数理解析研究所講究録
394巻 1980年 67-81

コンパクト群上の熱方程式と Macdonald identity ―Freganの論文の紹介―

名大・理　田中洋平

§1 序

Macdonaldは、アフィンルート系に対し、有限ルート系に於けるWeylの分母公式の類似の公式を求めた。([6])
これがMacdonald identityと呼ばれるものであり、実は対応するEuclidean Lie algebra (即ちDynkin diagramが同型なもの $\overline{\text{注}}$ [6]で BC_1 とあるのは $A_{1,2}$ に対応している―)の分母公式である事をKac([4]), Moody([7])が示した。

$\varphi(q)=\prod_{n\geq 1}^{\infty}(1-q^n)$ とする。各typeのMacdonald identityを適当にspecializeすると、$\varphi(q)^m\varphi(q^n)^m$ 型の式の展開式が得られる。例えば、$X_{\ell,1}$-typeの時、$e^{-\alpha_0}\mapsto q$, $e^{-\alpha_i}\mapsto 1$ とspecializeすると $\varphi(q)^d$ の展開式を与える。(§2. (2.9)を参照) ここで d はtype X_ℓ の単純Lie環の次元に等しい。これがMacdonaldの発見だった。

GをX_ℓ-typeの単連結なコンパクト単純群，$\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$をGの有限次既約指標全体とする。$X_{\ell,r}$-typeのMacdonald identityの両辺は$(\ell+1)$-変数の形式的巾級数環の元であるが，適当な変数変換の下に，$G\times\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+=\{t\in\mathbb{R}\mid t>0\}$)上の，Gに関して類函数になっているような，解析函数とみなせる。Kostant ([6])は Gの特別な元を用いて，この函数の$\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$による展開を具体的に与えた。(§2では$X_{\ell,1}$-typeの時の式を書いてある。)

ここで紹介するFegan ([2])の論文では，Kostantの表示に基づいて，この函数をある初期条件の下での熱方程式の解と考える事が出発点となっている。(§3のprop.) するとMacdonald identityの云うところは，この解が無限積表示をもつ，となる。逆に何らかの方法で独立に，無限積表示をもつ事を示せば，Macdonald identityの別証になる。そして，実際に$X_{\ell,1}$-type，即ちtier number 1の場合にその証明を与える事が，この論文の主な内容である。証明のアイデアは$A_{1,1}$型 ($G=SU(2)$)の場合に帰着させる事である。(§4 Prop.)

§2 tier number 1のMacdonald identity

Kac-Moody Lie algebraの分母公式

$$\sum_{w\in W} sgn(w)\, e^{-\langle \Phi_w\rangle} = \prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})^{\dim L_\alpha} \qquad (2.1)$$

が、$X_{\ell,1}$-type の Euclidean Lie algebra の時どうなるかを見よう。以下後の都合の為ルート全体を$\overline{\Delta}$，Weyl 群を$\overline{W}$と書く。次の事実(ア)〜(エ)が成り立つ。

(ア) ($\overline{\Delta}$⊃) $\Delta \underset{def.}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i \cap \overline{\Delta}$ は type X_ℓ の root 系、

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ は Δ の simple root system

($\overline{W}$⊃) $W \underset{def.}{=} \langle w_i \mid i = 1, \cdots, \ell \rangle$ は Δ の Weyl 群

([6],[7])

(イ) $M \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z} \dfrac{\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ とおく。

ここで (,) は Δ の cannonical bilinear form つまり type X_ℓ の単純 Lie 環の Killing form から導びかれたもの。(ルート系のみの言葉で云えば、$\lambda, \mu \in \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\alpha$ に対し $(\lambda, \mu) = 2\sum_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha,\lambda)(\alpha,\mu)$ を満たすような metric)

この時

$$M \subset \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$$

で、M は W-stable ([5])

