

## 振動平板上の非定常斜めよどみ点流れ

慶大 工 竹光 信正

慶大 物理 松信 八十男

## § 1. はしがき

2次元のよどみ点流れは、流体力学の歴史のなかでも基本的で興味のある流れの一つである。Hiemenz<sup>1)</sup>は、無限平板に垂直にあたるよどみ点流れを研究し、2次元非圧縮粘性流体の定常な Navier-Stokes 方程式（以下、N-S 方程式と略記する）の厳密解を導いた。この解は、Hiemenz 流としてよく知られている。<sup>2-4)</sup> また、Glauert<sup>5)</sup>は、自身の面内に単振動する平板に垂直にあたるよどみ点流れを詳しく研究している。Glauert の解は、2次元非圧縮粘性流体の非定常 N-S 方程式の厳密解である。

最近、Matunobu<sup>6,7)</sup>は、生理流体力学の立場から、固定された無限平板に拍動性の流れが垂直にあたる時の流れの構造を Oseen タイプの線形非定常 N-S 方程式にもとづいて解析的に研究している。定常な流れに対する解析結果によると、

流れの全領域について Matunobu の解は Hiemenz の解と非常によい一致をみている。方程式の線形性を利用して、平板に流れが垂直にあたる拍動流に一樣せん断流を重ね合せると、平板に斜めにあたる拍動性よとみ点流れの近似解をうることができる。

ところで、ごく最近、Tamada<sup>8)</sup> は無限平板に斜めにあたる定常よとみ点流れの厳密解を見い出した。Tamada の解は、2次元非圧縮粘性流体の定常 N-S 方程式の厳密解であり、無限遠で Hiemenz 流と一樣せん断流との重ね合せである。この結果を使い、Tamada は Matunobu の斜めよとみ点流れの解の定常の極限と比較し、よとみ点の位置に関しては、Matunobu の近似解に少からざる誤差があることを指摘した。

以下の議論にはふたつの目的がある。ひとつは、縦振動する平板に斜めにあたる Hiemenz 流の厳密解を見い出すことである。これは Glauert と Tamada の仕事の拡張である。いまひとつの目的は、よとみ点が周期的に動く流れの一般的な性質を調べることである。とくに、よとみ点が固体壁面上をある点を中心にしてふらつく流れは生理流体力学的に興味がある。たとえば、狭窄のある血管内の拍動流によりひきおこされる流れ<sup>9,10)</sup> は、平均的なよとみ点付近で異常に大きな壁面すり応力の増大をひきおこし、このため血管壁が損傷を受け

る。<sup>11)</sup>

以下の章において、流れの場を空間に固定した静止座標系と、物体に固定した動座標系とにおいて解析する。いずれの座標系でも厳密解を見出すことができるが、動座標系における解析結果の方がよどみ点流れの構造を知るのに便利である。

## § 2. 静止座標系における解析

自身の面内で単振動する無限平板に斜めにあたる流れを考える。空間に固定して静止した  $x, y$  直交座標系をとる。ただし、 $x$  軸は壁にそって、 $y$  軸は壁に垂直にとるものとする。

2次元非圧縮粘性流体の非定常 N-S 方程式、あるいはこれと等価なうず度輸送方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

とかける。ここで、 $u, v$  は静止座標系からみた流体の  $x, y$  方向の速度成分、 $\omega$  はうず度で  $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  で定義される。また、 $t$  は時間で、 $\nu$  は流体の動粘性係数である。いま、 $k$  を定数として、流れ関数を

$$\psi = k [x f(y) + g(y, t)] \quad (2.2)$$

の形に仮定すると、

$$\left. \begin{aligned} u &= \partial\psi/\partial y = k[xf_y + g_y], \\ v &= -\partial\psi/\partial x = -kf, \\ \omega &= -(\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2) = -k[xf_{yy} + g_{yy}] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

となる。

さて、平板が速度  $U \cos \Omega t$  で振動しているものとし、無限遠で流れが斜めの Hiemenz 流になっているものとするれば、境界条件は

$$f = g = 0, \quad f_y = 0, \quad g_y = (U/k) e^{i\Omega t} \quad \text{at } \eta = 0 \quad (2.4)$$

$$f \sim \eta, \quad g \sim \frac{1}{2} \gamma \eta^2 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

である。ただし、 $\gamma$  はせん断流の強さを示す無次元定数であり、複素表示のものはその実部のみが物理的意味をもつものとする。式 (2.3) を (2.1) に代入して  $\eta$  について一回積分すると、

$$\Delta f_{\eta\eta\eta} + k f f_{\eta\eta} - k f_{\eta}^2 = -k, \quad (2.6)$$

$$\Delta g_{\eta\eta\eta} + k f g_{\eta\eta} - k f_{\eta} g_{\eta} - g_{\eta t} = 0 \quad (2.7)$$

