数理解析研究所講究録
395巻 1980年 64-73

半群における或る非極大 Order に関する Arithmetic と正則集合の分解について

山口大 理 村田憲太郎

半群の Asano order は，環のそれの一般化として考えられ，それに関する研究がされている（[1]，[3] 等）．いま E を半群の bounded order とし，E に含まれ E と対等な order を $\mathfrak{o}$ とする．$\mathfrak{o}$ 両側 ideal の modular closure を考え，[2] にならって，$\mathfrak{o}$ の E に関する conductor を定義し，それに対する regular ideal およびその拡張としての正則集合を導入してその一意分解をのべる．

§1 Modular Closure

$\mathfrak{o}$ を半群 S の bounded order とする．$\mathfrak{o}$ 両側 ideal を単に $\mathfrak{o}$-ideal という．$\mathfrak{o}$-ideal 全体からそれ自身への写像 $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}'$ が，包含，単調，巾等で，さらに $\mathfrak{o}'=\mathfrak{o}$，$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})'$ をみたすものとする．$\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}$ なる ideal $\mathfrak{a}$ を closed な ideal 又は c-ideal という．c-ideal の全体が modular 束をなすとき，$'$ を modular closure という．

たとえば，つぎの exchange property があれば，′ はこのような closure である．（ドイツ文字は $\mathfrak{o}$-ideal を示す．）

$\mathfrak{r} \subseteq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})'$, $\mathfrak{r} \not\subseteq \mathfrak{a} \implies \exists \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{b}'$ s.t. $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{r})' = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{d})'$

いま $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}$ を $(\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{b})' = (\mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{b})'$, $\mathfrak{a}_1 \subsetneqq \mathfrak{a}_2$ なる c-ideal とする．$c \notin \mathfrak{a}_1$, $c \in \mathfrak{a}_2$ なる元 c をとれば，$\mathfrak{o}$ が bounded であることから $c \in \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \subseteq (\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{b})'$, $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{a}_2$ なる $\mathfrak{r}$ をとることができる．たとえば $\gamma \in \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{o}$ なる正則元 γ をとって $\mathfrak{r} = (\mathfrak{o}c\mathfrak{o} \cup \mathfrak{o}\gamma\mathfrak{o})'$ とすればよい．$\mathfrak{r} \not\subseteq \mathfrak{a}_1$ であるから $(\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{r})' = (\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{d})'$, $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{b}$ なる $\mathfrak{d}$ が存在する．$\mathfrak{d} \subseteq (\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{r})' \subseteq (\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2)' = \mathfrak{a}_2$ であるから，$\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}$ である．$\mathfrak{d} \not\subseteq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}$ は自明である．よって ′ は modular closure である．

たとえば，R を環とし，$\mathfrak{o}$ を R の環としての order とする．半群としての $\mathfrak{o}$ 両側 ideal $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a}$ から生成される環としての ideal を $\mathfrak{a}'$ とすれば，′ は exchange property をもつ．この他にも種々の例を挙げることができる．

§2 Regular Ideal

E を S の bounded maximal order とする．$\mathfrak{o}$ を E に含まれる S の order で $\lambda E \mu \subseteq \mathfrak{o}$ なる正則元 λ および μ が存在するものとする．このとき，E 両側 ideal は $\mathfrak{o}$ 両側

ideal である．

さて，$\mathfrak{v}$ の modular closure で $E'=E$ となるものをとる．$\mathfrak{f}=\{x\in S\mid ExE\subseteq\mathfrak{v}\}$ は $\mathfrak{v}$ に含まれる closed な E-ideal (c-E-ideal) として unique maximal なものである．これを $\mathfrak{v}$ の E に関する <u>conductor</u> という．これについて，つぎの補題が成り立つ．

<u>補題 1</u>. $\mathfrak{a}$ を $(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{f})'=\mathfrak{v}$ なる $\mathfrak{v}$-ideal とすれば，$(E\mathfrak{a}E)'$ は c-E-ideal で $(E\mathfrak{a}E)'=(E\mathfrak{a})'=(\mathfrak{a}E)'$，$(E\mathfrak{a}E\cup\mathfrak{f})'=E$，$(E\mathfrak{a}E\cap\mathfrak{v})'=\mathfrak{a}'$ が成り立つ．逆に $\mathfrak{A}$ を $(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{f})'=E$ なる E-ideal とすれば，$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{v}=\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{v}$-ideal で，$((\mathfrak{A}\cap\mathfrak{v})\cup\mathfrak{f})'=\mathfrak{v}$，$(E(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{v})E)'=\mathfrak{A}'$ が成り立つ．