(ウ) W の M 上の作用により半直積 $W \ltimes M$ を作ると、

$\exists \varphi : W \ltimes M \xrightarrow{\sim} \overline{W}$ があり

(i) $\mathrm{sgn}(\varphi(w,\lambda)) = \mathrm{sgn}(w) \quad w\in W,\ \lambda\in M$

(ii) $\langle \Phi_\varphi(w,\lambda)\rangle = \rho - w(\lambda+\rho) + (\|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2)\xi$

但し ρ は Δ の positive root の和の半分

$\|x\|^2 = (x,x)$ (c.f.[6])

(エ) $\bar{\Delta}_+ \cap \bar{\Delta}_R = \Delta_+ \cup \{\alpha + n\xi \mid \alpha\in\Delta,\ n$ 正整数$\}$

$\bar{\Delta}_+ \cap \bar{\Delta}_I = \{n\xi \mid n$：正整数$\}$

$\dim L_{n\xi} = l$

(小池氏の解説参照)

(ウ)より(2.1)の左辺は

$$e^{-\rho}\sum_{\lambda\in M}\Big(\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}\Big)e^{-(\|\lambda+\rho\|^2-\|\rho\|^2)\xi} \quad \cdots (2.2)$$

G を X_l-type の単連結コンパクト単純群，T をその極大トーラスとし，Δ を (G,T) に関するルート系と同一視する。また P で Δ の integral weight 全体，Λ で dominant integral weight 全体を表わす事にする。$\Lambda\ni\lambda$ に対応する G の既約指標を χ_λ で表わす。(2.2)をもう少し変形する為 T の元 a を

$a = \exp X \quad , X\in \mathfrak{t}$ (= T の Lie 環)

$\alpha(X) = 2\pi i(\alpha, 2\rho) \quad {}^\forall\alpha\in\Delta$

と定義する。

a は regular element であり更に次の(オ)が成り立つ。

(ｵ) $^\forall\mu\in\Lambda$ に対し、$w_0(\mu+\rho)=\lambda+\rho$ となる $w_0\in W$, $\lambda\in M$ の組 (w_0,λ) は高々 1 つであり,

$$\varepsilon_\mu=\begin{cases}\mathrm{sgn}(w_0) & \text{もしそのような組}(w_0,\lambda)\text{があったら}\\ 0 & \text{もしそのような組}(w_0,\lambda)\text{がなかったら}\end{cases}$$

とすると、

$$\varepsilon_\mu=\chi_\mu(a)$$

（[5] 参照）

(ｵ)から (2.2) は

$$e^{-\rho}\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda(a)\Big(\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w(\lambda+\rho)}\Big)e^{-(\|\lambda+\rho\|^2-\|\rho\|^2)\xi}$$

--- (2.3)

$\mu\in P$ に対し

$$a(\mu)\underset{\mathrm{df.}}{=}\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{e^{2\pi i(\alpha,\mu)}-e^{-2\pi i(\alpha,\mu)}}{e^{2\pi i(\alpha,\rho)}-e^{-2\pi i(\alpha,\rho)}}=\frac{\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{2\pi i(w\rho,2\mu)}}{\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{2\pi i(w\rho,2\rho)}}$$

$$=\frac{\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{2\pi i(w\mu,2\rho)}}{\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{2\pi i(w\rho,2\rho)}}$$

とおけば

$a(w\mu)=\mathrm{sgn}(w)a(\mu)$, 特に $\lambda+\rho$ と W-conj. でない μ に対し $a(\mu)=0$.

又. $\chi_\lambda(a)=a(\lambda+\rho)$

よって (2.3)は（従って (2.1)の左辺は）

$$e^{\|\rho\|^2\xi}e^{-\rho}\sum_{\mu\in P}a(\mu)\,e^{\mu}\,e^{-\|\mu\|^2\xi}\qquad(2.4)$$

$\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell, \xi$ は1次独立。そこで $e^{-\xi}$ を $\mathbb{R}_+$ 上の函数 e^{-t} に、$e^\lambda\ (\lambda \in P)$ を T 上の函数 $e^\lambda(g) = e^{\lambda(X)}$ $\quad g = \exp X\ (X \in \mathfrak{t})$ に置きかえると (2,3) と I) から ($\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})$ で割って)

