数理解析研究所講究録
394巻 1980年 1-21

Kac-Moody Lie環とMacdonald typeの恒等式について

東大 理　小池 和彦

以下 この稿の目的は 最近 話題になっている Kac-Moody Lie環の定義とその性質を紹介し，更に 形式的巾級数環の中で 無限積と無限和とを結びつける恒等式 "Weyl-Macdonald-Kac formula" を Kac-Moody Lie環の表現論を用いて証明する，Moody, Kac, Lepowsky等の方法を紹介することである。その為に まず 有限次元半単純Lie環の復習から始める。

§0 有限次元半単純Lie環の復習

$\mathfrak{g}$を複素数体$\mathbb{C}$上の有限次元半単純Lie環，$\mathfrak{h}$をそのCartan部分環，CをそのCartan行列とすると $\mathfrak{g}$は次の様な良い性質を持っていた。

1°)（分類定理）

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$を 複素数体上の単純Lie環，C, C'を対応する

Cartan 行列とすると

$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}' \iff$ 置換行列 P が存在して $P^{-1}CP = C'$

2°)(Root space への分解)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \quad (\Delta \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の } \mathfrak{h} \text{ に関するルート系})$$

今 $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ に辞書式順序を導入し $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell\} \subset \Delta$ をこの順序に関する simple root system とすると

3°)(構造定理)

$\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ の基底 e_i, $i=1,2,\cdots,\ell$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ の基底 f_i, $i=1,2,\cdots,\ell$ $\mathfrak{h}$ の基底 h_i $i=1,2,\cdots,\ell$ を適当にとれば, $e_1, e_2, \cdots, e_\ell, h_1, \cdots, h_\ell$ $f_1, \cdots, f_\ell$ は $\mathfrak{g}$ の生成元で次の基本関係を持つ。

$$(0.1)\begin{cases} [h_i, h_j] = 0 \quad [h_i, e_j] = C_{ij}\, e_j, \quad [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad (\mathrm{ad}\, e_i)^{-C_{ij}+1}(e_j) = 0 \quad (i \neq j) \\ (\mathrm{ad}\, f_i)^{-C_{ij}+1}(f_j) = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

但し $C = (C_{ij})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列である。

さらに半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現論については次の様な綺麗な定理が成立していた。

P を dominant integral weight の集合, 即ち

$$P := \left\{ \lambda \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^* \ ; \ \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbb{Z},\ \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geq 0 \ \ {}^\forall i = 1, 2, \cdots, \ell \right\}$$

とすると

4°)(Elie Cartan の定理)

$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同値類は P の元と 1:1 onto に

対応する。

この対応は (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の既約表現とし $V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}_\mathbb{R})^*} V_\lambda$ を V の weight space 分解, 即ち $V_\lambda = \{ v \in V \,;\, \rho(h) v = \lambda(h) v, \ {}^\forall h \in \mathfrak{h} \}$ とすると (ρ, V) に対して その highest weight を対応させることにより与えられる。

5°) (Weyl の character formula)

(ρ, V) を dominant integral weight $\mu \in P$ に対応する $\mathfrak{g}$ の既約表現とし その formal character χ_μ を

$$\chi_\mu := \sum_{\lambda : V \text{の weight}} m_\lambda e^\lambda \qquad m_\lambda \text{は weight } \lambda \text{の重複度}$$

と定義すると

$$(0.2) \qquad e^{-\mu} \chi_\mu = \frac{N(\mu)}{D}$$

但し D, $N(\mu)$ は W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群, ρ を正ルートの和の半分, 即ち $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ とすると

$$D := \sum_{w \in W} (\det w)\, e^{w\rho - \rho}$$

$$N(\mu) := \sum_{w \in W} (\det w)\, e^{w(\mu + \rho) - (\mu + \rho)}$$

で与えられる。

さらに 上の character formula の分母 D は 次の様な積表示を持っていた。

6°) (Weyl の分母公式)

$$(0,3)\quad D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})$$

この式で $\rho-w\rho$ は, $\Phi_w:=\{\alpha\in\Delta^+\,;\ w^{-1}(\alpha)\in\Delta^-\}=\Delta^+\cap w\Delta^-$ と 定義し Φ_w の元の和を $\langle\Phi_w\rangle$ と書くと

$\rho-w\rho=\langle\Phi_w\rangle$ で与えられる。即ち,

$$(0,3)'\quad D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{-\langle\Phi_w\rangle}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})$$

