数理解析研究所講究録
394巻 1980年 117-126

Lobachevsky空間のdiscrete groupについて
— Vinbergの一連の論文の紹介(I) —

東大理学部 植野義明

§1. Introduction

よく知られているように，ユークリッド空間E^nにおける鏡映で生成されたdiscrete groupは，非負対称行列$A=(a_{ij})$但し，$a_{ii}=1$，$a_{ij}=-\cos\pi/m_{ij}$ $(i\neq j)$，$m_{ij}=2,3,\cdots,\infty$，によって特徴付けることができる。この条件を充す行列はCoxeter[1]で完全に数え上げられている。

そこで次に，定曲率の単連結空間，すなわち，ユークリッド空間E^n，球面S^n，およびLobachevsky空間Λ^nにおける鏡映で生成される群を考えるのは自然である。まず，Vinbergは次の事実に着目する：

定曲率の単連結空間X^nはすべてベクトル空間V^{n+1}の中に超曲面として"埋め込む"，すなわち，X^nの運動がすべてV^{n+1}の中の線型変換としてV^{n+1}へ拡張されるという状況におくことができる。座標を適当にとると，その超曲面を記述する方

程式は

S^n については　　$x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1$

E^n については　　$x_0=1$

Λ^n については　　$x_0^2-x_1^2-\cdots-x_n^2=1,\ x_0>0$

となる。この埋め込みの下では，X^n の k 次元平面とは，V^{n+1} の $(k+1)$ 次元部分空間と X^n との交わりに他ならず，超平面 H を境界とする X^n の半空間は自然に超平面 U を境界とする V^{n+1} の半空間に対応する。

さて，P を X^n の凸多面体，すなわち，X^n の有限個の半空間の共通部分とすると，P に対応して V^{n+1} の中の多面錐 K が定まる（対応する V^{n+1} の半空間の共通部分として定義する）。そして，凸多面体 P の面に関する鏡映で生成される X^n の discrete な運動群 Γ に対し，Γ の作用を V^{n+1} まで延長することによって，K の面に関する鏡映によって生成される線型群を得る。実は，この群は次に定義する"線型 Coxeter 群"になることが分る（定理1）。かくして我々は，線型 Coxeter 群を特徴づけるものは何かと尋ねる道へ導かれる。

以下，本稿では Vinberg [6] に沿って Lobachevsky 空間における discrete reflection group の理論の解説を試みる。

§2．線型 Coxeter 群の構造

定義　Vは$\mathbb{R}$上のn次元ベクトル空間とする。線型写像 $R: V \longrightarrow V$ が reflection であるとは，$h \in V$ と $\alpha \in V^*$ であって $\alpha(h) = 2$ なるものによって，$Rv = v - \alpha(v)h$ と書かれること。

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in V^*$に対し，凸多面錐$K$は

$$K = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geqq 0,\ i = 1, \cdots, m\} \text{（無駄のない表示）}$$

と書かれているとする。各α_iに対し，$\alpha_i(h_i) = 2$を充す$h_i \in V$をとって，R_iを　$R_i v = v - \alpha_i(v) h_i$　で定義する。（凸多面錐の面に関する鏡映）

$$\Gamma := \langle R_i \mid i = 1, \cdots, m \rangle \subset GL(V)$$

とおく。

定義　Γが線型 Coxeter 群であるとは，K, Γが条件

$$\Gamma \ni \gamma \neq 1 \Rightarrow \gamma \mathring{K} \cap \mathring{K} = \emptyset$$

を充すこと，但し$\mathring{K}$ = Kの interior。このとき，KをΓの基本部屋という。(Γ, K)が線型 Coxeter 群であるともいう。

さて，Γを上述のような線型 Coxeter 群とする。$I_m := \{1, 2, \cdots, m\}$の部分集合$S$に対し，

$$K(S) := \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geqq 0 \quad \text{for } i \in S\}$$

とおくと，$K(S)$はKを含む凸多面錐である。また，Kの(closed) face の全体を$\mathfrak{F}K$，それらのうちで$(n-1)$次元の face を$K_1, \cdots, K_m$とする。このとき，$L \in \mathfrak{F}K$に対し$\sigma(L) = \{i \mid K_i \supset L\}$によって$\sigma: \mathfrak{F}K \longrightarrow 2^{I_m}$を定義する。$\Gamma(S) := \langle R_i \mid i \in S \rangle$と

