数理解析研究所講究録
394巻 1980年 201-206

可換環上のtwisted Chevalley群の正規部分群について

熊本大 教養 鈴木和雄

Aを局所環とする。このときW. Klingenberg [5] は$SL_{n+1}(A)$ $Sp_{2n}(A)$ $(n \geqq 1)$ の正規部分群は少数の場合を除いて合同部分群であることを示した。E. Abe [1] は，その一般化として Chevalley-Demazure group scheme G のAにおける点のなす群 $G(\Phi, A)$ の正規部分群の決定は特別の場合を除いてAの ideal とその $\mathbb{Z}$-submodule を決定することに帰着することを示した。更に E. Abe, K. Suzuki [3] はより一般の可換環Aに対して$G(\Phi, A)$の正規部分群の特徴づけについて論じている。

一方 K. Suzuki [4] で [1] の analogy として局所環A上のtwisted Chevalley群 $G_\sigma(\Phi, A)$ の正規部分群の特徴づけをなした。ここではより一般の可換環上のtwisted Chevally群の正規部分群の特徴づけについて [3] の analogy が可能であることを述べたい。

§1 $G_\sigma(\Phi, A)$ のある部分群

Gを単連結又は随伴型の$\Phi = A_n$ $(n \geqq 2)$, D_n $(n \geqq 4)$, E_6 型の単純 Chevalley-Demazure group scheme とする。Aを単位元をもち involutive な自己同型τをもつ可換環とし，σをΦの canonical な involutive な自己同型とする。τ, σに関してGに対応するΦ_σ型のA上の twisted Chevalley 群を$G_\sigma(\Phi, A)$とする。以下定義，記号等はその多くE. Abe〔2〕を用いる。

$a \in A$, $r \in \Phi$に対しそれぞれ$\tau(a) = \bar{a}$, $\sigma(r) = \bar{r}$とかき，$A_0 = \{u \in A \mid u = \bar{u}\}$, $\mathfrak{A} = \{(a, b) \in A \times A \mid a\bar{a} = b + \bar{b}\}$とおく，$\xi = (a, b)$, $\eta = (c, d) \in \mathfrak{A}$に対し，$\xi \dotplus \eta = (a + c, b + d + \bar{a}c)$とおくと$\mathfrak{A}$は$\dotplus$について群を作る。

Aのτ-不変な ideal をIとし，J_0を$\{a + \bar{a}, a\bar{a}u \mid a \in I, u \in A_0\}$から生成された$\mathbb{Z}$-module とする。

(i) $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n+1}$ $(n \geqq 1)$, ${}^2D_n$ $(n \geqq 4)$, ${}^2E_6$ のとき，I_0を次のようなA_0の$\mathbb{Z}$-submodule とする。

(a) $I \cap A_0 \supset I_0 \supset J_0$。

(b) 特に$\Phi_\sigma = {}^2A_{2n+1}$のとき，任意の$a$に対し$a\bar{a}I_0 \subset I_0$。
$\Phi_\sigma = {}^2E_6$ のときI_0はA_0の ideal とする。

(ii) $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n}$ $(n \geqq 1)$のとき，$\mathfrak{A}_I^{(1)}$, $\mathfrak{A}_I^{(2)}$をそれぞれ$\{(0, a - \bar{a}), (ac, a\bar{a}d) \mid a \in I, (c, d) \in \mathfrak{A}\}$, $\{(t, u) \mid u \in I, tt' \in I$ for all $(t', u') \in \mathfrak{A}\}$から生成された$\mathfrak{A}$の部分群とする。

$\mathfrak{a}_I$を次の様な$\mathfrak{a}$の部分群とする。

(a) $\mathfrak{a}_I^{(2)} \supset \mathfrak{a}_I \supset \mathfrak{a}^{(1)}$

(b) 任意の$a \in A$, $(c, d) \in \mathfrak{a}_I$に対し, $(ac, a\bar{a}d) \in \mathfrak{a}_I$

