

渦による空力音の発生

九大 工学部

神部 勉

兼田登世子

I. はじめに

よく知られているように、乱流ジェットには大きいスケールの渦構造が特徴に見られ、その渦の相互作用がノイズ源の一つであるとされている。低マッハ数の流れでは、理論的にも流れの渦度が音源となることが示されるが、これは渦音波 (vortex sound) とよばれている (Powell 1964, Obermeier 1967, Crow 1970, Howe 1975, Möhring 1978)。この目的は、粘性なし流体の弱圧縮性の流れが局在しているときに、そこから放射される音圧の一般的表現を求めることであり、さらにそれを具体的な渦輪の相互作用からの音に適用することである。

渦度分布は長さスケール l の有限領域に局在していると仮定する。もし流れの速さの代表的スケールが u であるとする、放射音の長さスケール λ は次のように定義されよう：

$$\lambda = c_0 \frac{l}{u} .$$

これは時間スケール l/u の間に伝播する音波の長さを意味する。ここで c_0 は静止流体中の音速である。低マッハ数 M の流れでは

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{u}{c_0} = M \ll 1$$

となつて、音場の長さスケール λ は内部の流れ場のスケール l よりもずっと大きいことがわかる。このような二種の長さスケールを有する流れの問題には特異摂動法が有効である。

2. 一般の渦系からの放射音

Obermeier および Crow の方法に従うと、内部の渦領域は M が小さい極限で非圧縮流の方程式に帰着される:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0, \quad \nabla^2 p = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j,$$

ここで v_i は速度成分, p は圧力, ρ_0 は静止密度である。

他方, 外部の音場の方程式は波動方程式となる:

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_i^2} \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = 0,$$

ここで $\hat{x}_i = M x_i$ は外部変数, Φ はポテンシャル。

これら両領域の各々の解を中間領域で結び合わせれば, 両領域で一様に成立する解が得られる。このようにして外部音

圧 p の一般式が得られる：

$$p = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\dot{Q}_{ij}(t - \frac{r}{c_0})}{r},$$

$$Q_{ij}(t) = -\frac{1}{12\pi} \int y_i [y \times \omega(y, t)]_j dy.$$

ここで $r = |x|$ で、 $\omega(y, t)$ は内部領域の渦度分布である。
この音圧 p は ω に線型であり、従って内部流 $v_i(y, t)$ にも線型の汎関数である点が特徴である。

この方法を次の軸対称問題に応用する。 N の渦輪が共通の対称軸をもって相互作用するときに放射する音圧は、音波のスケール入に比べて十分遠方では

$$p(r, \theta, t) = \frac{\rho_0}{4c_0^2} \ddot{Q}(t - \frac{r}{c_0}) \frac{1}{r} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3})$$

となる。ここで

$$Q(t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2(t) Z_i(t),$$

Γ_i は渦輪 i の強さ、 $R_i(t)$ と $Z_i(t)$ は円柱座標での渦輪 i の位置で、それぞれ動径および軸座標でこれらは時間の関数である。また r, θ は観測点の位置座標であり、それぞれ原点からの距離および対称軸からの角度である。

音圧の時間因子 $Q(t)$ を得るには、渦輪の相互作用運動を知

る必要がある。渦輪の核（渦度 $\neq 0$ のところを、ドーナツ状をなす）が細いと仮定すると、渦輪の運動の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_i R_i \frac{dZ_i}{dt} &= \frac{\Gamma_i^2}{4\pi} \log\left(\frac{8R_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\partial U}{\partial R_i} \\ \Gamma_i R_i \frac{dR_i}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial Z_i} \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, N)$$

で与えられる (Dyson, 1893)。ここで

$$U = \sum_{i>j} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi} I_{ij},$$

$$I_{ij} = \sqrt{R_i R_j} \left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) F(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} E(k_{ij}) \right],$$

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_i R_j}{(Z_i - Z_j)^2 + (R_i + R_j)^2},$$