をうる。ここで、積分定数は境界条件 (2.5) により定められた。

つぎに、変数変換

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sqrt{U/k} \zeta, \quad t = \tau/\Omega, \\ f(\eta) &= \sqrt{U/k} F(\zeta), \quad g(\eta, t) = (U/k) G(\zeta, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\beta = \Omega/k, \quad \varepsilon = U/\sqrt{Uk} \quad (2.9)$$

をおこなうと、式 (2.6), (2.7) から無次元表示

$$F''' + FF'' - F'^2 = -1, \quad (2.10)$$

$$G''' + FG'' - F'G' - \beta \dot{G}' = 0 \quad (2.11)$$

をうる。ただし、' は  $\eta$  微分を意味し、 $\dot{\phantom{x}}$  は  $z$  微分を意味する。境界条件 (2.4), (2.5) は

$$F = G = 0, \quad F' = 0, \quad G' = \varepsilon e^{iz} \quad \text{at } \eta = 0 \quad (2.12)$$

$$F' \rightarrow 1, \quad G'' \rightarrow \gamma \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

となる。微分方程式 (2.10) はよく知られており、その解は数値的に積分されている。<sup>3)</sup>

いま、

$$G = G_0 + \varepsilon G_1 e^{iz} \quad (2.14)$$

とおくと、式 (2.11) から

$$G_0''' + FG_0'' - F'G_0' = 0, \quad (2.15)$$

$$G_1''' + FG_1'' - F'G_1' - i\beta G_1' = 0 \quad (2.16)$$

となる。境界条件 (2.12), (2.13) は

$$G_0 = G_0' = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_1' = 1 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (2.17)$$

$$G_0'' \rightarrow \gamma, \quad G_1' \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

とかきなおされる。ここで注意すべきことは、方程式 (2.14), (2.15), (2.16) にあらわれるパラメータ  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  に対し何の制限もしていないことである。すなわち、任意の  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  に対して、境界条件 (2.17), (2.18) を満足する微分方程式 (2.15), (2.16) の解は Navier-Stokes 方程式 (2.1) の厳密

解になっている。また、展開 (2.14) は高次の振動成分をふくまない。

微分方程式 (2.15) は  $\gamma = 2$  の場合につき、Tamada<sup>8)</sup> によって数値的に解が与えられているが、これは任意の  $\gamma$  に対し

$$G_0'(\eta) = c\gamma F''(\eta) \int_0^\eta \frac{\exp(-\int_0^\eta F(\eta) d\eta)}{F''(\eta)^2} d\eta \quad (2.19)$$

$$c = 0.7494.$$

と解析的な形で表現できる (see Appendix)。式 (2.19) を微分して  $\eta = 0$  とおくと

$$G_0''(0) = c\gamma / F''(0) = 0.6079\gamma \quad (2.20)$$

をうる。これは後に壁面のずり応力を計算するときに必要なである。また、微分方程式 (2.16) は Glauert<sup>5)</sup> によって解析的な形で解が与えられている。とくに、 $\beta$  が十分小さいとき

$$-G_1''(0) \cong 0.8113 + 0.4932 i\beta + 0.0947\beta^2 \quad (2.21)$$

であり、 $\beta$  が大きいときには

$$\begin{aligned} -G_1''(0) \cong (i\beta)^{1/2} + \frac{3}{8} F''(0) (i\beta)^{-1} - \frac{3}{16} (i\beta)^{-3/2} \\ - \frac{33}{128} F''(0)^2 (i\beta)^{-5/2} + \frac{129}{256} F''(0) (i\beta)^{-3} - \frac{139}{512} (i\beta)^{-7/2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

である。 $\beta$  が 1 で式 (2.21) で計算された値と (2.22) で計算された値はほぼ等しくなる。実際に計算してみると、

$$-G_1''(0) = 0.9060 + 0.4932 i \quad (\text{by eq. (2.21)})$$

$$-G_1''(0) = 0.9247 + 0.6243i \quad (\text{by eq. (2.22)})$$

となる。また、微分方程式 (2.16) を  $\beta = 1$  の場合につき、数値的に積分すると、

$$-G_1''(0) = 0.89588 + 0.46607i \quad (\text{by eq. (2.16)})$$

がえられる。

以上の結果を使うと、任意の  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  に対し、流れ関数  $\psi^*$ ,  $u^*$ ,  $v^*$  なじを無次元表示できる。すなわち、

$$\psi^* \equiv \psi/\omega = \varepsilon F(\eta) + G_0(\eta) + \varepsilon G_1(\eta) e^{i\tau}, \quad (2.23)$$

$$u^* \equiv u/\sqrt{\omega k} = \varepsilon F'(\eta) + G_0'(\eta) + \varepsilon G_1'(\eta) e^{i\tau}, \quad (2.24)$$