$g \in T$, $g = \exp X \quad (X \in \mathfrak{t})$ に対し

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda(a)\chi_\lambda(g) e^{-c(\lambda)t} = \varphi(t)^\ell \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-nt} e^{-\alpha(X)})(1 - e^{-nt} e^{\alpha(X)}) \quad \text{---}(H)$$

ここで $c(\lambda) = \|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2$, $\varphi(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nt})$

(H) の左辺を $H(g,t)$ とおく。

$$K(g,t) \underset{def}{=} e^{-\|\rho\|^2 t} e^{\rho(X)} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha(X)}) H(g,t) \quad (g = \exp X)$$

とすると、(2.4) より

$$K(g,t) = \sum_{\lambda \in P} a(\lambda) e^{\lambda(X)} e^{-\|\lambda\|^2 t} \quad -(K)$$

(H) の両辺に $g = 1\ (X = 0)$ を代入すると

$$H(1,t) = \varphi(t)^d \quad \cdots\cdots (2.5)$$

$$d = \dim G$$

(H) の右辺を $\varphi(t)^\ell \prod_{n=1}^{\infty} \det(1_{\mathfrak{g}} - e^{-nt} Ad(g))$ ($\mathfrak{g}$ は G の Lie 環) と書けば両辺とも $G \times \mathbb{R}_+$ 上の函数になっている。
§3 で H は熱方程式の解である事を見る。

例　$A_{1,1}$ type　　$G=SU(2)$, $l=1$

$\Delta=\{\pm\alpha\}$　　$\rho=\frac{1}{2}\alpha$

$\|\alpha\|^2=\frac{1}{2}$, $\|\rho\|^2=\frac{1}{8}$　　$P=\mathbb{Z}\rho$, $\Lambda=\mathbb{Z}_{\geq 0}\rho$

$(\alpha,\rho)=\frac{1}{4}$

$$a(n\rho)=\frac{e^{\frac{2n\pi i}{4}}-e^{-\frac{2n\pi i}{4}}}{e^{\frac{2\pi i}{4}}-e^{-\frac{2\pi i}{4}}}=\sin\frac{2n\pi}{4}=\begin{cases}0 & n:\text{even}\\(-1)^k & n=2k+1\end{cases}$$

よって分母公式は

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k e^{k\alpha}e^{-\frac{k(k+1)}{2}\xi}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-n\xi})(1-e^{-(n-1)\xi}e^{-\alpha})(1-e^{-n\xi}e^{\alpha})$$

$e^{-\alpha}=u$, $e^{-\xi}=v$ とおけば

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k u^k v^{\frac{k(k-1)}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-v^n)(1-v^{n-1}u)(1-v^n u^{-1})$$

これはJacobi のtriple product identity である。

(H)は　$g=\exp iH$　$H\in i\mathfrak{t}$　とおくと

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(k+1)\alpha(H)}{\sin\frac{\alpha(H)}{2}}e^{-\frac{k(k+1)}{2}t}=\varphi(t)\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-nt}e^{-i\alpha(H)})(1-e^{-nt}e^{i\alpha(H)})$$

$H_3(g,t)$で左辺を表わす。この時のKをK_3で表わす.

$$K_3(g,t)=e^{\frac{t}{8}}(e^{\frac{\alpha}{2}(X)}-e^{-\frac{\alpha}{2}(X)})H_3(g,t)\qquad g=\exp X$$

(K)は

$$K_3(g,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k e^{\frac{(2k+1)}{2}\alpha(X)}\,e^{-\frac{(2k+1)^2}{8}t}$$

となる。

§3 コンパクト Lie群上の熱方程式

Riemann 多様体 (M, g) に対し Laplacian Δ が定義される。これは二階の微分作用素で，$M \ni P$ のまわりでの local coordinate $(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて表わすと

$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ $\qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ と置き

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

M上の熱方程式とは，$M \times \mathbb{R}_+$ 上の偏微分方程式

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

のこと.