$F(k)$, $E(k)$ は第1種, 第2種の完全楕円積分で, ε_i は渦輪 i の渦核の半径で, 渦輪の半径 R_i よりもずっと小さいとする。上の方程式が(数値的に)積分されれば, $\ddot{Q}(t)$ が知られて音圧 $p(r, \theta, t)$ が与えられることになる。

3. 渦輪の正面衝突からの放射音

特に, 渦輪の数が2つで, 同じ強さ, 同じ大きさの渦輪が正面衝突するときには次の条件が与えられよう:

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -\Gamma (< 0), \quad R_1 = R_2 = R(t)$$

$$Z_1 = -Z_2 = Z(t), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t), \quad \varepsilon^2 R = \text{const.}$$

この条件のもとで渦輪の運動方程式を数値積分した結果が、図1、図2に示されている。図1は渦輪の軸座標 Z/R_0 を無次元時間 $t_* = tU_0/R_0$ に対し示したもので、 R_0, ε_0 は $t \rightarrow -\infty$ における渦輪の半径および渦核の半径であり、 $U_0 = \Gamma/4\pi R_0$ である。図2は渦輪の軌道 (R, Z) を示す。両図とも ε_0 の大きさによる運動の違いを示す。図3は音圧の時間因子 $\ddot{Q}(t)$ を示す。図中の破線部は、渦輪が近づきすぎて、計算上、2渦輪間の距離が渦核の半径よりも小さくなってしまったことを示し、このときは計算の前提がなりたたないのでより精密な解析が必要とされるところである。

ここに示した理論計算に対応する実験は Kambe & Murakami (1979) によって報告されている。

文献：

- Crow, S.C. 1970 *Studies in Appl. Math.* 49, 21.
 Dyson, F.W. 1893 *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 184, 1041.
 Howe, M.S. 1975 *J. Fluid Mech.* 71, 625.
 Kambe, T. & Murakami, T. 1979 *Mechanics of Sound Generation in Flows* (ed. E.-A. Müller), 123. Springer-Verlag.
 Möhring, W. 1978 *J. Fluid Mech.* 85, 685.
 Obermeier, F. 1967 *Acustica*, 18, 238.
 Powell, A. 1964 *J. Acoust. Soc. Am.* 36, 177.

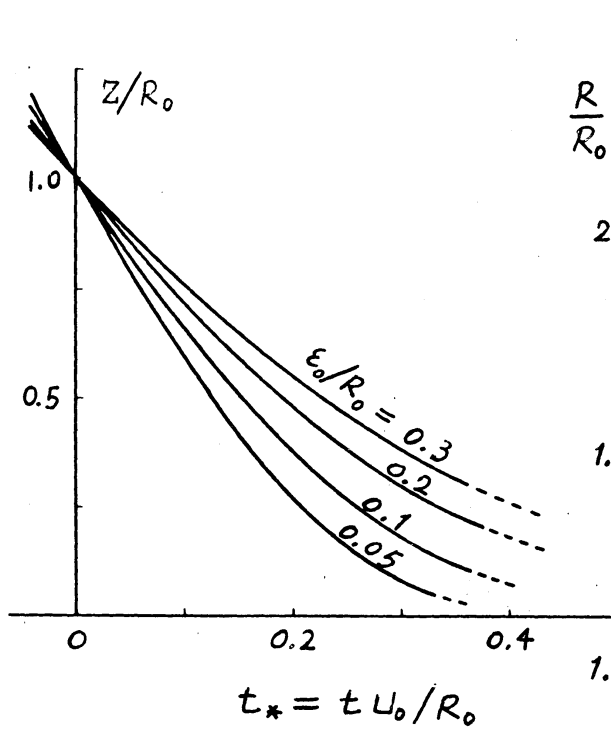


図 1. $Z-t$ 図.