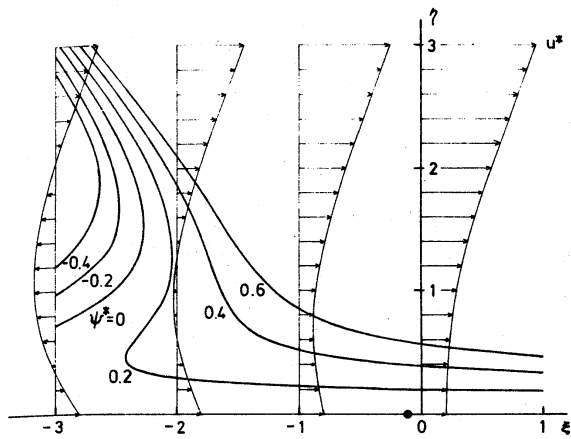
$$v^* \equiv v/\sqrt{\omega k} = -F(\eta) \quad (2.25)$$

さらに、無次元壁面すり応力  $\sigma^*$  を  $\sigma^* = (\partial u^*/\partial \eta)_{\eta=0}$  で定義すれば、

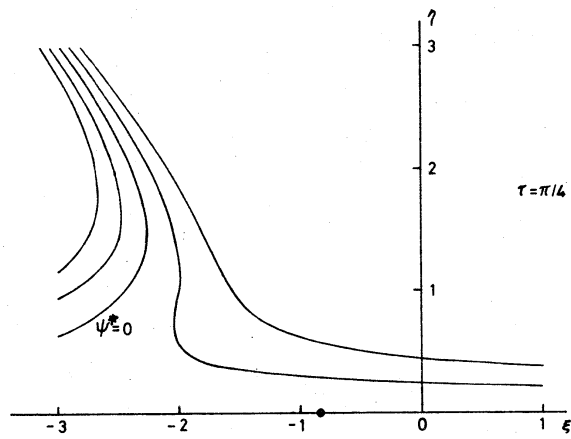
$$\sigma^* = \varepsilon F''(0) + G_0''(0) + \varepsilon G_1''(0) e^{i\tau} \quad (2.26)$$

となる。ただし、 $x$  は  $\xi = \sqrt{k}/\omega x$  で無次元化した。

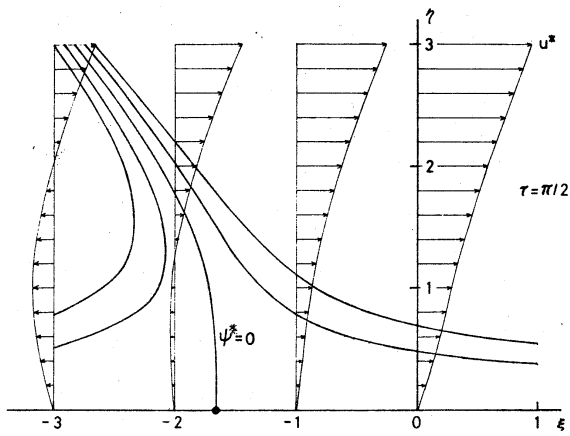
図 1.1 (a) - (h) に  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = \gamma = 2$  としたときの流線  $\psi^*$  と速度成分  $u^*$  を示す。図中  $\bullet$  印は壁面すり応力が 0 となる点を示す。図にみるように、壁面すり応力が 0 となる点は各時刻で壁面上に存在するが、平板の速度が 0 となる瞬間にのみ流れのよこみ点と一致する。