$M = G$: コンパクト Lie群で，Riemannian metric として両側不変なものをとる。この時 $G \times \mathbb{R}_+$ 上の函数 $F(x,t)$ が熱方程式の基本解であるとは 次の (1)~(3) を満たす事

(1) $F(x,t)$ は (x,t) に関し連続，x に関して C^2，t に関して C^1.

(2) $\Delta F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

(3) $\lim_{t \downarrow 0} F(x,t) = \delta_1(x)$ （1に台をもつ Dirac の δ-函数

ここで dx を G上の不変測度で $\int dx = 1$ なるようにとり $L^1(G) \ni f$，$C^\infty(G) \ni \varphi$ に対し

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_G f \varphi \, dx$$

により fを distribution とみなす。

基本解 $F(x,t)$ は存在して unique であり，初期条

件が $\nu(x)$ の熱方程式の解Gは

$$G(y,t) = \int_G \nu(x) F(x-y)\, dx$$

で与えられる。

Fは次の様に展開される.

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を Δ の固有函数から成る完備正規直交系とする。ϕ_j の固有値 λ_j とすれば

$$F(x,t) = \sum_j \phi_j(1)\, \phi_j(x)\, e^{-\lambda_j t} \qquad (3.1)$$

(例えば[1]参照)

例1. V：有限次 $\mathbb{R}$-ベクトル空間

$(\ ,\ )$: V上の metric

$(\ ,\ )$ によりVは Riemann 多様体. Vの orthonormal basis による座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ とすれば

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$V \supset L$ をVの lattice とすると. $T = V/L$ は torus で.

V上の metric からT上の metric が誘導される。

$$L^* =: \{\lambda \in V \mid (\lambda, m) \in 2\pi\, \mathbb{Z}\}$$

とおけば $\{e^{i(\lambda,v)}\}_{\lambda \in L^*}$ が Δ の固有函数からなる完備正規直交系で. $e^{i(\lambda,v)}$ の固有値は. $\|\lambda\|^2 = (\lambda,\lambda)$

よって基本解は

$$F(x,t) = \sum_{\lambda \in L^*} e^{i(\lambda,x)} e^{-\|\lambda\|^2 t}$$

$\lambda, \mu \in L^*$ に対し $\int_T e^{i(\lambda,x)} e^{i(\mu, y-x)} dx = \delta_{\lambda,\mu} e^{i(\mu,y)}$
だから 初期条件 $v(x) = \sum_{\lambda\in L^*} a_\lambda e^{i(\lambda,x)}$
の熱方程式の解 G は

$$G(x,t) = \sum_{\lambda\in L^*} a_\lambda e^{i(\lambda,x)} e^{-\|\lambda\|^2 t}$$

例2. 例1で V 自身はコンパクトではないが、

$$F_V(v,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|v\|^2}{4t}}$$

$n = \dim V$

は基本解の条件 (1)〜(3) を満たす。

$V \supset W$ subspace　　$V = W \oplus W^\perp$ と直交分解すると、

$$F_V(w+w', t) = F_W(w,t)\, F_{W^\perp}(w', t)$$

$w \in W,\ w' \in W^\perp$

$T = V/L$ 上の函数を、周期 L の V 上の函数とみなせば
初期条件 $v(x) = \sum_{\lambda\in L^*} a_\lambda e^{i(\lambda,x)}$ の解 G は

$$G(\ \ ,t) = \int_V v(w) F_V(v-w)\,dw$$

G が単連結コンパクト単純群の時 G 上の metric を Killing form の -1 倍から来たものにとる。Δ は両側不変な微分作用素で、対応する $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra) の元は Casimir

element である。この事と Peter-Weyl の定理から、
$\pi_\lambda : G \to GL(d_\lambda, \mathbb{C})$　　$\pi_\lambda(g) = (\pi_{\lambda ij}(g))_{1\le i,j\le d_\lambda}$ を $\lambda \in \Lambda$
に対応する G の既約ユニタリ表現とすれば $\{\pi_{\lambda ij}\}$ は固有函
数から成る完備正規直交系。$\pi_{\lambda ij}(g)$ の固有値 は $C(\lambda) = \|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2$
よって熱方程式の基本解は

$$F(g,t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda \chi_\lambda(g) e^{-C(\lambda)t} \qquad (3.2)$$