§1 Kac-Moody Lie環と そのルート系及びWeyl群の定義

Kac-Moody Lie環の定義は §0の構造定理が出発点になる。その前にまず Cartan 行列の持つ性質を幾つか抽出した一般型Cartan行列(以下 G.C.Mと略記)を定義しておく。

定義

ℓ 次正方行列 $C=(C_{ij})_{1\leq i,j\leq \ell}$ が G.C.Mであるとは次の4条件を満す時云う。

1) $C_{ij}\in\mathbb{Z}$ $i,j=1,2,\cdots,\ell$ 2) $C_{ii}=2$ $i=1,2,\cdots,\ell$

3) $C_{ij}\leqq 0$ $\forall i\neq j$ 4) $C_{ij}=0 \Longleftrightarrow C_{ji}=0$ $\forall i\neq j$

§0 の構造定理に於て Cartan 行列の代りに G.C.M を用いて 生成元と基本関係により Lie 環Lを定義した時, 正確には Lは少し変更する必要があるが, Lは最早 有限

次元ではないが，にもかかわらず うまい L-moduleをとってくれば §0 の 4°)，5°)，6°) の定理が成立するというのが Kac の重要な発見であった。(Kac [3])

特に G.C.M の中でも Euclidean type (後で定義を与える。)と 呼ばれるものについて Weylの分母公式を書き下したものが Dedekind η-関数の n乗(nは単純Lie環の次元)の展開を与える Macdonaldの恒等式になるというのが 以下紹介する話の筋道である。(Macdonald の恒等式のmysterious term の意味を Kac-Moody Lie環を用いて見事に解釈したのは Moody [8]である。)

まず Kac-Moody Lie環の正確な定義から与えよう。

G.C.M $C=(C_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,\ell}$が与えられた時，$\mathbb{C}$上のLie環 $L_1(C)$を 3ℓ 個の生成元 $e_1, e_2, \cdots, e_\ell, h_1, \cdots, h_\ell, f_1, \cdots, f_\ell$と基本関係(0.1) により定義する。(但し (0.1)の基本関係で Cartan行列の代りに G.C.M Cを用いる。)

今 $L_1(C)$の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して 記号 $(x_1, x_2, \cdots, x_\ell)$ を $(x_1, x_2, \cdots, x_\ell) := \mathrm{ad}\,x_1\, \mathrm{ad}\,x_2 \cdots \mathrm{ad}\,x_{n-1}\, x_n = [x_1[x_2[\cdots[x_{n-1}\, x_n]\cdots]$

により 定義し $L_1(C)$の部分空間 $\ell_1(n_1, n_2, \cdots, n_\ell)$を

i) $n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0, \cdots, n_\ell \geq 0$ $(n_1, \cdots, n_\ell) \neq (0, 0, \cdots, 0)$の 時

$$\ell_1(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) := \sum_{\substack{(e_{i_1}, \cdots e_{i_s})\text{中} \\ e_j\text{が}\, n_j\text{個出現}}} \mathbb{C}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_s})$$

ii) $n_1 \leqq 0, n_2 \leqq 0, \cdots, n_\ell \leqq 0 \quad (n_1, n_2, \cdots, n_\ell) \neq (0,0,\cdots,0)$の時

$$\mathfrak{l}_1(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) := \sum_{\substack{(f_{i_1},\cdots f_{i_s})\text{中} \\ f_j\text{が}-n_j\text{個出現}}} \mathbb{C}(f_{i_1}, \cdots f_{i_s})$$

iii) $n_1 = n_2 = \cdots = n_\ell = 0$ の時

$$\mathfrak{l}_1(0,\cdots,0) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{C} h_i \quad (=\mathfrak{f}\text{とおく。})$$

iv) 上の i) ii) iii) 以外の時

$$\mathfrak{l}(n_1, n_2, \cdots n_\ell) = 0$$

と 定義すると $L_1(C)$ は

$L_1(C) = \mathfrak{f} \oplus \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} \mathfrak{l}_1(n_1, n_2, \cdots n_\ell)$ という直和分解を許し

$\mathbb{Z}^\ell$ graded ring になる。(この事実は 有限次元の場合のルートの同符号性と対応している。)

さらに $L_1(C)$ 中の Ideal の集合Mを

$$M = \{\mathfrak{a} \subset L_1(C) ;\ \mathfrak{a}\text{は } L_1(C)\text{の homogeneous Ideal で } \mathfrak{a} \cap \mathfrak{f} = \{0\}\}$$