$(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{f})'=\mathfrak{v}$ なる c-$\mathfrak{v}$-ideal $\mathfrak{a}$ の全体 $\mathbb{K}$ は包含関係と積 $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})'$ $(\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathbb{K})$ によって束半群である．また $(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{f})'=E$ なる c-E-ideal $\mathfrak{A}$ の全体 $\mathbb{L}$ についても同様で，$\varphi:\mathbb{K}\to\mathbb{L}$; $\mathfrak{a}\mapsto\varphi(\mathfrak{a})=(E\mathfrak{a}E)'$ は束半群としての同型対応を与え，φ によって素 ideal には素 ideal が対応する．

c-$\mathfrak{v}$-ideal $\mathfrak{a}$ に対して $(\mathfrak{r}\mathfrak{a})'\in\mathbb{K}$ なる $\mathfrak{r}\in\mathbb{K}$ が存在するとき，$\mathfrak{a}$ を regular ideal という．この定義は $(\mathfrak{a}\mathfrak{r})'\in\mathbb{K}$ なる $\mathfrak{r}\in\mathbb{K}$ が存在するときとしてもよい．それはつぎ

の補題によって保証される．

<u>補題2.</u> $\mathfrak{a}$ を regular ideal とする．$\mathfrak{b}\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{o}$ なる任意の $\mathfrak{b}\in\mathbb{K}$ に対して $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})'\in\mathbb{K}$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{a})'\in\mathbb{K}$ である．

2つの $\mathfrak{o}$-ideal $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ の左右の residual をそれぞれ $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}=\{x\in S\mid x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\}$, $\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a}=\{x\in S\mid \mathfrak{b}x\subseteq\mathfrak{a}\}$ によって定める．

いま $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 共に regular ideal とする．$(\mathfrak{u}\mathfrak{a})', (\mathfrak{v}\mathfrak{b})'\in\mathbb{K}$ なる $\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\mathbb{K}$ をとれば，$(\mathfrak{a}\mathfrak{u})', (\mathfrak{b}\mathfrak{v})'\in\mathbb{K}$ で，$\mathfrak{b}(\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{a})\subseteq\mathfrak{a}$ より，$\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a}$．したがって

$$\mathfrak{v}\mathfrak{b}(\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{a})\mathfrak{u}\subseteq\mathfrak{v}\mathfrak{b}(\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a})\mathfrak{u}\subseteq\mathfrak{v}\mathfrak{a}\mathfrak{u}\subseteq\mathfrak{o}.$$

ところで $(\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{u}\mathfrak{a}\mathfrak{u})'\in\mathbb{K}$ であるから $(\mathfrak{v}\mathfrak{b}(\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a})\mathfrak{u})'\in\mathbb{K}$．よって $((\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a})\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{b})'\in\mathbb{K}$，つまり $\mathfrak{b}\backslash\mathfrak{a}$ が regular である．同様に $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ も regular である．これより

<u>補題3.</u> regular ideal の全体 $\mathbb{T}$ は residuated lattice を作る．$\mathfrak{o}/\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{o}=\{x\in S\mid \mathfrak{a}x\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}\}=\mathfrak{a}^{-1}$ が成り立つ．

さて，$\mathfrak{a}\in\mathbb{T}$ に対して $\mathfrak{a}^*=(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ とすれば $\mathfrak{a}^*\in\mathbb{T}$．とくに $\mathfrak{a}\in\mathbb{K}$ ならば $\mathfrak{a}^*\in\mathbb{K}$ である．$\mathfrak{a}^*=\mathfrak{a}$ なる $\mathfrak{a}$ を $*$-closed な ideal という．いま $\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}^*=\mathfrak{b}^*$ によって定義する．このとき $G=\mathbb{T}/\sim$ は自然の積と順序 $C(\mathfrak{a})\leqq C(\mathfrak{b})\Leftrightarrow\mathfrak{a}^*\subseteq\mathfrak{b}^*$ によって条件完備な束群を作る．

