数理解析研究所講究録
394巻 1980年 188-200

可換環上のChevalley群とSteinberg群

筑波大 数学　阿部英一

Steinberg [5] は Chevalley型の単純，単連結 k-代数群 $G(k)$ に対して，現在 Steinberg群とよばれている群 $St(k)$ を生成元と基本関係によって定義した。リー群の covering の理論の群での代数的類似として，

リー群	群
connected	perfect
covering	(perfect) central extension
simply connected	centrally closed
universal covering	universal central extension
fundamental group	Schur multiplier

をとると，$St(k)$ は少数の例外を除いて，$G(k)$の universal covering になっている。しかし，このような類似によって，リー群の homotopy群にあたるものを群に対して定義する

ことはできない。こゝでは，一般に，Strooker [8] などと同じ方法で，可換環上の Chevalley 群に対して，代数的に homotopy 群を定義し，Steinberg 群との関係を調べる.

1. Chevalley 群と Steinberg 群

1.1. Chevalley 群と K_1　一般に，単位元をもつ可換環の圏 $\underline{M_1}$ から群の圏 $\underline{Gr}$ えの関手を群関手とよび，表現可能な群関手を群スキームという. $GL_n(R)$, $SL_n(R)$ をそれぞれ単位元をもつ可換環 R の元を成分にもつ n 次正方行列で行列式が R の単元または 1 である行列の全体のなす群とすると，GL_n, SL_n は群スキームである. $SL_n(\mathbb{C})$ は単連結，単純リー群で，k が代数的閉体のとき，$SL_n(k)$ は連結単純代数群になっている. 一般に，Φ を既約ルート系とすると，群スキーム

$$G = G(\Phi,\ \ ) : \underline{M_1} \longrightarrow \underline{Gr}$$

で，k が代数的閉体のとき，$G(\Phi, k)$ が素体上定義され，素体上分裂する Φ 型の連結，単連結，単純代数群になるものが存在する. $G(\Phi, R)$ を単に $G(R)$ とかき，R 上の Φ 型の Chevalley 群とよぶ. 1-parameter 部分群から生成される $G(R)$ の部分群 $E(R) = \langle x_\alpha(t) ;\ \alpha \in \Phi,\ t \in R \rangle$ を $G(R)$ の elementary 部分群という.

$$E = E(\Phi, \ ): \underline{M_1} \longrightarrow \underline{Gr}$$

は群関手であるが，群スキームではない．SL_n のとき，

$$E(R) = \langle I + tE_{ij} \ ; \ t \in R, 1 \leqq i, j \leqq n, i \neq j \rangle$$

である．ここで，I は単位行列，E_{ij} は (i, j) 成分が1，他のすべての成分が0である行列である．R が体または半局所環ならば $G(R) = E(R)$，また，$\Phi = A_n \ (n > 1)$ のとき，$G(R) \triangleright E(R)$ であるが，一般に，$G(R) \triangleright E(R)$ であるかどうかは未解決である．

$$K_1(\Phi, R) = G(\Phi, R) / E(\Phi, R)$$

とおく．$K_1(\Phi, R)$ は一般には homogeneous space であるが少くとも，$\Phi = A_n \ (n > 1)$ ならば群である．$K_1(\Phi, R) = 0$ なる環 R を Φ に関して generalized Euclidean であるという．半局所環，ユークリッド環などは Φ に関して generalized Euclidean である．

<u>定理</u> 1 (Suslin[9]) $\Phi = A_n \ (n > 1)$ のとき，k が体ならば

$$K_1(\Phi, k[X_1, \cdots\cdots, X_r]) = 0 .$$

一般に，X を集合とし，$k[X]$ を X から生成される自由可換 k 代数とするとき，$K_1(\Phi, k[X]) = 0$ である．

<u>問題</u> 1　Φ を階数 > 1 の既約ルート系，k を体とするとき，$K_1(\Phi, k[X]) = 0$ か？　また，R を整域とするとき，$K_1(\Phi, R[X]) = K_1(\Phi, R)$ か？