おく。このとき，明らかに

命題　$S \in \sigma(\mathcal{F}K)$ならば，$\Gamma(S)$は$K(S)$を基本部屋とする線型Coxeter群である。

逆に，次の定理が成立つ（2)⇒1)の部分）

定理1　Γ：凸多面錐Kの面に関する鏡映$R_1, \cdots, R_m$で生成された線型群$\subset GL(V)$とする。このとき，1)⟺2)

1)　(Γ, K)は線型Coxeter群

2)　隣接する２つの面K_iとK_jのすべての組に対して，$\Gamma_{ij} = \Gamma(\{i, j\})$は$K_{ij} = K(\{i, j\})$を基本部屋とする線型Coxeter群

2)⇒1)の証明は定理2と並行して進められる。この定理によって，とくに2つの生成元をもつ線型Coxeter群を考えることの重要性が分る。ところで，

命題(Criterion)　2面錐Kが，$\Gamma = \langle R_1, R_2 \rangle$の基本部屋である，すなわち，$(\Gamma, K)$が線型Coxeter群

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ① & \alpha_1(h_2),\ \alpha_2(h_1)\ \text{は共に負あるいは共に}\ 0 \\ ② & \alpha_1(h_2)\alpha_2(h_1) \geqq 4\ \ \text{または} \\ & \qquad = 4\cos^2\dfrac{\pi}{k} \qquad k \in \mathbb{Z},\ k \geqq 2 \end{cases}$$

この命題の証明では，Γの作用で無駄なところは考えなくてよいので$n=2$としてよい。すると簡単な平面幾何によってΓの作用する様子が3つのtypeに分れることが分るので，感

じをつかむためにそれを表にして示すと：

$\alpha_1(R_2)\alpha_2(R_1)$の値	R_1R_2	R_1R_2の位数	$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\Gamma$
$4\cos^2\frac{\pi}{k}$	$\frac{\pi}{k}$の回転	k	V
4	unipotent	∞	半空間
4より大	双曲的回転	∞	2面錐

定理２　Γは凸多面錐Kの面に関する鏡映$R_1, \cdots, R_m$で生成された線型Coxeter群とする。Kに含まれる点xに対して，$\Gamma_x := \langle R_i \mid x \in K_i \rangle$とおく。また，$K^f = \{x \in K \mid |\Gamma_x| < \infty\}$とおく。このとき以下が成り立つ：

1) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K$ は凸錐

2) Γは$C := (\Gamma K)^\circ$にdiscreteに作用する

3) $C \cap K = K^f$

4) $K^f \longrightarrow C/\Gamma$ (cannonical) は homeo.

5) $K \ni x$ に対し，Γ_xはxのΓ中の stabilizer

6) K_iとK_jが隣接する面であるとき，R_iR_j の位数をn_{ij} ($\leq \infty$) とかけば，$R_i^2 = 1$，$(R_iR_j)^{n_{ij}} = 1$ がΓの基本関係である。すなわち，Γは(抽象)Coxeter群である。

定理1, 2の証明には，まず上の基本関係6)をもつ(抽象)Coxeter群$\bar{\Gamma}$に対して，その"universal space"$\mathfrak{U}$を構成する。そして，$\bar{\Gamma}$の$\mathfrak{U}$への作用を調べ，一方$\mathfrak{U}$から$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma K$の上への1対1の対応$\psi$が存在することを言うことによって，$K$が$\Gamma$の基

本部屋であること（定理1）と，準同型 $\bar{\Gamma}\to\Gamma$ が同型であること（定理2，6)）が分る。他の主張も $\mathfrak{U}$ と ψ を調べることによって分る。定理1,2の特殊な場合についてすでにTitsが同じ結果を得ているが，Vinberg の証明はTitsの証明に反して抽象Coxeter群に関する代数的な準備には因っていない。

§2. characteristic，Cartan行列

線型Coxeter群 Γ に対して，行列 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}=\alpha_i(h_j)$ をその Cartan 行列という。定理1及びその直後に掲げた命題により，Γ の Cartan行列 A は次の条件(C1)(C2)：

(C1) $i\neq j\Rightarrow a_{ij}\leq 0$; かつ $a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0$