Φ_σの元$S = \{r\}, \{r, \bar{r}\}, \{r, \bar{r}, r+\bar{r}\}$に対応して$I_S$をそれぞれ$I_0$, I, $\mathfrak{a}_I$とする。$E(\Phi_\sigma, I, I_S)$を$\{x_S(a) \mid a \in I_S, S \in \Phi_\sigma\}$から生成された, elementaryな部分群$E(\Phi_\sigma, A)$の正規部分群とし$E^*(\Phi_\sigma, I, I_S)$を$\{x \in G_\sigma(\Phi, A) \mid [x, G_\sigma(\Phi, A)] \subset E(\Phi_\sigma, I, I_S)\}$から生成された$G_\sigma(\Phi, A)$の部分群とする。特に$I_0 = A_0 \cap I$, $\mathfrak{a}_I^{(2)} = \mathfrak{a}_I$のときは$E(\Phi_\sigma, I, I_S) = E(\Phi_\sigma, I)$, $E^*(\Phi_\sigma, I, I_S) = E^*(\Phi_\sigma, I)$とおく。

§2 正規部分群

次の条件を設ける。

(C 1) (i) $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n+1}$ $(n \geq 1)$, ${}^2D_n$ $(n \geq 4)$, ${}^2E_6$のとき, 任意のσ-不変なmaximal ideal $\mathfrak{n}_\lambda$に対して自然な準同型写像$A_0 \to (A/\mathfrak{n}_\lambda)_0$はsurjectiveである。

(ii) $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n}$ $(n \geq 3)$のとき任意の$\mathfrak{n}_\lambda$において$\hat{a}\bar{\hat{a}} = \hat{b} + \bar{\hat{b}}$なる$\hat{a}, \hat{b} \in A/\mathfrak{n}_\lambda$に対して, $a\bar{a} = b + \bar{b}$なる$\hat{a}, \hat{b}$の代表元a, bがとれる。

(A) Aが局所環のとき, $G_\sigma(\Phi, A)$の正規部分群の特徴づけはK. Suzuki [4], G. Stracker [6]に於て論じられているが

[3] を参照すれば半局所環の場合も同様なことが成立つことがわかる。

定理1. A を半局所環とし，A の任意の τ-不変な maximal ideal $\mathfrak{m}_\lambda$ に対し条件 (C1) をみたし，$\underbrace{}_{}$ (G を単連結) $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n+1}, {}^2D_n, {}^2E_6$ において $|A_0/\mathfrak{m}_{\lambda,0}| \geqq 5$ $\mathfrak{m}_{\lambda 0} = A_0 \cap \mathfrak{m}_\lambda$ とする。 $\Phi_\sigma = {}^2A_3, {}^2D_n$ のとき 2 が A で invertible とし，$\Phi_\sigma \neq {}^2A_2, \neq {}^2A_4$ とする。このとき，$G_\sigma(\Phi, A)$ の部分群 N が $E(\Phi_\sigma, A)$ で正規化されるとするとき，次のような A の τ-invariant な ideal I と I_S が一意的に決まる

$$E^*(\Phi_\sigma, I, I_S) \supset N \supset E(\Phi_\sigma, I, I_S)$$

注. G. Stracker [6] は ${}^2A_3, {}^2D_n$ のとき，2 が invertible なる条件をはずすため I, I_0 を定義し直して成功している。

(B) さて，以下 A を単位元をもつ可換環とする。
$\{\mathfrak{m}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の maximal ideal の集合. $\mathfrak{J}$ を maximal ideal の巾乗の有限個の共通部分の集合族，すなわち
$\mathfrak{J} = \{ \mathfrak{a}_\alpha = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_{\mu_i}^{e_i} \mid \mu_i \in \Lambda,\ e_1, \cdots, e_s : \text{自然数} \}$ とし，$\hat{A} = \varprojlim_{\mathfrak{a}_\alpha \in \mathfrak{J}} A/\mathfrak{a}_\alpha$ とする。 $\mathfrak{J}' = \{ \mathfrak{b}_\beta = \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_{\nu_i}^{f_i} \mid \mathfrak{m}_{\nu_i} : A \text{ の } \tau\text{-不変な max. ideal},\ f_1, \cdots, f_t : \text{自然数} \}$ とすると，$\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ は A に同相な位相を与える。