1.2. Steinberg群とK_2　Φを階数>1の既約ルート系とし，Rを単位元をもつ可換環とする．$St(\Phi,R)$を$\hat{x}_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi$, $t\in R$から生成され，次の基本関係で定義される群とする．

(A)　$$\hat{x}_\alpha(s)\,\hat{x}_\alpha(t)=\hat{x}_\alpha(s+t)$$

(B)　$$[\hat{x}_\alpha(s),\hat{x}_\beta(t)]=\prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi\\ i,j\geq 1}}\hat{x}_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\,s^i t^j)$$

ここで，$\alpha+\beta\neq 0$，積はルート系Φの順序を1つ固定する．$N_{\alpha\beta ij}$はルート系にのみ関してきまる整数である．

$E(R)$の生成元$x_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi$, $t\in R$は(A),(B)をみたすから自然な上への準同型$\phi: St(\Phi,R)\to E(\Phi,R)$が存在する．このとき，

$$K_2(\Phi,R)=Ker(\phi: St(\Phi,R)\to E(\Phi,R))$$

と定義する．

注意：$St(R)=\lim_{n\to\infty} St(A_n,R)$, $E(R)=\lim_{n\to\infty} E(A_n,R)$とおくと，$St(R)$は$E(R)$のuniversal central extensionで$K_2(R)=Ker(\phi: St(R)\to E(R))$は$E(R)$のSchur multiplierである．

__定理__ 2 (Silvester[4])　kを体とし，$k\langle X\rangle$を集合Xから生成される非可換自由k-代数とすると，

$$K_2(A_n, k\langle X\rangle)=K_2(A_n,k)$$

問題 2　Φを階数>1の既約ルート系，Xを集合，Rを整域とするとき，$K_2(\Phi, R[X]) = K_2(\Phi, R)$が成り立つか？

1.3.　$G(\Phi, R)$ の presentation　Φ，Rを 1.2. と同じとし，$Eu(\Phi, R)$ を $\hat{x}_\alpha(t)$，$\alpha \in \Phi$，$t \in R$ から生成され，基本関係 (A)，(B) および次の (C) で定義される群とする．

$$\text{(C)} \qquad \hat{h}_\alpha(u)\,\hat{h}_\alpha(v) = \hat{h}_\alpha(uv), \quad u, v \in R^*$$

ここで，R^* は Rの単元のなす乗法群で，$u \in R^*$ のとき，

$$\hat{w}_\alpha(u) = \hat{x}_\alpha(u)\,\hat{x}_{-\alpha}(-u^{-1})\,\hat{x}_\alpha(u), \quad \hat{h}_\alpha(u) = \hat{w}_\alpha(u)\,\hat{w}_\alpha(-1)$$

である．　$Eu(\Phi, R) = E(\Phi, R)$ をみたすとき，RをΦに関して universal であるという．体kは少数の例外を除いてすべてのΦに関して universal である (Steinberg [5])．また，有理整数環 $\mathbb{Z}$ は Φ（階数>1）に関して universal である．(Behr [1])．$K_2(\Phi, k[x_1, \cdots, x_r]) = K_2(\Phi, k)$ ならば $k[x_1, \cdots, x_r]$ は Φに関して universal である．一般に，

定理 3．R，Φについて，問題 2 が成り立ち，RがΦに関して universal ならば，$R[X]$もΦに関して universal である．

RがΦに関して，generalized Euclidean かつ universal ならば $G(\Phi, R)$ は生成元 $x_\alpha(t)$，$\alpha \in \Phi$，$t \in R$ と基本関

係 (A), (B), (C) によって定義される. 例えば, 体 k のとき少数の例外を除いて, また, 有理整数環 $\mathbb{Z}$, 体 k 上の一変数多項式環 $k[X]$ はそうである. 一般に, R がユークリッド環でも E に関して universal でない例がある. (Hurrenblick [2]).

2. 群関手の homotopy 群

先ず homotopy 群を定義するために, 一般論を準備する.

