)} - (\alpha+1)\lambda_1 h^{(0)} - h^{(1)}f_x^{(1)} - f^{(1)}h_x^{(1)} - \frac{\alpha}{x} h^{(1)}f^{(1)} & \text{(A8)}
\end{array}
\right.
$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma g^{(0)} f_x^{(2)} - (x - f^{(0)})\, g_x^{(2)} = -\left(g_x^{(0)} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)}\right) f^{(2)} \\
&\quad - \gamma\left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \frac{\alpha+1}{\gamma}\right) g^{(2)} + (\alpha+1)\,\lambda_2\, g^{(0)} \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(1)} f^{(1)} - \gamma g^{(1)} f_x^{(1)} - f^{(1)} g_x^{(1)}
\end{aligned}\right. \tag{A9}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&h^{(0)}(f^{(0)} - x) f_x^{(3)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(3)} = -\left\{\frac{5}{z}(\alpha+1) + f_x^{(0)}\right\} h^{(0)} f^{(3)} \\
&\quad + \left\{\frac{\alpha+1}{z} f^{(0)} + (x - f^{(0)}) f_x^{(0)}\right\} h^{(3)} + \frac{\alpha+1}{z}\lambda_3 f^{(0)} h^{(0)} \\
&\quad + \frac{\alpha+1}{z}\left\{(f^{(0)}h^{(1)} - f^{(1)}h^{(0)})\lambda_2 + (f^{(0)}h^{(2)} - f^{(1)}h^{(1)} - 3 f^{(2)}h^{(0)})\lambda_1\right\} \\
&\quad - \left\{f^{(1)}h^{(0)} - (x - f^{(0)}) h^{(1)}\right\} f_x^{(2)} - \left\{f^{(2)}h^{(0)} - (x - f^{(0)}) h^{(2)} + f^{(1)}h^{(1)}\right\} f_x^{(1)} \\
&\quad - (f^{(1)}h^{(2)} + f^{(2)}h^{(1)}) f_x^{(0)} - \frac{\alpha+1}{z} f^{(1)}h^{(2)} - \frac{3}{z}(\alpha+1) f^{(2)}h^{(1)}
\end{aligned}\right. \tag{A10}$$

$$\begin{aligned}
&h^{(0)} f_x^{(3)} - (x - f^{(0)})\, h_x^{(3)} = -\left(h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)}\right) f^{(3)} - \left\{f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} \right. \\
&\quad \left. + 3(\alpha+1)\right\} h^{(3)} - (\alpha+1)(h^{(1)}\lambda_2 + 2h^{(2)}\lambda_1) - h^{(2)} f_x^{(1)} \\
&\quad - h^{(1)} f_x^{(2)} - f^{(2)} h_x^{(1)} - f^{(1)} h_x^{(2)} - \frac{\alpha}{x}(f^{(2)}h^{(1)} + f^{(1)}h^{(2)})
\end{aligned} \tag{A11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma g^{(0)} f_x^{(3)} - (x - f^{(0)})\, g_x^{(3)} = -\left\{g_x^{(0)} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)}\right\} f^{(3)} \\
&\quad - \gamma\left\{f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \frac{z(\alpha+1)}{\gamma}\right\} g^{(3)} + (\alpha+1)\, g^{(0)}\lambda_3 \\
&\quad - \gamma\left(f_x^{(2)} + \frac{\alpha}{x} f^{(2)}\right) g^{(1)} - \gamma\left(f_x^{(1)} + \frac{\alpha}{x} f^{(1)} + \frac{\alpha+1}{\gamma}\lambda_1\right) g^{(2)} \\
&\quad - f^{(1)} g_x^{(2)} - f^{(2)} g_x^{(1)}
\end{aligned}\right\} \tag{A12}$$

$$
\begin{aligned}
&h^{(0)}(f^{(0)}-x)f_x^{(4)}+\frac{1}{\gamma}g_x^{(4)}=-\left\{\frac{1}{2}(\alpha+1)+f_x^{(0)}\right\}h^{(0)}f^{(4)} \\
&\quad+\left\{\frac{\alpha+1}{2}f^{(0)}-(f^{(0)}-x)f_x^{(0)}\right\}h^{(4)}+\frac{\alpha+1}{2}f^{(0)}h^{(0)}\lambda_4 \\
&\quad-\left(\frac{\alpha+1}{2}\lambda_2+f_x^{(3)}\right)h^{(1)}f^{(1)}+\frac{\alpha+1}{2}\left(h^{(1)}f^{(0)}-h^{(0)}f^{(1)}\right)\lambda_3 \\
&\quad+\frac{\alpha+1}{2}\left(h^{(2)}f^{(0)}-3h^{(0)}f^{(2)}\right)\lambda_2+\frac{\alpha+1}{2}\left(h^{(3)}f^{(0)}-h^{(2)}f^{(1)}\right. \\
&\quad\left.-3h^{(1)}f^{(2)}-5h^{(0)}f^{(3)}\right)\lambda_1-\frac{\alpha+1}{2}\left(h^{(3)}f^{(1)}+3h^{(2)}f^{(2)}+5h^{(1)}f^{(3)}\right) \\
&\quad-\left(h^{(3)}f^{(1)}+h^{(2)}f^{(2)}+h^{(1)}f^{(3)}\right)f_x^{(0)} \\
&\quad-\left\{(f^{(0)}-x)h^{(3)}+h^{(2)}f^{(1)}+h^{(1)}f^{(2)}+h^{(0)}f^{(3)}\right\}f_x^{(1)} \\
&\quad-\left\{(f^{(0)}-x)h^{(2)}+h^{(0)}f^{(2)}\right\}f_x^{(2)}-\left\{(f^{(0)}-x)h^{(1)}+h^{(0)}f^{(1)}\right\}f_x^{(3)}
\end{aligned}
\tag{A13}
$$