$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し

$$\int_G \chi_\lambda(x)\chi_\mu(x^{-1}g)\,dx = \delta_{\lambda,\mu}\frac{\chi_\lambda(g)}{d_\lambda}$$

従って初期条件 $v(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \chi_\lambda(x)$ の熱方程式の解は

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \chi_\lambda(x) e^{-C(\lambda)t}$$

となる。

$H(g,t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda(a)\chi_\lambda(g) e^{-C(\lambda)t}$　だから
H は初期条件が $\sum \chi_\lambda(a)\chi_\lambda(g)$ の解に等しい。
ところで (3.2) から

$$F(a,t) = H(1,t) \qquad (3.3)$$

だが

<u>Prop.</u> (Fegan [8])

$$F(a,t) = \varphi(t)^d \qquad (d = \dim G)$$

上の Prop. は (3.3) より (2.5) の別証を与えている。
即ち (H) を specialize した場合の証明ができた。

§4 (H)の別証明 ($H(g,t)$の無限積表示)

4.1. *key lemma*

$SU(2) \supset T^{(1)}$: $SU(2)$の極大トーラス

$\mathfrak{t}^{(1)}$: T^{1}のLie環

α : positive root

$\Delta_+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$　　$n = |\Delta_+|$　とする。

$\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^{(1)}$ 上に各々 Killing formの-1倍によるmetricを入れる。$\mathfrak{t}^{(n)} = \underbrace{\mathfrak{t}^{(1)} \times \cdots \times \mathfrak{t}^{(1)}}_{n個}$ 上に$\mathfrak{t}^{(1)}$のmetricから決まる自然なmetricを入れる。

$$I : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}^{(n)}, \quad X \longmapsto (I_1(X), \cdots, I_n(X))$$

を

$$\alpha(I_i(X)) = \alpha_i(X)$$

で定義する。

Iは isometric なうめこみである。このIによって

$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}^{(n)}$ とみなす。

今後§2でのH, Kは $\mathfrak{t} \times \mathbb{R}_+$ 上の函数と考える。

$\mathfrak{t}^{(n)} \times \mathbb{R}_+$ 上の函数 $K_3^{(n)}$ を

$$K_3^{(n)}(X_1, \cdots, X_n, t) = \prod_{i=1}^{n} K_3(X_i, t)$$

と定義すると

<u>key lemma</u> (Fegan[2])

Gと無関係な $\mathbb{R}_+$上の函数 $f(t)$があり

$$K = f(t)^{l-n} \left(K_3^{(n)} \Big|_{\mathfrak{t} \times \mathbb{R}_+} \right)$$

即ち $K(X,t) = f(t)^{l-n} \prod_{i=1}^{n} K_3(I_i(X), t)$　$(X \in \mathfrak{t})$

4.2 key lemma ⇒ (H)

先ず $G=SU(2)$ の時 (H) はJacobi の triple product identity で古典的な結果故宜しい。(§2 例)

Gが一般の場合

$$H(X,t)=\frac{e^{\|\rho\|^2 t}}{\prod_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\alpha_i(X)}{2}}-e^{-\frac{\alpha_i(X)}{2}}\right)}K(X,t)$$