2.1. Cotriple system (S. Eilenberg & J.C. Moore [3])

$\mathcal{A}$ を圏とし, $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を関手とする. 次の条件をみたす関手射 $\varepsilon: F \to 1_{\mathcal{A}}$ と $\delta: F \to F^2$ があたえられたとき, (F, ε, δ) を $\mathcal{A}$ の cotriple system という.

(T1) $\quad \varepsilon F \circ \delta = F\varepsilon \circ \delta = 1_F$

(T2) $\quad \delta F \circ \delta = F\delta \circ \delta$

このとき, $F_{-1} = 1_{\mathcal{A}}$, $F_i = F^{i+1}$ とおき, $F_* = \{ F_i \,;\, i \geqq -1 \}$ とおく.

$$\partial_i = F^i \varepsilon F^{n-i} : F_n \longrightarrow F_{n-1} \quad (0 \leqq i \leqq n)$$

$$s_i = F^i \delta F^{n-i} : F_n \longrightarrow F_{n+1} \quad (0 \leqq i \leqq n)$$

をそれぞれ face operator, degeneracy operator とよぶと, 次の条件が成り立つ. $\{ F_*, \partial_i, s_i \}$ を $End(\mathcal{A})$ における simplicial object という.

(i) $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad (i<j)$

(ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad (i \leqq j)$

(iii) $\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \quad (i<j)$

(iv) $\partial_i s_i = \partial_{i+1} s_i = id$

(v) $\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \quad (i>j+1)$

2.2 <u>随伴関手に属する Cotriple system</u> $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を圏とし, $S: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を関手とする. B, A をそれぞれ $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ の object とするとき,

$$\sigma_{B,A} : \mathcal{A}(S(B), A) \to \mathcal{B}(B, T(A))$$

が2変数関手として同型のとき, S は T に coadjoint であるという. $\alpha(A) = \sigma^{-1}_{T(A),A}(1_{T(A)})$, $\beta(B) = \sigma_{B,S(B)}(1_{S(B)})$ とおくと,

$$\alpha : ST \to 1_{\mathcal{A}} \quad , \quad \beta : 1_{\mathcal{B}} \to TS$$

は関手射で,

$$F = ST : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
$$\varepsilon = \alpha \quad : F \to 1_{\mathcal{A}}$$
$$\delta = S\beta T : F \to F^2$$

とおくと, (F, ε, δ) は cotriple system になる. これを関手 S, T に属する cotriple system とよぶ.

2.3 <u>simplicial ring</u>　Aを単位元をもつ可換環とし，$_A\underline{M}$ を可換A-代数（必らずしも単位元をもつとは限らない）の圏とし，$\underline{S}_*$ を pointed sets の圏とする．$\underline{S}_*$ の object (X, x) に対して，$S(X)$ を $X-\{x\}$ から生成される自由可換A-代数（単位元をもたない）とし，$_A\underline{M}$ の object R に対して，$T(R)$ を集合 R と R の零元できまる $\underline{S}_*$ の object とすると，

$$S:\ \underline{S}_* \longrightarrow {}_A\underline{M}\quad,\quad T:\ {}_A\underline{M} \longrightarrow \underline{S}_*$$

は関手で，SはTに coadjoint である．(2.2) により，S, T に属する $_A\underline{M}$ の cotriple system (F, ε, δ) がきまる．$\{F_*, \partial_i, s_i\}$ は $End({}_A\underline{M})$ における simplicial object で $F_*R = \{F_iR, \partial_iR, s_iR\}$ は simplicial ring になる．

2.4. <u>圏 $_A\underline{M}$ と $_A\underline{M}_1$</u>　単位元をもつ可換A-代数の圏を $_A\underline{M}_1$ とおき，$Q: {}_A\underline{M}_1 \longrightarrow {}_A\underline{M}$ を $_A\underline{M}_1$ の object と $_A\underline{M}$ の object とみる関手とする．R を $_A\underline{M}$ の object とするとき，

$$R_A = \{(r, a)\ ;\ r\in R,\ a\in A\}$$

に積を

$$(r, a)(s, b) = (rs + as + br,\ ab)$$

と定義すると，R_A は単位元 $(0,1)$ をもつ可換 A-代数である．R に R_A を対応させて，関手 $P: {}_A\underline{M} \to {}_A M_1$ がえられ，P は Q に coadjoint である．R が単位元をもてば $R_A \cong R\times A$（${}_A\underline{M}_1$ での直積）である．