と 定義すると Mには 包含関係に関して最大元が一意的に存在する。それを $\mathfrak{R}$とすると

<u>定義</u>

$L(C) := L_1(C)/\mathfrak{R}$ を Kac-Moody Lie 環と云う。

注意 この $\mathfrak{R}$ は $\{0\}$ ではないかという予想を Kac がしているが 未だ 証明も反例もない。

最初の G.C.M Cが分解可能のとき, 即ち 置換行列Pが存在して $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ となるとき, A, B もG.C.Mで

$L(C) \underset{\text{同型}}{\cong} L(A) \times L(B)$ が成立する。よって以下 既約な G.C.M についてのみ考えればよい。

$L = L(C)$を G.C.M C から構成された Kac-Moody Lie 環とする。

$\mathfrak{R}$は homogeneous ideal より Lも graded ring になり

$$L = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(n_1 \cdots n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell} \mathfrak{l}(n_1, \cdots, n_\ell)$$ と云う直和分解が成立する。

L上にルート系，及び Weyl 群を 定義しよう。

まず ルート系については 有限次元との類似を追えば simple root $\alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ $i = 1, 2, \cdots, \ell$ を $\alpha_i(h_j) := C_{ji}$, $\forall j = 1, 2, \cdots, \ell$ により定義し ルート系Δを $\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* ; \ \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$ 但し $\mathfrak{l}(n_1, \cdots, n_\ell) \neq 0\}$ により定義したいのだが G.C.M Cが $\det C = 0$ の場合も有り得るので simple root の持つ重要な性質 "$\mathbb{C}$上一次独立" が 崩れてしまう。そこで 次の様な technique で ここを乗り切る。

Lの微分全体のなす Lie 環を $\mathrm{Der}(L)$で示すとき D_i $i = 1, 2, \cdots, \ell$ という Lの微分を

$$D_i x = n_i x \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{l}(n_1, \cdots, n_\ell)$$

により 定義し $D_1, \cdots, D_\ell$ により生成される $\mathrm{Der}(L)$の部分 Lie 環を $\mathcal{D}_0$ で表す。さらに Lie 環 $L^{e\prime}$ を

$$(L^e)' = \mathcal{D}_0 \oplus L \quad (\text{Lie 環の半直積})$$

$$(\mathfrak{h}^e)' = \mathcal{D}_0 \oplus \mathfrak{h}$$

により 定義し $\alpha_i' \in ((\mathfrak{h}^e)')^*$ $i = 1, 2, \cdots \ell$ を

$$\mathrm{ad}\, h \cdot e_i = \alpha_i'(h)\, e_i \qquad \text{for } \forall h \in (\mathfrak{h}^e)'$$

で定義すると $\mathrm{ad}\, D_j \cdot e_i = D_j \cdot e_i = \delta_{ij} e_i = \alpha_i'(D_j) e_i$ より $\alpha_i'(D_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, \cdots, l$ となり $\alpha_1', \cdots, \alpha_l'$ は一次独立になる。そこで $\mathfrak{D}_0$ の部分空間 $\mathfrak{D}$ で $\alpha_1'|_{\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{h}}, \cdots \alpha_l'|_{\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{h}}$ が一次独立になる様な極小の部分空間 $\mathfrak{D}$ をとり固定する。

$$L^e := \mathfrak{D} \oplus L \qquad \mathfrak{h}^e := \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{h}$$

と定義し $\alpha_i'|_{\mathfrak{h}^e} = \alpha_i \in (\mathfrak{h}^e)^*$ とおけば $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ は定義から $\mathbb{C}$ 上一次独立になる。$\alpha_1, \cdots, \alpha_l \in (\mathfrak{h}^e)^*$ を L の simple root と定義し L のルート系 Δ を

$$\Delta := \{ \alpha \in (\mathfrak{h}^e)^* ;\ \alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \quad l(n_1, \cdots n_l) \neq 0 \}$$

により定義する。

この時 有限次元の場合と同様に ルート空間分解

$$L^e = \mathfrak{h}^e \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} L^\alpha \qquad \text{但し } L^\alpha = \{ x \in L^e ;\ \mathrm{ad}\, h\, x = \alpha(h) x \ \text{for } \forall h \in \mathfrak{h} \}$$