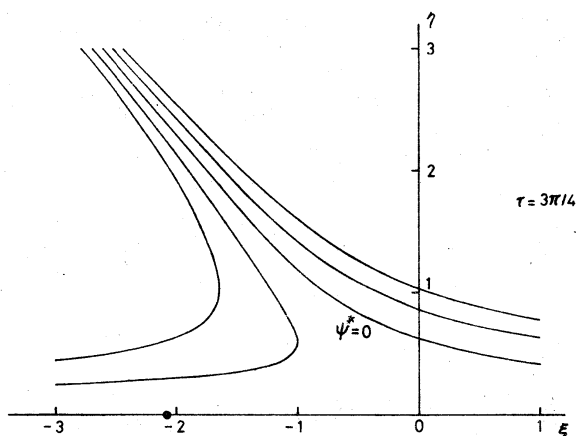
(a)  $\tau = 0$



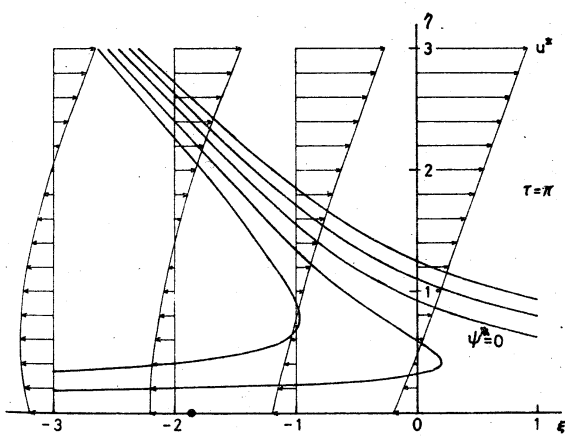
(b)  $\tau = \pi/4$



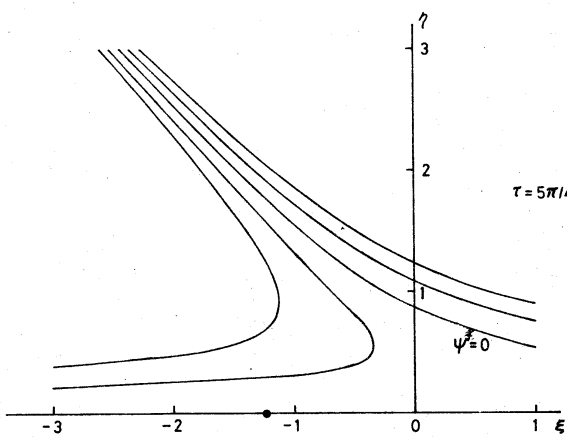
(c)  $\tau = \pi/2$



(d)  $\tau = 3\pi/4$



(e)  $\tau = \pi$



(f)  $\tau = 5\pi/4$



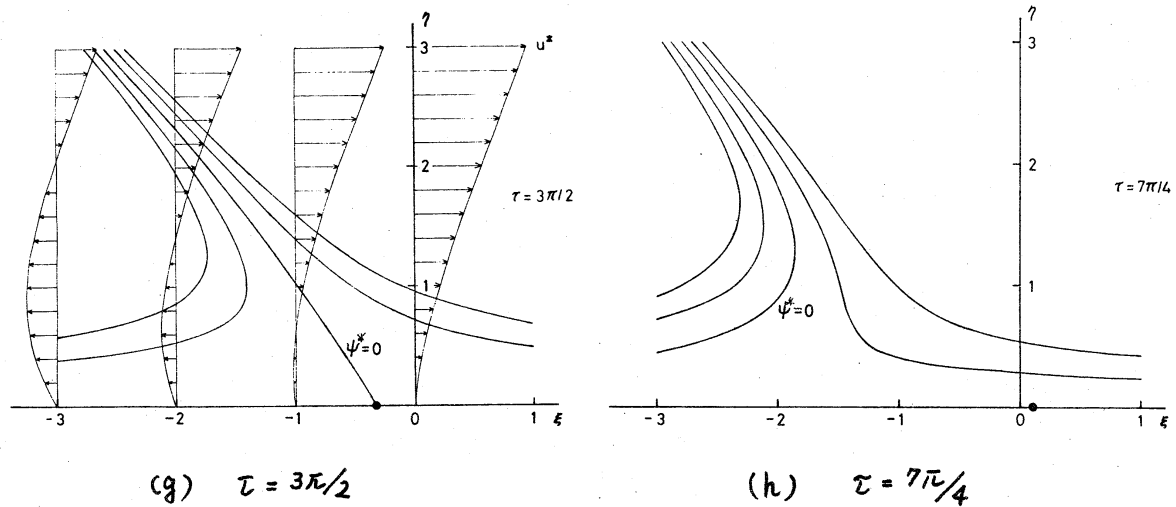


図 1.1 静止座標系からみた各時刻における流線 ( $\varepsilon=1$ ,  $\beta=2$ ,  $\gamma=2$ )。速度分布は  $\tau=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  のときに示した。

### § 3. 動座標系における解析

この章では物体に固定して直交  $x, y$  座標系をとる。§ 2 と同様  $x$  軸を壁にそってとり、 $y$  軸を壁に垂直にとるものとする。動座標系においては、運動方程式にみかけの圧力勾配があらわれるので、運動方程式は静止座標系におけるものと異なるが、うず度輸送方程式は (2.1) と同じ形になる。動座標系における流れ関数  $\psi$  を

$$\psi = k[xf(y) + h(y, t)] \quad (3.1)$$

の形に仮定する。境界条件は

$$f = h = 0, \quad f_y = h_y = 0 \quad \text{at } y=0 \quad (3.2)$$

$$f_y \rightarrow 1, \quad h_y \rightarrow \gamma y - (U/k)e^{i\Omega t} \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