次の条件を設ける。

条件(CII) Aの任意のideal $\mathfrak{a}$に対して

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a}_\alpha \in \mathfrak{J}} (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_\alpha)$$

Noether環や体の直積についてはこの条件はみたされる。またこのとき $\bigcap_{\mathfrak{a}_\alpha \in \mathfrak{J}} (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_\alpha) = \bigcap_{\mathfrak{b}_\beta \in \mathfrak{J}'} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_\beta) = \mathfrak{a}$ となる。

さて2がAにおいてinvertibleであるとき, $E(\Phi_\sigma, I, I_S) = E(\Phi_\sigma, I)$, $E^*(\Phi_\sigma, I, I_S) = E^*(\Phi_\sigma, I)$ となり, また条件(CI)をみたす。任意の$\mathfrak{b}_\beta \in \mathfrak{J}'$に対して$A/\mathfrak{b}_\beta$は半局所環であるから $G_\sigma(\Phi, A/\mathfrak{b}_\beta) = E(\Phi_\sigma, A/\mathfrak{b}_\beta)$ となり, 自然な準同型写像 $G_\sigma(\Phi, A) \longrightarrow G_\sigma(\Phi, A/\mathfrak{b}_\beta)$ はsurjectiveである。したがって

$$G_\sigma(\Phi, \hat{A}) = \varprojlim_{\mathfrak{b}_\beta \in \mathfrak{J}'} G_\sigma(\Phi, A/\mathfrak{b}_\beta) = \varprojlim_{\mathfrak{b}_\beta \in \mathfrak{J}'} G_\sigma(\Phi, A)/G_\sigma(A, \mathfrak{b}_\beta)$$

こゝで $G_\sigma(A, \mathfrak{b}_\beta) = G_\sigma(\Phi, A) \cap G(A, \mathfrak{b}_\beta)$ とする。

$T_\sigma(A)$ を $T(R)$ の σ-不変な元のなす群とする. $E(\Phi_\sigma, A)$ と $T_\sigma(A)$ とから生成される $G_\sigma(\Phi, A)$ の部分群を $G^0_\sigma(\Phi, A)$ とする。このとき [3] と同じ方法によって次の定理が得られる。

定理2. 可換環Aにおいて2がinvertibleとし, 条件(CII)がみたされていると Gを単連結, する。 $\Phi_\sigma = {}^2A_{2n+1}\ (n \geq 1)$, ${}^2D_n\ (n \geq 4)$, ${}^2E_6$ のとき $|A_0/\mathfrak{m}_{\lambda_0}| \geq 5$, $\mathfrak{m}_\lambda$: 任意のmax. ideal が成りたち $\Phi_\sigma \neq {}^2A_2, \neq {}^2A_4$ とする。 $E(\Phi_\sigma, A)$ の任意の元で正規化され

る $G^0_\sigma(\Phi, A)$ の部分群 N に対し，A の σ-不変な ideal I が一意的に存在し

$$G^*_\sigma(\Phi, I) \supset N \supset E(\Phi_\sigma, I)$$

となる，こゝで $G^*_\sigma(\Phi, I)$ は $\{x \in G_\sigma(\Phi, A) \mid [x, G_\sigma(\Phi, A)] \subset G_\sigma(\Phi, I)\}$ から生成される $G_\sigma(\Phi, A)$ の部分群である。

文献

[1] E. Abe: Chevalley groups over local rings. Tôhoku Math. J., 21 (1969) 474–494.

[2] ——: Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings. Sc. Rep. T.K.D. Sect. A, 13 (1976) 194–218.

[3] E. Abe, K. Suzuki: On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings. Tôhoku Math. J., 28 (1976) 185–198.

[4] K. Suzuki; On normal subgroups of twisted Chevalley groups over local rings. Sc. Rep. T.K.D. Sect A, 13 (1976) 238–249.

[5] W. Klingenberg; Linear Gruppen über lokalen Ringen. Amer. J. Math., 83 (1961) 137–153.

[6] G. Strecker: Unitäre Gruppen über beliebigen lokalen Ringen. J. Algebra. 57 (1979) 258–270.