数理解析研究所講究録
395巻 1980年 112-120

Open 素イデアルが完全素イデアルであるような コンパクト位相半群について

城西大学 理学部 沼倉克己

§1．全篇を通じて，Sはコンパクト位相半群を，EはSの巾等元全部の集合を表わすものとする．また，特に断らないかぎり，使用する術語は山田［7］に従う．

$a \in S$ のとき，a で生成されるSの closed な部分半群を $\Gamma(a)$ で示す，すなわち

$$\Gamma(a) = \{a^n \mid n = 1, 2, \cdots\cdots\}^*.$$

また，

$$K(a) = \cap_{n=1}^{\infty} \{a^i \mid i \geqq n\}^*$$

とおく．

（Sの部分集合Xに対して，X^* はXの閉包を示すものとする．）

このとき，$K(a)$ はコンパクト位相群であり，$K(a)$ の単位元を e とすれば，e は $\Gamma(a)$ に含まれるただ1つの巾等元で，かつ，$K(a) = \Gamma(a)e = e\Gamma(a)$ が成りたつことは，よく

知られた事実である．

$\Gamma(a)$ に含まれる（ただ1つの）巾等元が e であるとき，a は e に associate すると言い，$a \sim e$ とかく．

さて，$a, b \in S$, $a \sim e$, $b \sim e$ $(e \in E)$ とする．もし，$ab = ba$ であれば $ab \sim e$ なることは容易にわかる．したがって，各 $e \in E$ に対して

$$T_e = \{a \in S \mid a \sim e\}$$

と T_e を定義すれば，S が可換半群の場合 T_e は S の部分半群となる．T_e はもちろんただ1つの巾等元 e を含む半群（このような半群を"単巾半群"と言う）であり，さらに，e, $f \in E$, $e \neq f$ のとき $T_e \cap T_f = \phi$ であることは見易い．

しかし，S が可換でない場合は T_e はかならずしも S の部分半群とはかぎらない．その例として，つぎにあげる有限半群がある．

例．S は5個の元 $a, b, e, f, 0$ から成る半群で，その乗法表はつぎの通りとする（[4; p.51] 参照）．

	a	b	e	f	0
a	0	f	a	0	0
b	e	0	0	b	0
e	0	b	e	0	0
f	a	0	0	f	0
0	0	0	0	0	0

この半群においては，$E=\{e, f, 0\}$，$a\sim 0$，$b\sim 0$ であるが，$ab\sim f\neq 0$ である．

Sが可換でなくとも，Sの open 素イデアルがすべて完素イデアルであれば，T_e はSの部分半群となる．これを示すことがこの小篇の目的である．

（PがSの open 素イデアルであるとは，Pは（1）ハウスドルフ空間Sの部分集合として開集合であり，かつ，（2）半群Sの素イデアルである，ということである．closed 部分半群等々，同様の意味である．）

§2．まず，使用する記号と既知の事項を列記する．

（I）　X，YをSの部分集合とするとき，$X\setminus Y$ をもってXにおけるYの補集合を示す，すなわち，$X\setminus Y=\{x\in S \mid x\in X,\ x\notin Y\}$．$Y$が1点$y$から成る集合のときは，$X\setminus\{y\}$ の代りに $X\setminus y$ とかく．

（II）　$A\subset S$のとき，$J_0(A)$ をもってAに含まれるSのイデアル全部の和集合を示す．したがって，$J_0(A)$ は Aに含まれるSの最大のイデアルである．（便宜上，本篇では，空集合を素イデアルとして取扱うことにする．）

（III）　$a, b\in S$とする．$J_0(S\setminus a)\subset J_0(S\setminus b)$ であるための必要十分条件は，$S^1aS^1\subset S^1bS^1$ なることである．

（[1; Lemma 9] 参照．）．

（IV）　$P(\neq S)$ が S の open 素イデアルならば，$e\in E$ が存在して $P=J_0(S\setminus e)$．逆に，$e\in E$ なら $J_0(S\setminus e)$ は S の open 素イデアルである（[1; Theorem 2] 参照）．