である。すなわち、壁から十分遠く離れたところで流れは速度  $-U \cos \Omega t$  で振動する。変数変換

$$h = (U/k) [G_0(\eta) - \varepsilon H(\eta) e^{i\tau}] \quad (3.4)$$

を施すと、 $H$  に対する微分方程式は

$$H''' + FH'' - F'H' - i\beta H' = -1 - i\beta \quad (3.5)$$

となる。境界条件は

$$H = H' = 0 \quad \text{at } \eta = 0, \quad (3.6)$$

$$H' \rightarrow 1 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

である。Glauert<sup>5)</sup>により、境界条件(3.6), (3.7)を満足する微分方程式(3.5)の解は

$$H'(\eta) = \frac{F'(\eta) + i\beta G_1'(\eta) - i\beta}{1 - i\beta} \quad (3.8)$$

で与えられることがわかっている。定常成分  $F$ ,  $G_0$  は、動座標系においても変換をうけない。したがって、動座標系においても Navier-Stokes 方程式の厳密解がえられたことになる。

以上の結果から、動座標系における流れ関数  $\psi^*$ , 速度成分  $u^*$ ,  $v^*$  および壁面すり応力  $\sigma^*$  は

$$\psi^* = \varepsilon F(\eta) + G_0(\eta) - \varepsilon H(\eta) e^{i\tau}, \quad (3.9)$$

$$u^* = \xi F'(\eta) + G_0'(\eta) - \varepsilon H'(\eta) e^{i\tau}, \quad (3.10)$$

$$v^* = -F(\eta), \quad (3.11)$$

$$\sigma^* = \xi F''(0) + G_0''(\eta) - \varepsilon H''(0) e^{i\tau} \quad (3.12)$$

となる。よどみ点の位置  $\xi_s$  は  $\sigma^* = 0$  より

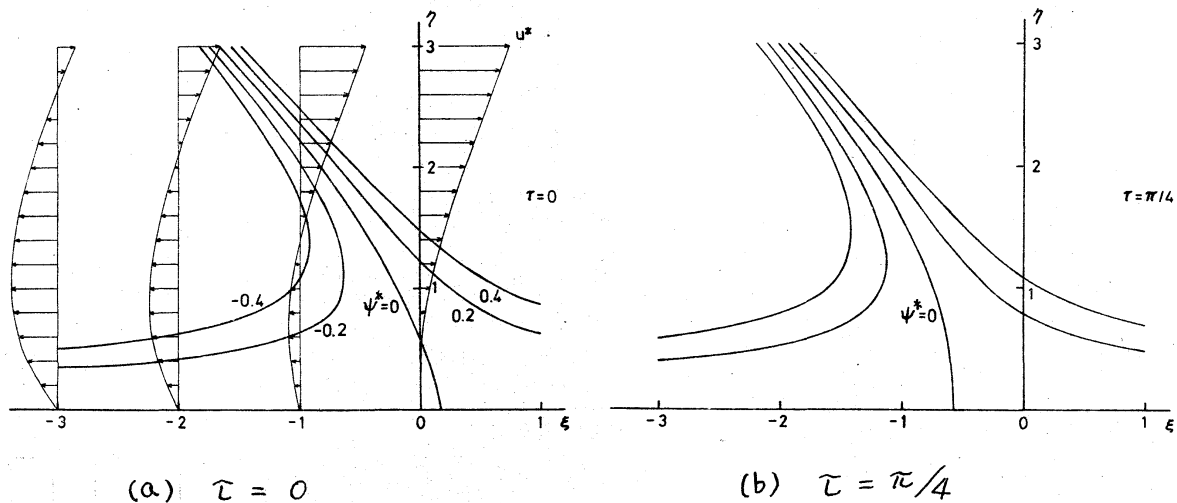
$$\xi_s = -(G_0''(0) - \varepsilon H''(0) e^{i\tau}) / F''(0) \quad (3.13)$$