ここに $C(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ を含む類を示す。よって $\mathbb{G}$ は abel 群で，強分配束をなす。$\mathfrak{a}\in\mathbb{K}$ のとき，$\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ なる $\mathfrak{b}$ は $\mathbb{K}$ の元である。このとき $C(\mathfrak{a})$ を整という。

一般に modular 束群において，2つの束商 a/c と b/d が変換的であれば，$b\leq a$ として，$a^{-1}c=(c\cup b)^{-1}c=(c^{-1}\cap b^{-1})c=e\cap b^{-1}c=b^{-1}(c\cap b)=b^{-1}d$ であるから，a/c と b/d が射影的のときも $a^{-1}c=b^{-1}d$ が成り立つ。そこで，このことと modular 束における JHS 定理を用いて，$\mathbb{G}$ の整元に関する細分定理，また $\mathfrak{a}^*=\mathfrak{a}$ なる $\mathbb{K}$ 元の細分定理を求めることができる。[1]，[5]．

§3. 半群の Asano Order に含まれそれと対等な Order に関する正則集合の分解

この節ではつぎの3つの条件を仮定する。

(1) 整なる c-E-ideal に関して極大条件が成立する。

(2) 素なる c-E-ideal はすべて極大である。

(3) 素なる c-E-ideal は $*$-closed ideal を含む。

このとき“$\sim$”は“$=$”となり，E は Asano order となる。[1]．この場合 $\mathbb{L}$ 元の素 ideal への分解は $\mathbb{L}$ の範囲内で得られるから，$\varphi^{-1};\mathfrak{A}\mapsto\mathfrak{A}\cap\mathfrak{o}$ によって $\mathbb{K}$ 元の素 ideal 分解が $\mathbb{K}$ の範囲内で得られる。よってつぎが成り立つ。

群 $\mathbb{G}(=\mathbb{T})$ は素な regular ideal を生成元とする無限巡回群の制限直積である．つまり各 regular ideal $\mathfrak{a}$ は，積の可換性を無視して，素な regular ideal の巾積（正，負）として一意的に表わされる：

$$\mathfrak{a}=\left(\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}}\mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}\right)'$$

ここに $\mathfrak{p}$ は素な regular ideal の全体 $\mathbb{P}$ をわたり，$\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ は有理整数で，ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ について $\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})=0$ である．この小論の目的は，この分解定理の拡張である．

S の部分集合 $\mathfrak{m}$ が <u>正則な両側集合</u>（略して <u>正則集合</u>）とは，つぎの２つの条件をみたすときである．

(1) $\mathfrak{m}$ の各元 x に対して $x\in\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}$ なる regular ideal $\mathfrak{a}$ が存在する．

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{m}$ に含まれる任意の regular ideal とすれば $(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})'$ も $\mathfrak{m}$ に含まれる．

さて $\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})=\inf\{\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\mid\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m},\ \mathfrak{a}: \text{regular}\}$ によって $\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})$ を定義する．いま $\sigma: \mathbb{P}\to\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ なる map でほとんどすべての $\mathfrak{p}\in\mathbb{P}$ に対して $\sigma(\mathfrak{p})\leq 0$ となるような σ の全体を Υ とする．$\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})$ を $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})$ と書きかえて，これを $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ への map とみると $\sigma_{\mathfrak{m}}\in\Upsilon$ である．各 $\mathfrak{p}\in\mathbb{P}$ を素点とした vector

$$(\cdots,\ \sigma(\mathfrak{p}),\ \cdots)$$

の全体を $\mathfrak{V}$ とし，$\mathrm{Min}(\sigma(\mathfrak{p}), \tau(\mathfrak{p}))$, $\mathrm{Max}(\sigma(\mathfrak{p}), \tau(\mathfrak{p}))$ を $\mathfrak{p}$ 坐標にもつ vector を，それぞれ，vector $(\cdots, \sigma(\mathfrak{p}), \cdots)$ と $(\cdots, \tau(\mathfrak{p}), \cdots)$ の結，交とすれば，これと通常の加法に関して，$\mathfrak{V}$ は $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ 上の束半群をなす．

つぎに，2つの正則集合 $\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_2$ の積を

$$\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 = \bigcup \{(\alpha_1 \alpha_2)' \mid \alpha_i \leq \mathfrak{m}_i\}$$

よって定義すれば，すべての正則集合 $\mathfrak{M}$ は，包含関係とこの積に関して束半群をなす．

<u>補題 4.</u> 2つの束半群 $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{V}$ は map

$$f : \mathfrak{m} \longmapsto f(\mathfrak{m}) = (\cdots, \sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}), \cdots)$$