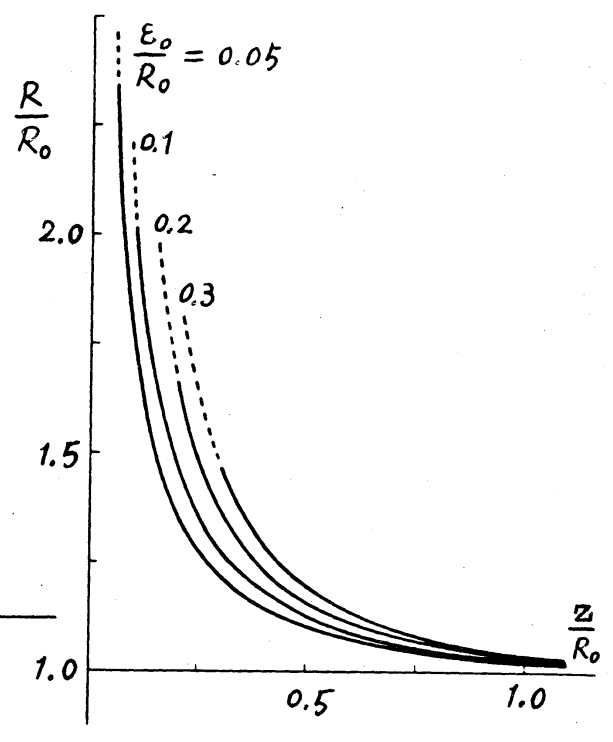


図 2. 渦輪の軌道 (Z, R)

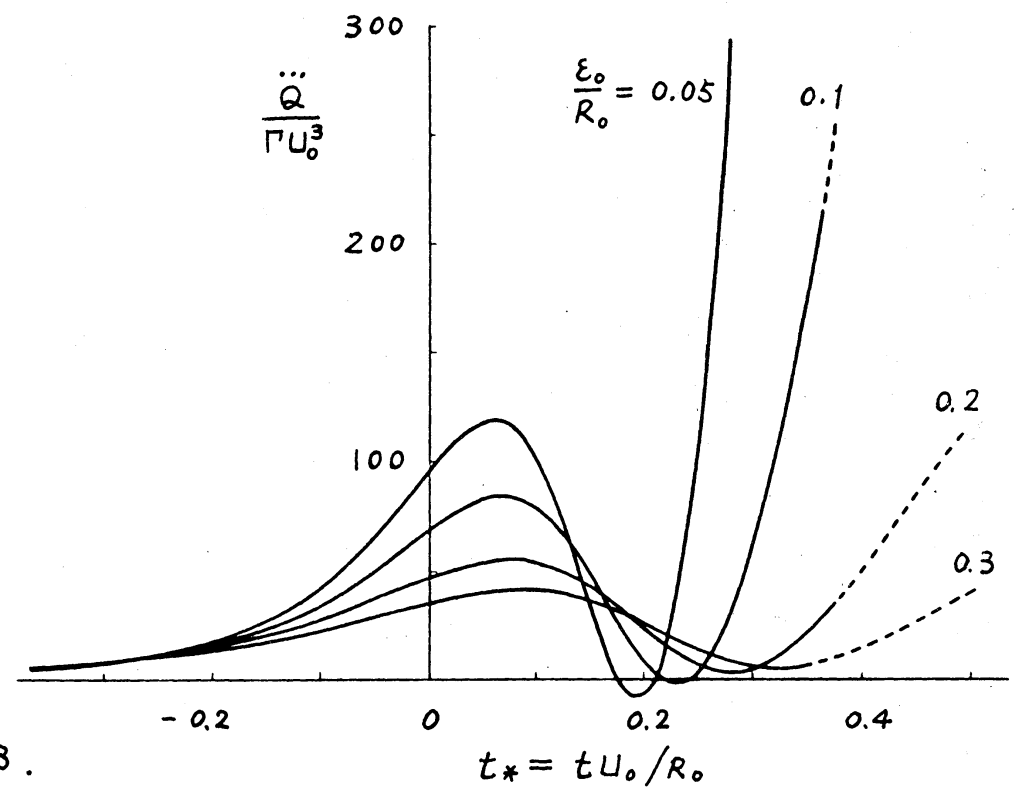


図 3.