(C2) $a_{ii}=2$; $a_{ij}a_{ji}\geq 4$ または $4\cos^2\pi/m_{ij}$, $m_{ij}\in\mathbb{Z}$

（ここで，m_{ij} は定理2，6)における指数と同じものである。）を充し，かつ逆に勝手な $h_1,\cdots,h_m\in V$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V^*$ に対して同様に def される行列 A が (C1)(C2) を充すならば，それらが def する多面錐の面に関する鏡映で生成される線型群は線型Coxeter群になることが分る。

さて，一般に(C1)を充す indecomposable な行列 A に対して，非負行列論から A は実固有値をもつことが分るから，A の最小の実固有値 a の符号によって，$a>0$ のとき A を (P) 型，$a=0$ のとき (Z) 型，$a<0$ のとき (N) 型と呼ぶことにする。とくに

$\forall a_{ii}=2$ のとき，A が(Z)型であるとは，$2I-A$ の固有値半径$=2$と同値である。

一般に，行列 A に対し，A の行ベクトル $a_1,\cdots,a_m$ の間の1次関係の全体 $\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m \mid \lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m=0\}$ を $L_r(A)$ とかく。（r は row の頭文字）$L_r(A)$ の中の凸錐 $L_r^+(A)$ を $L_r^+(A)=L_r(A)\cap(\mathbb{R}^+)^m$ で def する。

A が(C1)を充す行列のとき，A の(P)型の component たちすべての直和を A^+，(Z)型の component たちの直和を A^0，(N)型の component たちの直和を A^-，$A=A^+\dotplus A^0\dotplus A^-$ とする。すると明らかに，$L_r^+(A)=L_r^+(A^0)$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V^*-\{0\}$，$h_1,\cdots,h_m\in V$ に対し，行列 $A=(a_{ij})$ を $a_{ij}=\alpha_i(h_j)$ で定め，$L_r(A)$ の部分空間 L_α を $L_\alpha=\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\mid \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0\}$ によって def する。また，$K:=\{x\in V\mid \alpha_i(x)\geqq 0,\ i=1,\cdots,m\}$ とおく。

$S\subset I_m=\{1,2,\cdots,m\}$ に対して，$S^+,S^\circ,S^-\subset S$ を $A_{S^+}=(A_S)^+$，$A_{S^\circ}=(A_S)^0$，$A_{S^-}=(A_S)^-$ によって def する。但し $A_S=(a_{ij})_{i,j\in S}$ etc。また，$Z(S)=\{i\in I_m\mid a_{ij}=0,\forall j\in S\}$ とかく。

<u>命題</u>　上の記号のもとで，A が(C1)を充すならば

$$\overset{\circ}{K}\neq\emptyset \iff L_\alpha\cap L_r^+(A^0)=\{0\}$$

そしてこのとき，$\forall a_{ii}>0$ ならば，$\alpha_i\geqq 0$ $i=1,\cdots,m$ はKの

無駄のない表示を与える, i.e. K は m-sided cone である。

<u>定理3</u>　上の記号のもとで, A が (C1) を充し, $\mathring{K} \neq \emptyset$ とする。このとき, $S \subset I_m$ が次の2つのうち1つを充す：

1) $S^0 \cup S^- \in \sigma(\mathcal{F}K)$

2) $S = S^0$ かつ $Z(S)^0 = \emptyset$

ならば, $S \in \sigma(\mathcal{F}K)$ である。

条件 1) は $S = S^+$ なら自動的に充されることに注意しておく。

さて, $V \ni h_1, \dots, h_m$, $V^* \ni \alpha_1, \dots, \alpha_m$ が与えられた時, これらの定める invariant として次の4つが考えられる。

1) Cartan行列 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \alpha_i(h_j)$

2) $L_h = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_m h_m = 0\}$

3) $L_\alpha = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = 0\}$

4) "defect"　$d = \dim\left(\mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle \big/ \langle h\rangle \cap \mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle\right)$

ここに, $\mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle = \{x \in V \mid \alpha_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m\}$

1)〜4) の組を, 系 h_j, α_i の characteristic という。$L_\alpha \subset L_r(A)$, $L_h \subset L_c(A)$ = "A の列ベクトルの間の線型関係の全体" (c は column の頭文字)。$d_h = \operatorname{codim}_{L_c(A)} L_h$, $d_\alpha = \operatorname{codim}_{L_r(A)} L_\alpha$ とおく。