が成立する。更に $n_1 \geqq 0, \cdots, n_l \geqq 0$ $(n_1, \cdots n_l) \neq (0, \cdots, 0)$ のとき $\sum n_i \alpha_i$ を正ルート，$n_1 \leqq 0, \cdots n_l \leqq 0$ $(n_1, \cdots n_l) \neq (0, \cdots 0)$ のとき $\sum n_i \alpha_i$ を負ルートと呼ぶと

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^- \quad , \quad -\Delta^+ = \Delta^-$$

が成立する。(ここで Δ^+ は正ルートの集合，Δ^- は負ルートの集合)

ルートの定義が終えたので Weyl 群の定義に入る。

$(\mathfrak{h}^e)^*$ の l 次元部分空間 V を　$V := \sum_{i=1}^{l} \mathbb{C}\alpha_i$　により定義する。そこで Weyl 群 $W \subset GL(V)$ を

$W = \langle w_i \rangle_{i=1,2,\cdots,l}$　但し　$w_i \in GL(V)$ は

$w_i(\alpha_j) := \alpha_j - \alpha_j(h_i)\alpha_i = \alpha_j - C_{ij}\alpha_i \quad \forall j=1,2,\cdots,l$ で与えられる，によって定義する。

この時　$w_i^2 = \mathrm{Id}$　及び　$W\Delta = \Delta$, $\dim L^{\alpha} = \dim L^{w(\alpha)}$ $\forall w \in W$ が成立することが $sl(2,\mathbb{C})$ の表現論からわかる。

さらに $\forall w \in W$ に対して

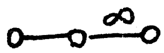
$$\Phi_w = \{\alpha \in \Delta^+ ;\ w^{-1}(\alpha) \in \Delta^-\} = \Delta^+ \cap w(\Delta^-)$$

と定義すると w の $w_1, \cdots, w_l$ に関する長さ $l(w)$ について $l(w) = \#|\Phi_w|$ が成立し W が二元消去律を満し従って Coxeter 群になることが有限次元半単純 Lie 環の場合と同様に証明できる。その $w_1, \cdots w_l$ に関する基本関係を書いてやると

$$w_i^2 = 1 \quad i=1,2,\cdots,l \qquad (w_i w_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (m_{ij} < \infty)$$

但し m_{ij} は i) $C_{ij}C_{ji} = 0$ の時 $m_{ij} = 2$　ii) $C_{ij}C_{ji} = 1$ の時 $m_{ij} = 3$　iii) $C_{ij}C_{ji} = 2$ の時 $m_{ij} = 4$　iv) $C_{ij}C_{ji} = 3$ の時 $m_{ij} = 6$　v) $C_{ij}C_{ji} \geqq 4$ の時 $m_{ij} = \infty$　で与えられる。

例えば G.C.M $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ の Weyl 群の Coxeter 図形は



となり $SL(2,\mathbb{Z})$ を Index 2 で含む Coxeter 群になる。

最後に もう一つ定義として simple root の W-orbit
$W\alpha_1 \cup W\alpha_2 \cup \cdots \cup W\alpha_\ell =: \Delta_R$ とおき これを real root
と云う。さらに $\Delta_I := \Delta - \Delta_R$ と定義し Δ_I の各元を
imaginary root と云う。 $\dim L^\phi = \dim L^{w\phi}$ より
$\Delta_R \ni {}^\forall\phi$ に対して $\dim L^\phi = 1$ が 成立する。

§2 Euclidean Lie 環

以下 この節では Kac-Moody Lie 環の中でも重要な class である Euclidean Lie 環について述べる。

実際 今のところ Kac-Moody Lie 環の中でも root 系及び その *multiplicity* が計算されているのは この Euclidean Lie 環だけで この場合に Weylの分母公式に相当する式が Macdonaldの恒等式なのである。

この節では 考える Kac-Moody Lie 環は 全て既約な G.C.M から 構成したものとする。

<u>定義</u>

Kac-Moody Lie 環 L が 中心に含まれない non trivial Ideal を持つ時 L を Euclidean Lie 環と云い 元の G.C.M C も Euclidean type と云う。

Euclidean Lie 環については Moody が その精密な構

造を求めている。それを定理の形で述べると

定理（Moody [6] [7]）

既約な G.C.M C が与えられたとき

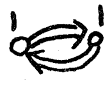
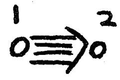
C が Euclidean type $\Longleftrightarrow$ $A := 2I - C$ とおくと