2.5. <u>群関手の ${}_A\underline{M}$ への延長</u>　$G: {}_A\underline{M}_1 \to \underline{Gr}$ を群関手とする．群関手 $\overline{G}: {}_A\underline{M} \to \underline{Gr}$ の ${}_A\underline{M}_1$ への制限が G と同型のとき，$\overline{G}$ を G の延長とよぶ．${}_A\underline{M}$ の object R に対して，$f: R_A \to A$ を自然な射影とすると，$\mathrm{Ker}\, f \cong R$ である．

$$\overline{G}(R) = \mathrm{Ker}(G(f): G(R_A)\to G(A))$$

と定義すると，G が積を保存するならば（すなわち，R, R' を ${}_A\underline{M}_1$ の objects とするとき，$G(R\times R') \cong G(R)\times G(R')$ が成り立つ），$\overline{G}$ は G の延長である．$G(\Phi,\ )$，また，Φ の階数が >1 ならば，$E(\Phi,\ )$，$St(\Phi,\ )$ は積を保存し，$\overline{G}(\Phi,\ )$，$\overline{E}(\Phi,\ )$，$\overline{St}(\Phi,\ )$ はそれぞれ $G(\Phi,\ )$，$E(\Phi,\ )$，$St(\Phi,\ )$ の延長になる．

2.6. <u>群関手の homotopy 群</u>　$G: {}_A\underline{M}_1\to\underline{Gr}$ を群関手とし，積を保存するとする．$\overline{G}: {}_A\underline{M}\to\underline{Gr}$ を G の延長とすると，(2.3) の cotriple system (F,ε,δ) について，

$$GF_* R = \{\overline{G}(F_i R),\ \overline{G}(\partial_i R),\ \overline{G}(s_i R)\}$$

は simplicial group で $n \geqq 1$ について n-homotopy 群が定義できる. これを

$$\pi_n(G, R) = \pi_n(GF_*R) = K^S_{n+1}(G, R)$$

などとかく. $n > 1$ ならば可換群で, $n = 0$ のとき, homogeneous space として $\pi_0(G, R)$ を定義できる.

3. Covering group と Steinberg 群

群関手 $G : {}_A\underline{M}_1 \to \underline{Gr}$ について,

$$0 \to R \to R' \Rightarrow 1 \to G(R) \to G(R')$$

$$R \to R' \to 0 \Rightarrow G(R) \to G(R') \to 1$$

をみたすとき, それぞれ左完全, 右完全であるという. $E(\Phi, \ )$, $St(\Phi, \ )$ は左かつ右完全で, $G(\Phi, \ )$ は左完全であるが右完全でない. G が積を保存し, 左完全のとき, G の homotopy 群は次のようにあらわされる. 記号は (2.6) と同じとし, GF_*R を simplicial group とする.

$$G^*_n(R) = \overline{G}(F_nR) \cap \mathrm{Ker}\,\overline{G}(\partial_1 R) \cap \cdots\cdots \cap \mathrm{Ker}\,\overline{G}(\partial_n R)$$

$$d_n = \overline{G}(\partial_0 R)|_{G^*_n(R)} : G^*_n(R) \to G^*_{n-1}(R) \quad (n \geqq -1)$$

と定義すると, 群射の列

$$\cdots \to G^*_3(R) \xrightarrow{d_3} G^*_2(R) \xrightarrow{d_2} G^*_1(R) \xrightarrow{d_1} G^*_0(R) \xrightarrow{d_0} 1$$

がえられ，$\mathrm{Im}\, d_n \lhd \mathrm{Ker}\, d_{n-1}$ $(n>1)$ をみたす．このとき，

$$\pi_n(G,R) = H_n(G,R) = \mathrm{Ker}\, d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1} \quad (n \geqq 0)$$