（V）　$e\in E$ のとき，e を含む S の極大部分群を $H(e)$ で表わす．$H(e)$ は S の closed 部分群である（[4; Theorem 1.1.3, p.18 および Theorem 1.1.5, p.19] 参照．）．

（VI）　M を S のイデアル，$e\in E$ とする．(1) $e\notin M$，かつ，(2) $(eSe\setminus M)\cap E=\{e\}$ であるとき，e を M－原始的巾等元と言う．ϕ－原始的巾等元を単に原始的巾等元と言う．

P を S の open 素イデアルとするとき，$e\in E$ が P－原始的であるための必要十分条件は　$P=J_0(S\setminus e)$ となることである（[2; Lemma 2.1, p.129]）．

以下，S は open 素イデアルが完全素イデアルであるようなコンパクト位相半群とする．

補題 1．　$a, b\in S$，$a\sim e$，$b\sim f$，$ab\sim g$ $(e, f, g\in E)$ とする．このとき，$SeS\subset SfS$ ならば，$SgS=SeS$ である．

証明．　$SgS\neq SeS$ と假定し，矛盾を導こう．

(III) より $J_0(S\backslash g) \neq J_0(S\backslash e)$．よって，$g \in J_0(S\backslash e)$ または $e \in J_0(S\backslash g)$．さて，$g \in J_0(S\backslash e)$ ならば正の整数 n が存在して $(ab)^n \in J_0(S\backslash e)$．これより $a \in J_0(S\backslash e)$，または $b \in J_0(S\backslash e)$ を得る．前者は $e \in J_0(S\backslash e)$ を意味し，後者は $f \in J_0(S\backslash e) \subset J_0(S\backslash f)$ を意味するから，何れにしても矛盾である．また，$e \in J_0(S\backslash g)$ ならば正の整数 m が存在して $a^m \in J_0(S\backslash g)$，したがって $a \in J_0(S\backslash g)$ であり，それ故 $ab \in J_0(S\backslash g)$．これは $g \in J_0(S\backslash g)$ を導くから矛盾である．

<u>定理 2</u>．　各 $e \in E$ に対して

$$T_e = \{a \in S \mid a \sim e\}$$

は S の部分半群である．

<u>証明</u>．　$a, b \in S$，$a \sim e$，$b \sim e$ のとき $ab \sim e$ を示せば十分である．

$ab \sim g$ $(g \in E)$ とすれば，補題 1 により $SgS = SeS$．よって，$J_0(S\backslash g) = J_0(S\backslash e)$．この open 素イデアルを P とおく．さて，巾等元 g は P-原始的であるから，Sg は P に含まれないような S の左イデアルの中で極小（[3 ; Theorem 2.9, (iii)] 参照）．また，P は完全素イデアルであり，e，$g \notin P$ なる故 $Seg \not\subset P$．さらに，$Seg \subset Sg$ より $Seg = Sg$ を得る．同様にして，$gS = geS$ である．

つぎに，$ge = e$ を証明しよう．$ge \neq e$ とすれば，

$ge \notin H(e)$. 何となれば，$ge \in H(e)$ なら $(ge)^2 = g(e(ge)) = g(ge) = ge$，すなわち ge は群 $H(e)$ の巾等元であるから $ge = e$ となって終う．$ge \notin H(e)$ より g の近傍 V が存在し

$$Ve \cap H(e) = \phi .$$

$ae \in K(a) \subset H(e)$ および $be \in K(b) \subset H(e)$ より

$$(ab)e = a(be) = a(e(be)) = (ae)(be) \in H(e) .$$

帰納法により，任意の正整数 n に対して

$$(ab)^n e = (abe)^n \in H(e)$$

を得る．

一方，$ab \sim g$ であるから正整数 n_0 が存在して $(ab)^{n_0} \in V$. よって，

$$(ab)^{n_0} e \in Ve .$$

上の結果は $Ve \cap H(e) = \phi$ に反する．

故に，$ge = e$ である．同様にして，$eg = e$ を得る．よって，$Sg = Seg = Se$，$gS = geS = eS$．これより $g = e$．

定理2により S は単巾半群 T_e, $e \in E$ の疎和 (disjoint union) に分解することが判った．可換な S は単巾半群 T_e, $e \in E$ の半束に分解することはよく知られている

([6] 参照). "open 素イデアルが完全素イデアルである" という条件だけで, 可換の場合と同じような結果が成りたたないだろうか? すなわち, つぎのことが問題として残る.