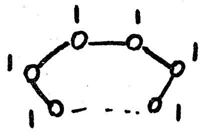
A の固有値半径 $\sigma(A) = 2$

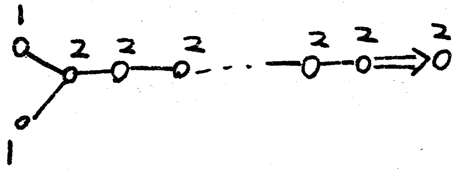
但し A の固有値半径 $\sigma(A)$ は $\sigma(A) := \max\limits_{\alpha \text{はAの固有値}} |\alpha|$ で定義する。

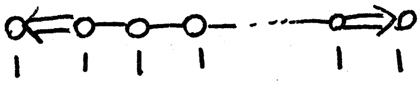
注意　上の行列 A は C が既約な G.C.M より Frobenius 行列になっている。

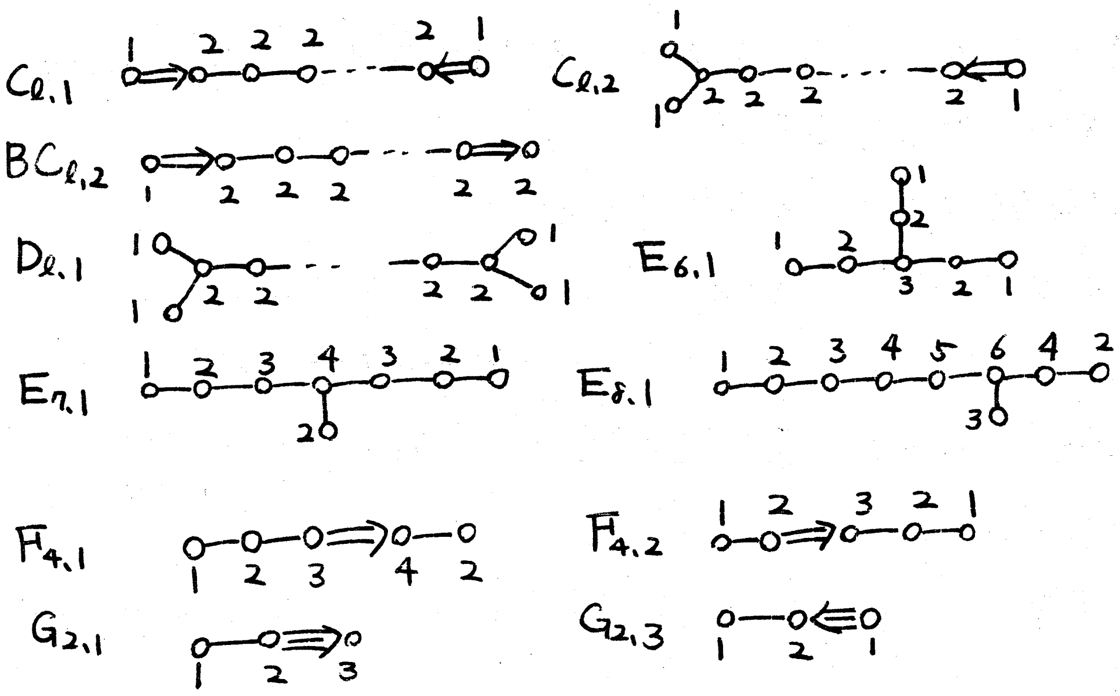
特に上の定理から $\det C = 0$，かつ $\forall i = 1, 2, \cdots, \ell$ に対して C から i 行 i 列を除いてできる行列 C_i は有限次元半単純 Lie 環の Cartan 行列になることがわかる。従って Euclidean type の G.C.M を Dynkin diagram で書いてやると次の表が得られる。

$A_{1,1}$  G.C.M $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，$A_{1,2}$  G.C.M $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{\ell,1}$ $\ell \geqq 2$ 

$B_{\ell,1}$ $\ell \geqq 3$ 

$B_{\ell,2}$ $\ell \geqq 2$ 



上の表で label $X_{\ell,r}$ (例えば $A_{\ell,1}$, $B_{\ell,2}$ etc) の図形は頂点数が $\ell+1$ 個, 従って size が $\ell+1$ 次の G.C.M に対応している。また r は tier number と呼ばれているもので少し後で定義を与える。