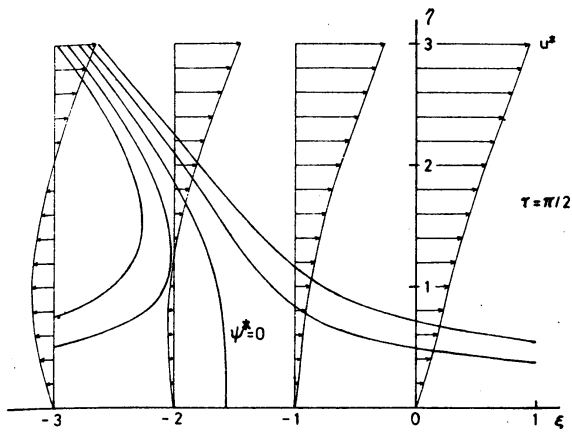
である。したがって、よどみ点の時間平均的位置  $\xi_{s0}$  (いまの場合、定常流のよどみ点と一致する) における壁面すり足の振動成分  $\sigma_u^*$  は、式 (3.12) と (3.13) から

$$\sigma_u^* = -\varepsilon H''(0) e^{i\tau} \quad (3.14)$$

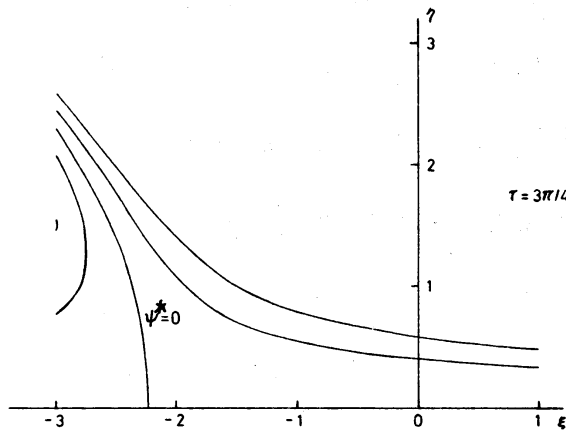
となる。

図 2.1 (a) - (b) に  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 2$  としたときの流線  $\psi^*$  と速度成分  $u^*$  を示す。動座標系においては、図にみるように、 $\psi^* = 0$  の流線が壁とぶつかる点と流れのよどみ点はつねに一致する。