問題 1. S は open 素イデアルが完全素イデアルであるようなコンパクト位相半群とする. このとき, S は単巾半群 T_e, $e \in E$ の帯に分解するか?

§3. 本節では, 前節の問題に対する肯定的な解答よりは大部弱い結果であるが, S はある性質をもつ部分半群の半束に分解することを示そう. 前節と同様, S の open 素イデアルは完全素イデアルであるとする.

この節の結果は, [5; II, 2, p.28] または [7; 2.2, p.72] からも容易に導かれる故, 証明は概略だけかくことにする.

P を S の素イデアル("空集合"も素イデアルとして取扱う) とするとき, $\tilde{E}(P)$ をもって P-原始的巾等元全部の集合を示すものとする. また,

$$S_P = \cup \{ T_e \mid e \in \tilde{E}(P) \}$$

とおく. P と Q が相異なる open 素イデアルならば $S_P \cap S_Q = \phi$ なることは見易い.

補題 3. P と Q を S の open 素イデアルとする. $P \subset Q$ ならば, $S_P S_Q < S_P \supset S_Q S_P$ である.

証明. $x \in S_P$, $y \in S_Q$ とすれば, $e \in \tilde{E}(P)$, $f \in \tilde{E}(Q)$ が存在し $x \sim e$, $y \sim f$ である. $xy \sim g$ ($g \in E$) とすれば, $SeS \subset SfS$ より $SgS = SeS$ (補題 1). よって $g \in \tilde{E}(P)$, すなわち $xy \in S_P$.

系 4. P が S の open 素イデアルであるとき, S_P は S の部分半群である.

定理 5. P を S の open 素イデアルとする. 半群 S_P の巾等元はすべて原始的である.

証明. S_P に含まれる巾等元は, S の巾等元として P-原始的であることより明か.

定理 6. P, Q を S の open 素イデアルとすれば, S の open 素イデアル R が存在して $S_P S_Q \subset S_R \supset S_Q S_P$. したがって, S は部分半群 S_P の半束に分解する. ただし, P は S の open 素イデアル ($\neq S$) の集合を動くものとする.

証明. $e \in \tilde{E}(P)$, $f \in \tilde{E}(Q)$ とし, $ef \sim g$ なる $g \in E$ をとり $R = J_0(S \backslash g)$ とすればよい.

問題 1 が否定的な解答をもつ場合でも, つぎの問題は肯定的に解決されると予想する.

問題 2. P を S の open 素イデアルとする. S_P は単巾半群 T_e, $e \in \tilde{E}(P)$ の帯に分解するか?

参考文献

[1] Katsumi Numakura, Prime ideals and idempotents in compact semigroups, Duke Math. J., 24 (1957), pp.671-680.

[2] ――――――, Topics on open prime ideals in compact semigroups, 京大数理解析研究所講究録 292 (半群論セミナー) (1977), pp.127-137.

[3] ―――――― , On q-ideals in compact semigroups, Czecho. Math. J., 28(103) (1978), pp.312-323.

[4] A. B. Paalman-de Miranda, Topological semigroups, Mathematical Centre Tracts, Amsterdam, 1970 (2nd Edition).

[5] Mario Petrich, Introduction to semigroups, Charles E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1973.

[6] Štefan Schwarz, The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups, Czecho. Math. J., 6(81) (1956), pp.330-364.

[7] 山田深雪, 半群論入門, 槇書店 (数学選書) (1976).