各図形に書き込まれている数 $\xi=(n_0, n_1, \cdots, n_\ell)$ は対応する G.C.M を C とすると Frobenius 行列 $A:=2I-C$ の固有値 2 に対応する固有 vector である。(Frobenius 行列の議論より この様な $\xi=(n_0, n_1, \cdots, n_\ell)$ は $1=\min_{i=0,1,\cdots,\ell} n_i$ という条件の下で一意的に定まる(ref 岩堀 [1])。)

この時 Moody により次の定理が示されている。但し ξ に対応する $(\mathfrak{f}^e)^*$ の元も同じ ξ で表すことにする。

定理 (Moody)

Lが Euclidean Lie環の時, その imaginary root Δ_Iは

$\Delta_I = \mathbb{Z}\xi$ で与えられる。従って $\Delta = \Delta_R \cup \mathbb{Z}\xi$。

そこで tier number rを

$$r := \min\{n \in \mathbb{N} \ ; \ n\xi + \Delta = \Delta\}$$

により 定義する 。この時 rは 1, 2, 3 何れかの値をとる。さらに Euclidean Lie環の場合には imaginary rootの重複度まで Moodyにより求められている。定理の形で述べると次の通りである。

定理 (Moody [ ])

Lを Euclidean Lie環とする。その時

i) $k \neq 0$, $k+nr \neq 0$ を満す任意の整数の組 (k, n) に対して $\dim L^{k\xi} = \dim L^{(k+nr)\xi}$

ii) $\dim L^{r\xi} = \ell$

(但し 上の ℓは Dynkin 図形の表の $X_{\ell, r}$ (e.g $A_{\ell,1}$, $B_{\ell,2}$ $F_{\ell,2}$ etc) の ℓである。即ち このとき Lを定義する G.C.Mの sizeは $\ell+1$ 次である。)

上の定理より tier number 2以上のEuclidean Lie 環Lに対して $\dim L^{k\xi}$, 但し kは $1 \leq k < r$を満す自然数, を求めてやればよい。

各場合について書いてやると 次の通りである。

L	$\dim L^{\mathfrak{z}}$
$A_{1,2}$	1
$B_{l,2}$	1
$C_{l,2}$	$l-1$

L	$\dim L^{\mathfrak{z}}$	$\dim L^{2\mathfrak{z}}$
$BC_{l,2}$	l	
$F_{4,2}$	2	
$G_{2,3}$	1	1

実は Euclidean Lie 環については ルート系及びその重複度のみならず その構造まで求められている。

特に tier number 1 の Euclidean Lie環 $X_{l,1}$ は 1次元の中心 $\mathfrak{z}$ を持ち $X_{l,1}/\mathfrak{z}$ は X_l型の単純Lie環 $\mathfrak{g}$ に Laurant polynomial ring $\mathbb{C}[t, \frac{1}{t}]$ を tensor したLie環と同型になる。即ち

$$0 \to \mathfrak{z} \to X_{l,1} \to \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}] \to 0 \quad (\text{exact})$$

例えば

$$A_{l,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}] = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}])$$

$$B_{l,1}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}] = \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C}[t, \tfrac{1}{t}])$$

etc.

が成立する。

§3 Kac-Moody Lie環の表現論とMacdonaldの恒等式.

有限次元半単純Lie環の表現論との類似を Kac-Moody Lie環に於ても成立させる為に ここでもうまい表現のclassをとってくる必要がある。そこで L^e module V ($\dim V \leqq \infty$) に対して

有限次元半単純Lie環の表現論に於て 成立する条件を 次々課していく。

定義 L^e module Vが weight module であるとは $V=\bigoplus_{\lambda\in(\mathfrak{h}^e)^*} V_\lambda$ (直和)が 成立することを云う。

ここで $V_\lambda := \{v\in V;\ \mathrm{ad}h\cdot v=\lambda(h)v \quad {}^\forall h\in\mathfrak{h}^e\}$である。

さて $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha\in\Delta^+} L^\alpha$ とおき L^eの universal enveloping algebraを $U(L^e)$とおく。このとき

定義 weight module Vが 次の条件を満すとき Vを highest weight module (以下 h.w.mと略記)と云う。

或る $\lambda\in(\mathfrak{h}^e)^*$と 或る $x\in V_\lambda$ が存在して

$$\mathfrak{n}x=0 \qquad U(L^e)x=V.$$

この時 $\dim V_\lambda=1$ で xは scalar倍を除いて確定する。このλを h.w.m V の highest weight, xを h.w.m Vの highest weight vectorと云う。