に Freudenthal の strange formula ([3])

$$\|\rho\|^2=\frac{d}{24}=\frac{l+2n}{24}$$

と key lemma を用いて

$$H(X,t)=e^{\frac{l-n}{24}t}f(t)^{l-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{8}t^2}K_3(I_i(X),t)}{e^{\frac{\alpha}{2}(I_i(X))}-e^{-\frac{\alpha}{2}(I_i(X))}}$$

$$=f_1(t)^{l-n}\prod_{i=1}^{n}H_3(I_i(X),t) \quad —(\ast)$$

ここで $f_1(t)=e^{\frac{t}{24}}f(t)$

一方 (H)の右辺を書き直すと ($G=SU(2)$の場合を用いて)

$$\varphi(t)^{l-n}\prod_{i=1}^{n}H_3(I_i(X),t)$$

よって $f_1(t)=\varphi(t)$ を示せば良い。

$(\ast)$の両辺に $X=0$を代入すると §3 の Prop. より

$$\varphi(t)^{l+2n}=f_1(t)^{l-n}\varphi(t)^{3n}$$

$$\therefore \varphi(t)^{n-l}=f_1(t)^{n-l}$$

$G=SU(3)$の時考えると $n-l=1$ だから

$$\varphi(t)=f_1(t)$$

4.3 key lemma の証明の方針

$\lambda \in P$ に対し $X_\lambda \in \mathfrak{t}$ を　$\lambda(X) = i(X_\lambda, X)$　$\forall X \in \mathfrak{t}$ と定義する.

$\mathfrak{t}^{(n)} \ni X_{\alpha^{(i)}} = (0, \cdots, \overset{i}{X_\alpha}, \cdots 0)$　(α は $SU(2)$ の positive root)

と置く。この時　$(X_{\alpha^{(i)}}, X_\lambda) = (\alpha_i, \lambda)$

§2 (K) と §3 例1より K は初期条件

$$\sum_{\lambda \in P} a(\lambda) e^{i(X_\lambda, X)}$$ なる $\mathfrak{t}$ 上の熱方程式の解

ここで $a(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin 2\pi(\alpha_i, \lambda)}{\sin 2\pi(\alpha_i, \rho)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin 2\pi(X_{\alpha^{(i)}}, X_\lambda)}{\sin 2\pi(\alpha_i, \rho)}$

また $K_3^{(n)}$ は　初期条件が

$$\sum_{Y \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \frac{1}{2} X_{\alpha^{(i)}}} b(Y)\, e^{i(Y, X)}$$ なる $\mathfrak{t}^{(n)}$ 上の熱方程式の解

ここで　$b(Y) = \prod_{i=1}^{n} \sin 2\pi (X_{\alpha^{(i)}}, \mu)$

ところで

$0 < (\alpha_i, \rho) < \frac{1}{2}$　$(i = 1, \cdots, n)$　([5])

及び　$a(\lambda) = 0, \pm 1$,　$b(Y) = 0, \pm 1$　だから

$\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \sin 2\pi x > 0 \\ 0 & \sin 2\pi x = 0 \\ -1 & \sin 2\pi x < 0 \end{cases}$$ と定義すれば

$$\begin{cases} a(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon((X_{\alpha^{(i)}}, X_\lambda)) \\ b(Y) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon((X_{\alpha^{(i)}}, Y)) \end{cases}$$

$\mathfrak{t}^{(n)} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp}$ と直和分解し、上の初期条件の下での解の比較を行う。

文献

[1] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet : Le spectre d'une variété Riemannienne, Springer Lec. Note vol 194

[2] H. D. Fegan : The heat equation on a compact Lie group, Trans. act. 246 (1978) 339-357

[3] H. Freudenthal, H de Vries : Linear Lie groups, Acad. Press 1969

[4] V. G. Kac : Infinite dimentional Lie algebras and Dedekind's η-function, J. Func. anal. appl. 8 (1974), 68-70

[5] B. Kostant : On Macdonald's η-function formula, the Laplacian and generalized exponents, Adv. Math. 20 (1976) 179-212

[6] I. G. Macdonald : Affine root systems and Dedekind's η-function, Inv. Math. 15 (1972) 91-143

[7] R. V. Moody : Macdonald identities and Euclidean Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975) 43-52

[8] H. D. Fegan : The heat equation and modular forms, J. Differential geometry, 13 (1978) 589-602