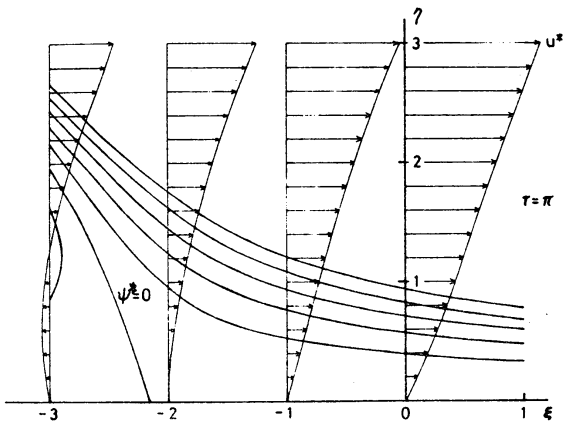




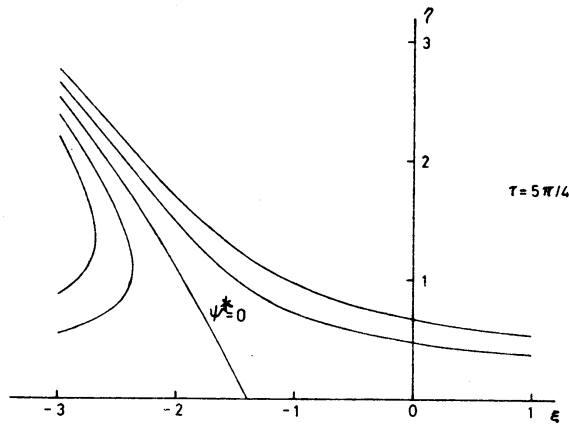
(c)  $\tau = \pi/2$



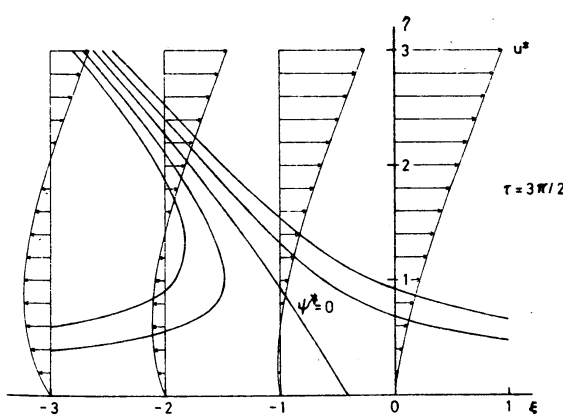
(d)  $\tau = 3\pi/4$



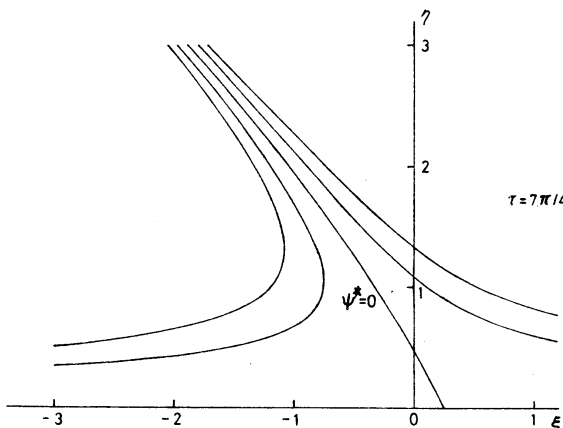
(e)  $\tau = \pi$



(f)  $\tau = 5\pi/4$



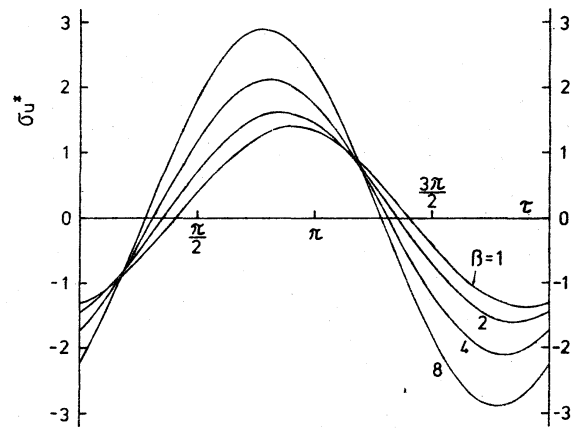
(g)  $\tau = 3\pi/2$



(h)  $\tau = 7\pi/4$

図 2.1 動座標系における流線と速度分布 ( $\varepsilon=1, \beta=\gamma=2$ )

図 2.2 はよじみ点の時間平均的位置  $\xi = \xi_{s0}$  における壁面すり応力の振動成分  $\sigma_u^*$  の振動数依存性を示す。式 (2.20) から、 $G_0''(0)$  はせん断流の強さ  $\gamma$  に比例する。



したが、 $\tau$ 、各時刻におけるよじみ点の位置  $\xi = \xi_s$  は式 (3.13) から  $\gamma$  に依存するが、壁面すり応力の振動成分  $\sigma_u^*$  は (3.14) から  $\gamma$  に無関係である。図 2.2 にみるように、振動数パラメータ  $\beta$  が大きくなると、壁面すり応力の振動成分  $\sigma_u^*$  も大きくなる。  $\beta \ll 1$  のとき、壁面すり応力の振動成分  $\sigma_u^*$  は

$$\sigma_u^* \doteq -1.2326 \varepsilon \cos(\tau + \delta), \quad \delta \doteq 0.3418\beta \quad (3.15)$$

となり、  $\beta \gg 1$  のとき

$$\sigma_u^* \sim -\varepsilon \sqrt{\beta} \cos(\tau + \frac{\pi}{4}) \quad (3.16)$$

となる。すなわち、振動数が低いとき、壁面すり応力の振動成分の振幅は、無次元速度振幅  $\varepsilon$  に比例し、その位相のすすみは  $\beta$  に比例する。逆に、振動数が高いとき、壁面すり応力の振動成分の振幅は  $\varepsilon \sqrt{\beta}$  に比例し、位相のすすみは極限值  $\pi/4$  に漸近する。

これらの結論は、無限遠の境界条件のちがいはあるが、線

形化した  $N-S$  方程式の解析結果<sup>6)</sup>と比例定数を除いて一致する。

#### § 4. 結論

以上の解析結果から、つぎのことを結論することができる。

自身の面内で縦振動している無限平板に斜めにあたる流れは3つの常微分方程式の解の重ね合せで表わすことができる。これらの微分方程式は、すでにそれぞれ Hiemenz, Glauert, Tamada によつて解かれている。したがつて、結果的に、これら3つの解を重ね合せただけで2次元の非圧縮粘性流体の非定常 Navier-Stokes 方程式の厳密解を見出すことができた。また、物体に座標系を固定した動座標系における解析もまた厳密解になっているが、よどみ点流れの構造を知るには動座標系における解析の方が便利である。さらに、本解析結果と線形化した Navier-Stokes 方程式の解析結果を比較すると、無限遠の境界条件のちがいはあるが、振動数が高いとき、よどみ点の平均的位置における壁面すり応力は振動数の平方根に比例するという定量的な一致をみた。