<u>命題</u>　$m \times m$ 行列 A, $L_c(A)$ の部分空間 L_h, $L_r(A)$ の部分空間 L_α, $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$ を任意に与えた時, $\{A, L_h, L_\alpha, d\}$ を characteristic にもつような系 $\{h_i \in V, \alpha_i \in V^*, i = 1, \dots, m\}$ が

同型を除いてuniqueに存在する。しかも，$\dim V = \mathrm{rank}\,A + d_\beta + d_\alpha + d$

証明には，$V = \mathbb{R}^{\mathrm{rank}A} \dot{+} (L_c(A)/L_\beta) \dot{+} (L_r(A)/L_\alpha)^* \dot{+} \mathbb{R}^d$ とおけばよい。

<u>定義</u>　$A \sim B \Leftrightarrow \exists D$：対角行列，対角成分 > 0 ; $A = DBD^{-1}$

<u>定義</u>　$i_1, \cdots, i_k$ が相異る文字 $\in I_m$ のとき，$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1}$ をAの cyclic product という。

<u>命題</u>　A, B が (C1) を充す行列ならば，$A \sim B \Leftrightarrow$ すべての cyclic product が一致する。

<u>定理4</u>　A：(C1)(C2) を充す行列，$L_\beta \subset L_c(A)$，$L_\alpha \subset L_r(A)$，$d \in \mathbb{Z}$，$d \geqq 0$ が任意に与えられていて，$L_\alpha \cap L_r^+(A^0) = 0$ をみたすとする。このとき，$\{A, L_\beta, L_\alpha, d\}$ を characteristic にもつ線型 Coxeter 群 Γ が同型（線型群としての作用をこめた意味）を除き unique に存在する。

この定理は与えられた Coxeter 群の線型 Coxeter 群としての表現をすべて求める方法を示す。Corollary として，任意の Coxeter 群はある線型 Coxeter 群と同型である。実際，index $\{\mathrm{Cos}\,\Gamma, L_c(\mathrm{Cos}\,\Gamma), 0, 0\}$ を characteristic に持つ線型 Coxeter 群を上の定理により作ればよい。但し，ここに $\mathrm{Cos}\,\Gamma = (a_{ij})$，$a_{ij} = -2\cos \pi/n_{ij}$ $(n_{ij} \neq \infty)$; $a_{ij} = -2$ $(n_{ij} = \infty)$。上の構成は Coxeter により注意され，Tits が実際に線型 Coxeter群であることを証明した"標準的表現"といわれるものであるが，ここにおいては，$d=d_{\mathfrak{h}}=0$ となっており表現に無駄がない。一般に $d=d_{\mathfrak{h}}=0$ の時，Γは reduced であると言う。これは，Kが strictly convex といってもよいし，或いは $\langle\alpha\rangle=V^*$ といっても同値である。とくに，このとき $\dim V=\operatorname{rank} A+d_\alpha$，$\dim\langle\mathfrak{h}\rangle=\operatorname{rank} A$ となる。また，任意の線型Coxeter群 $\Gamma\subset GL(V)$ に対して，Γの作用を $V^{red}=V/\mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle$ へおとせば，reduced な線型Coxeter群 Γ^{red} を得る。

最後に，山口氏の報告中で必要な定義を追加しておく：

<u>定義</u>　$S\subset I_m$がAをreduceする $\Leftrightarrow$ $i\notin S, j\in S$ ならば，$a_{ij}=0$

<u>命題</u>　$W\subset V$（部分空間）がΓ－不変である

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists S\subset I_m\ ;\ S\text{ は}A\text{を reduce する}\\ \text{s.t. } \langle\mathfrak{h}\rangle_S\subset W\subset \mathrm{Ann}\langle\alpha\rangle_{I_m-S}\end{cases}$$

但し，$\langle\mathfrak{h}\rangle_S:=\langle\mathfrak{h}_i\rangle_{i\in S}$ etc.

<u>系</u>　群Γが irreducible $\Leftrightarrow$ Aが indecomposable かつ $d_{\mathfrak{h}}=d=0$

尚，文献は村上氏の報告の最終頁を参照されたい。