$$
\begin{aligned}
&h^{(0)}f_x^{(4)}-(x-f^{(0)})h_x^{(4)}=-\left(h_x^{(0)}+\frac{\alpha}{x}h^{(0)}\right)f^{(4)} \\
&\quad-\left(h_x^{(1)}+\frac{\alpha}{x}h^{(1)}\right)f^{(3)}-\left(h_x^{(2)}+\frac{\alpha}{x}h^{(2)}\right)f^{(2)}-\left(h_x^{(3)}+\frac{\alpha}{x}h^{(3)}\right)f^{(1)} \\
&\quad-\left\{f_x^{(0)}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}+4(\alpha+1)\right\}h^{(4)}-\left\{f_x^{(1)}+3(\alpha+1)\lambda_1\right\}h^{(3)} \\
&\quad-\left\{f_x^{(2)}+2(\alpha+1)\lambda_2\right\}h^{(2)}-\left\{f_x^{(3)}+(\alpha+1)\lambda_3\right\}h^{(1)}
\end{aligned}
\tag{A14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma g^{(0)}f_x^{(4)}-(x-f^{(0)})g_x^{(4)}=-\left(g_x^{(0)}+\frac{\alpha\gamma}{x}g^{(0)}\right)f^{(4)} \\
&\quad-\gamma\left\{f_x^{(0)}+\frac{\alpha}{x}f^{(0)}+\frac{3(\alpha+1)}{\gamma}\right\}g^{(4)}-\gamma\left\{f_x^{(1)}+\frac{\alpha}{x}f^{(1)}\right. \\
&\quad\left.+\frac{2(\alpha+1)\lambda_1}{\gamma}\right\}g^{(3)}-\gamma\left\{f_x^{(2)}+\frac{\alpha}{x}f^{(2)}+\frac{(\alpha+1)\lambda_2}{\gamma}\right\}g^{(2)} \\
&\quad-\gamma\left(f_x^{(3)}+\frac{\alpha}{x}f^{(3)}\right)g^{(1)}+(\alpha+1)g^{(0)}\lambda_4-f^{(1)}g_x^{(3)}-f^{(2)}g_x^{(2)}-f^{(3)}g_x^{(1)}
\end{aligned}
\tag{A15}
$$

(別付2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ の計算値

α	γ	λ_1	λ_2
0	1.2	-2.2442308530503970 Q+00	3.9564683964561380 Q+00
	1.4	-2.1437700653773060 Q+00	2.7222102829959366 0 Q+00
	1.67	-2.0686906527673010 Q+00	2.2732241503519576 0 Q+00
1	1.2	-2.0423854156179400 Q+00	2.5499151501268420 Q+00
	1.4	-1.9835631599572110 Q+00	2.1016031889128730 Q+00
	1.67	-1.9374332774541770 Q+00	1.8086491784128960 Q+00
2	1.2	-1.9665644515181170 Q+00	2.2672147750430060 Q+00
	1.4	-1.9181543431493730 Q+00	1.8897950898808980 Q+00
	1.67	-1.8785212257677740 Q+00	1.6498428416281740 Q+00

α	γ	λ_3
0	1.2	-7.3818170703124990 Q+00
	1.4	-4.1620569256591800 Q+00
	1.67	-2.6939388964843750 Q+00
1	1.2	-4.9557340409278870 Q+00
	1.4	-2.9746408536314950 Q+00
	1.67	-1.9914195486940150 Q+00
2	1.2	-4.22443826403064013988034092977840 Q+00
	1.4	-2.5998920246215970 Q+00
	1.67	-1.7628672472451570 Q+00

α	γ	λ_4
0	1.2	1.9833198189735413 Q+01
	1.4	7.4358017444610596 Q+00
	1.67	3.5221500396728516 Q+00
1	1.2	1.28013690965443527325362538249464 Q+01
	1.4	5.2164118436630815 Q+00
	1.67	2.5920618039162946 Q+00
2	1.2	—
	1.4	4.51333719374365974208451746108039 Q+00
	1.67	2.2821958264822513 Q+00