さらに Poincaré-Birkoff-Wittの定理より Vの任意の weight μは $\mu=\lambda-\sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i$, 但し $n_i\geqq 0$ for ${}^\forall i=1,2,\cdots\ell$ と書け $\dim V_\mu<\infty$ が成立する。

しかしながら これだけでは また 条件不足で Vが有限次元のときには trivialに成立する条件をつける。

定義 L^e module Vが standard module とは 次の二条件を満すとき云う。

i) V は highest weight vector x を持つ h.w.m

ii) 任意の $i=1,2,\cdots,l$ に対して 或る $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在して

$$f_i^n = 0 \quad i=1,2,\cdots,l.$$

上の ii)の条件から V は $sl(2,\mathbb{C})$ に同型な L^e の部分環 $S_i := \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}h_i + \mathbb{C}f_i$ の下で 有限次元既約 S_i module の直和に分解する。そしてこのことが 議論を円滑に進める推進力となるのである。以下 standard module が Kac-Moody Lie 環の表現論を考える舞台となる。

特に 上のことから V を standard module, μ をその weight とすると $\forall w\in W$ (Weyl 群) に対して $\dim V_\mu = \dim V_{w(\mu)}$ が成立する。

このとき §0 の Elie Cartan の定理 4°) は次の形で成立する。がその前に dominant integral weight の定義を与えておく。

定義 $\mu\in(\mathfrak{h}^e)^*$ が dominant integral weight とは $\mu(h_i)\in\mathbb{Z}$, $\mu(h_i)\geqq 0$ $\forall i=1,2,\cdots,l$ が成立するとき云う。

今 P を"全ての dominant integral weight の集合"とすると §0 の Elie Cartan の定理は

定理

既約な standard module の同値類と P の元とは 1:1 onto に対応する。この対応は standard module に対して その

highest weightを 対応させることにより与えられる。

さて Weylの指標公式, 及び分母公式の拡張を行う。

今 Vを weight moduleで 各weight spaceは 有限次元とする。その時 formal character $\chi(V)$を

$$\chi(V) := \sum_{\mu\in(\mathfrak{h}^e)^*} (\dim V_\mu)\, e^{\mu}$$

で定義する。$\chi(V)$は $(\mathfrak{h}^e)^*$の元の形式的整係数一次結合(無限和)全体のなす加群Bの元である。

Bは $(\mathfrak{h}^e)^*$ の群環も含み, ℓ変数形式的巾級数環A

$A := \mathbb{Z}[[e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \cdots, e^{-\alpha_\ell}]]$ をも含む。(Aの元は $e^{-(n_1\alpha_1+\cdots+n_\ell\alpha_\ell)}$ $n_i\geq 0,\ n_i\in\mathbb{Z}$, の形式的一次結合になり その積は $(\sum x_\gamma e^{-\gamma})(\sum y_\varepsilon e^{-\varepsilon}) = \sum z_\omega e^{-\omega}$, 但し

$z_\omega = \sum x_\gamma y_{\omega-\gamma}$ (有限和) で定義される。)

今 dominant integral weight $\mu\in P$を highest weightに持つ standard L^e module Vに対しては $e^{-\mu}\chi(V)\in A$が成立する。そこで 古典論の時に 正ルートの和の半分に当る $\rho\in(\mathfrak{h}^e)^*$ を導入する。$\forall i=1,2,\cdots,\ell$ に対して $\rho(h_i)=1$ となる $\rho\in(\mathfrak{h}^e)^*$を一つとり固定する。この時 Kac-Moody Lie環に於ても 有限次元の場合と同様に $\rho - w\rho = -\langle\Phi_w\rangle$ が 成立する。但し $\Phi_w = \Delta^+\cap w(\Delta^-)$ で $\langle\Phi_w\rangle$は Φ_wの元の和, 即ち $\langle\Phi_w\rangle = \sum_{\alpha\in\Phi_w}\alpha$ である。

このとき §0の Weylの指標公式の分子, 分母に当る式,

$$N(\mu)=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\mu+\rho)-(\mu+\rho)} \qquad \text{及び}$$
$$D=\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}$$