終りに臨み、数値解析上の情報について玉田瑠教授に貴重な御指示を戴いた。ここに厚く御礼申し上げる。また、この研究は文部省科学研究費の支持によるものである。

## Appendix

$G_0$  の解析的な形を定めるためにはつきのようにすればよい。<sup>5)</sup> 微分方程式 (2.15) を再記すると

$$G_0''' + F G_0'' - F' G_0' = 0 \quad (\text{A}\cdot 1)$$

である。境界条件は、

$$\left. \begin{array}{ll} G_0 = G_0' = 0 & \text{at } \eta = 0, \\ G_0'' \rightarrow 0 & \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (\text{A}\cdot 2)$$

である。式 (2.10) を  $\eta$  について微分すると

$$F'''' + F F'''' - F' F'' = 0$$

がえられるから、式 (A.1) と比較して  $G_0' = F''$  は (A.1) の一つの特解であることがわかる。したがって、他の特解は  $G_0' = F'' \int [F'']^{-2} \exp(-\int F d\eta) d\eta$  と定まる。これより、式 (A.1) の一般解は  $b$  と  $c$  を定数として

$$G_0'(\eta) = b F''(\eta) + c F''(\eta) \int_0^\eta [F''(\eta)]^{-2} \exp(-\int_0^\eta F(\eta) d\eta) d\eta \quad (\text{A}\cdot 3)$$

となる。  $F''(0) \neq 0$  であるから、境界条件 (A.2) より  $b=0$  となる。  $\eta \rightarrow \infty$  のとき、式 (A.3) の第 2 項は発散するから定数  $c$  を定めるためには  $G_0$  の漸近形を調べなければならない。  $F$  の漸近形は文献<sup>3)</sup> により

$$F' \sim 1 - \alpha_1 (\zeta^{-3} - 6\zeta^{-5} + O(\zeta^{-7})) \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2), \quad (\text{A}\cdot 4)$$

$$\alpha_1 \doteq 0.645, \quad \zeta = \eta - 0.64790$$

で与えられることがわかっている。これより、

$$F \sim \zeta + O(\zeta^{-4} \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2)),$$

$$\int_0^\infty F(\eta) d\eta \sim \frac{1}{2}\zeta^2 + \alpha_2 + O(\zeta^{-5} \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2)),$$

$$\alpha_2 \doteq 0.150$$

$$\exp(-\int_0^\infty F(\eta) d\eta) \sim \alpha_3 \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2), \quad (\text{A}\cdot 5)$$

$$\alpha_3 = \exp(-\alpha_2)$$

$$F'' \sim \alpha_1 (\zeta^{-2} - 3\zeta^{-4}) \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2) + O(\zeta^{-6} \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2)), \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$$F''' \sim \alpha_1 (-\zeta^{-1} + \zeta^{-3}) \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2) + O(\zeta^{-5} \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2)) \quad (\text{A}\cdot 7)$$

となる。式 (A.3) を微分して,

$$\begin{aligned} G_0''(\zeta) = & c F'''(\zeta) \int_0^\zeta [F''(\eta)]^{-2} \exp(-\int_0^\eta F(\eta) d\eta) d\eta \\ & + c [F''(\zeta)]^{-1} \exp(-\int_0^\zeta F(\eta) d\eta) \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

がえられる。ζが十分大きいとして式 (A.5) - (A.8) を代入して式 (A.8) を評価すると,

$$G_0'' \sim c (\alpha_3/\alpha_1) (1 + 3\zeta^{-2})$$

となる。ふたたび境界条件 (A.2) より

$$c = 0.7494 \gamma$$

がえられる。

### 参考文献

- 1) K. Hiemenz: Göttingen Dissertation 1911 : and Dingler's Polytech. J. 326 (1911) 321.



- 2) H. Schlichting : Boundary Layer Theory  
(Mc Graw - Hill, 1960).
- 3) L. Rosenhead (Editor) : Laminar Boundary  
Layers (Oxford University Press, 1963).
- 4) G. K. Batchelor : An Introduction to Fluid  
Dynamics (Cambridge University Press, 1970).
- 5) M. B. Glauert : J. Fluid Mech. 1 (1956) 97.
- 6) Y. Matunobu : J. Phys. Soc. Jpn. 42 (1977) 2041.
- 7) Y. Matunobu : J. Phys. Soc. Jpn. 43 (1977) 326.
- 8) K. Tamada : J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 310.
- 9) Y. Matunobu and M. Arakawa : Biorheology  
11 (1974) 457.
- 10) M. Kawaguti and A. Hamano : Proc. Xth Intern.  
Congr. Angiology, Tokyo (1976), session 26,  
No. 4.
- 11) F. B. Gessner : Circul. Res. 33 (1973) 259.