で，

$$K_1^S(G,R) = \pi_0(G,R) = \overline{G}(R) / \mathrm{Im}\, \overline{G}(\varepsilon R)$$

$$K_2^S(G,R) = \pi_1(G,R) = \mathrm{Ker}\, \overline{G}(\varepsilon R) / \overline{G}(\varepsilon F R)(\mathrm{Ker}\, \overline{G}(F\varepsilon R))$$

となる．$\pi_0(G,R)=0$ すなわち，$\overline{G}(R) = \mathrm{Im}\, \overline{G}(\varepsilon R)$ のとき，$\overline{G}(R)$ を connected，一般に，$\mathrm{Im}\, \overline{G}(\varepsilon R)$ を $\overline{G}(R)$ の連結成分という．$\pi_1(G,R)=0$ すなわち，$\mathrm{Ker}\, \overline{G}(\varepsilon R) = \overline{G}(\varepsilon F R)(\mathrm{Ker}\, \overline{G}(F\varepsilon R))$ のとき，$\overline{G}(R)$ を simply connected，一般に，$\pi_1(G,R)$ を $\overline{G}(R)$ の fundamental group という．

$$\hat{G}(R) = \overline{G}(FR) / \overline{G}(\varepsilon F R)(\mathrm{Ker}\, \overline{G}(F\varepsilon R))$$

を $\overline{G}(R)$ の universal covering という．$\hat{G}: {}_A\underline{M}_1 \to \underline{Gr}$ は群関手で $\overline{G}(\varepsilon R)$ からひきおこされる群関手射 $\pi: \hat{G} \to \overline{G}$ を covering 射という．このとき，次の定理がえられる．

<u>Theorem 4</u>　Aを単位元をもつ可換環とし，Φを階数が>1の既約ルート系とする．任意の集合Xについて，

$$K_1(\Phi, A[X])=0,\quad K_2(\Phi, A[X])=K_2(\Phi, A)$$

が成り立つならば，任意の可換A-代数Rに対して，

$$K_1^S(\Phi,R)=\overline{G}(\Phi,R)/\overline{E}(\Phi,R)$$

$$K_2^S(\Phi,R)=\mathrm{Ker}\,(\overline{St}(\Phi,R)\to\overline{E}(\Phi,R))$$

$$\hat{G}(\Phi,R)=\overline{St}(\Phi,R)$$

が成り立つ．とくに，Rが単位元をもつ可換A-代数ならば

$$K_1^S(\Phi,R)=G(\Phi,R)/E(\Phi,R)$$

$$K_2^S(\Phi,R)=\mathrm{Ker}\,(St(\Phi,R)\to E(\Phi,R))$$

$$\hat{G}(\Phi,R)=St(\Phi,R)$$

である．

Theorem 4の仮定について，任意の整域Aに対して成り立つであろうと予想している．現在のところまだ部分的な結果しか得られていない．

References

1 H.Behr, Explizite Präsentation von Chevalley Gruppen über Z, Math. Zeit. 141 (1975), 235-241

2 J. Hurrenblick, On $K_2(\mathcal{O})$ and presentations of $SL_n(\mathcal{O})$ in the real quadratic case, to appear in Crelles Journal.

3 S.Eilenberg and J.C.Moore, Adjoint functors and triples, Ill. J. Math. 9 (1965), 381-398

4 J.R.Silvester, On the K_2 of a free associative algebra, Proc. London Math. Soc. 26 (1973), 35-56

5 R.Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques Coll. Theo. Groupes algébriques , CBRM (1962), 113-327

6 M.Stein, Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. Math. 93 (1971), 965-1004

7 J.R.Strooker and O.E.Villamayer, Building K-theories, Adv . Math. 15 (1975), 232-268

8 J.R.Strooker, The fundamental group of general linear groups, J. Alg. 48 (1977), 477-508

9 A.A.Suslin, On the structure of the special linear group over polynomial rings, Math. USSR, Izv. 11 (1977), 221-238