を Kac-Moody Lie 環に於ても同じ式で定義すると D 及び $N(\mu)$ は A の元になる。実際 $D\in A$ は $w\rho-\rho=-\langle\Phi_w\rangle$ より明らかで $N(\mu)\in A$ は $\mu+\rho$ が dominant integral weight になり $\mu+\rho$ を highest weight とする standard module V_1 を考えれば $w(\mu+\rho)$ も V_1 の weight になり 従って

$\mu+\rho-w(\mu+\rho)=\sum_{i=1}^{\ell}n_i\alpha_i \quad n_i\in\mathbb{Z},\ n_i\geqq 0$ が成立するからである。(A 及び $N(\mu)$ が well defined であることは μ が dominant integral weight の時，$\rho-w\rho=\langle\Phi_w\rangle$，$\ell(w)=\#|\Phi_w|$ より $w(\mu+\rho)=\mu+\rho$ ならば $w=1$ が成立することから従う。)

特に D は A の可逆元である。そこで Kac-Moody Lie 環 L と，L の standard module V に対して Weyl の指標公式

$$e^{-\mu}\chi(V)=\frac{N(\mu)}{D}=\frac{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w(\rho+\mu)-(\rho+\mu)}}{\sum_{w\in W}(\det w)\,e^{w\rho-\rho}}$$

が A 中で成立することを期待したいが 残念ながら今のところ 一般の G.C.M から構成された Kac-Moody Lie 環に対しては Conjecture に過ぎない。

定義 G.C.M C が"対称化可能"とは 正の有理数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\ell$ を対角成分にもつ対角行列 Λ が存在して ΛC が対称行列になることを云う。

例えば Euclidean typeのG.C.Mは 全て対称化可能であるし，tree型のDynkin diagramを持つG.C.Mは全て対称化可能である。そこでWeylの指標公式は

定理 (Kac [3])

対称化可能なG.C.Mから構成されたKac-Moody Lie環Lとhighest weight μをもつ standard L^e module Vに対して

$$(3.1)\quad e^{-\mu}\chi(V)=\frac{N(\mu)}{D}=\frac{\sum_{w\in W}(\det w)e^{w(\mu+\rho)-(\mu+\rho)}}{\sum_{w\in W}(\det w)e^{w\rho-\rho}}$$

が Aに於て 成立する。

Weylの分母公式については

定理

対称化可能なG.C.Mから構成されたKac-Moody Lie環 Lに対して

$$(3.2)\quad D=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim L^\alpha}$$

が成立する。

特に 上の分母公式を Lが Euclidean typeの時に 書き下したものが Macdonald Identityである。

G.C.Mが対称化可能な時には L^e上に Killing form に似た不変な内積が入り それが 議論を円滑に推し進めるのである。この (3.1) 及び (3.2) を用いて 古典的関数等式を 出すには (3.1) 及び (3.2)の両辺に

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{Z}[[q]] \\ \cup\!\!\!\!\!\!\!\psi & & \cup\!\!\!\!\!\!\!\psi \\ e^{-\alpha_i} & \longmapsto & q^{s_i} \quad i=1,2,\cdots,l \end{array}$$

但し $\mathbb{Z}[[q]]$は一変数形式的中級数環，

$(s_1,\cdots,s_l)$ は 非負整数の l 個の組，という homomorphism を 施せばよい。これを $(s_1,\cdots s_l)$ 型の q 特殊化と云う。

例えば $A_{1,1}$ 型の Euclidean Lie 環の分母公式に うまい特殊化を施してやると Jacobi の triple product identity が出てくる。

文献表

[1] 岩堀長慶「線型不等式とその応用」 岩波講座 基礎数学 8

[2] J. Lepowsky "Lectures on Kac-Moody Lie algebra" Paris VI 1978

[3] V. Kac "Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth" Izv Akad Nauk SSSR, 32, 1968 pp 1323~1367

[4] V. Kac "Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind's η-function, Classical Möbius function---" Adv. Math 30, 1978 pp 85~136

[5] I. Macdonald "Affine root systems and Dedekind's η-function" Inventiones Math 15 1972 pp 91~143

[6] R. Moody "A New class of Lie algebra" J. Alg 10 1968 pp 211-230

[7] R. Moody "Euclidean Lie algebras" Canad. J. Math 21 1969 pp 1432 - 1454

[8] R. Moody "Macdonald Identities and Euclidean Lie algebras"

Proc A.M.S 48 1975 pp43~52

[9] Moody-Teo "Tits' System with crystallographic Weyl groups" J. Alg 21, 1972 pp178~190