によって，束半群として同型である．

任意の $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ について $f(\mathfrak{m})$ を3つの vector の和に分ける：

$$f(\mathfrak{m}) = v_+(\mathfrak{m}) + v_-(\mathfrak{m}) + v_{-\infty}(\mathfrak{m}).$$

ここに v_+, v_-, $v_{-\infty}$ はそれぞれ成分がすべて $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \geq 0$, $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \leqq 0$ $(\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \neq -\infty)$, $\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} -\infty \\ 0 \end{cases}$ となるものである．$P_+ = P_+(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} \mid \sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) > 0\}$, $P_- = P_-(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} \mid 0 \geqq \sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \neq -\infty\}$, $P_{-\infty} = P_{-\infty}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P} \mid \sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) = -\infty\}$ なる記号を用意する．

$$f^{-1}(v_+(\mathfrak{m})) = \Bigl(\prod_{\mathfrak{p} \in P_+} \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\Bigr)'$$

および

$$f^{-1}(\mathfrak{v}_{-}(\mathfrak{m})) = \bigcup\Big(\prod_{\mathfrak{p}\in P_{-}} \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\Big)'$$

が示される. ここに $\prod$ は有限積で, $\bigcup$ はあらゆる有限積についての和集合である.

素な regular ideal の任意の集合を P とし

$$\mathfrak{o}_P = \bigcup\{(\prod \mathfrak{p}^{-m})' \mid \mathfrak{p}\in P,\ m \geqq 0\}$$

によって $\mathfrak{o}$ の P 成分を定義する. この記法は通常のそれと違う. 通常は, P の $\mathbb{P}$ における余集合を P^c とするとき, 上式の右辺を $\mathfrak{o}_{P^c}$ で表わす. しかしわれわれの場合には, 上記の記法が便利である. $\mathfrak{o}_P \in \mathfrak{M}$ であることが分る.

<u>補題 5</u>　$f^{-1}(\mathfrak{v}_{-\infty}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{o}_{P_{-\infty}(\mathfrak{m})}$

この証明には [4] におけると同様な準備をすればよい.

以上のことから, つぎの結果を得る.

<u>定理</u>　<u>半群において, Asano order に含まれそれと対等な, modular closure をもつ, 任意の order に関するすべての正則集合は, 積の交換可能性を無視すれば, つぎのように一意的に分解される.</u>

$$\mathfrak{m} = \Big(\prod_{\mathfrak{p}\in P_{+}} \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\Big)' \cdot \Big(\bigcup_{\mathfrak{p}\in P_{-}}\big(\prod \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\big)'\Big) \cdot \mathfrak{o}_{P_{-\infty}(\mathfrak{m})}.$$

正則集合が積に関して半群をなすとき, それを<u>正則(部分)半群</u>という. 上の定理によって, つぎの結果が導かれる. 尚これらのことはすべて環の場合に適用されるものである.

系1　正則半群 $\mathfrak{m}$ はすべてつぎの形で与えられる.

$$\mathfrak{m} = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}\right) \cdot \sigma_P \qquad (\alpha_i > 0)$$

ただし, $\mathfrak{p}_i \in \mathbb{P}$, $P \subseteq \mathbb{P}$, $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} \cap P = \phi$ である. とくに, σ を含む正則半群は, $\mathbb{P}$ の任意の部分集合を P とするとき, σ_P で与えられ, それ以外には無い. ただし $\sigma_{\mathbb{P}} = S$ とし, $\sigma_\phi = \sigma$ とする.

系2　正則集合 $\mathfrak{m}$ の P $(P \subseteq \mathbb{P})$ 成分 $\mathfrak{m}_P = (\mathfrak{m}\sigma_P)'$ はつぎのように分解される.

$$\mathfrak{m}_P = \Bigl(\prod_{\mathfrak{p} \in P_+ \setminus P} \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\Bigr)' \cdot \Bigl(\bigcup \Bigl(\prod_{\mathfrak{p} \in P_- \setminus P} \mathfrak{p}^{\sigma_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p})}\Bigr)' \cdot \sigma_{P_{-\infty}(\mathfrak{m}) \cup P}$$

系3　$\mathbb{P}$ の任意の部分集合 P に対して $\mathfrak{G}$ から $\mathfrak{M}$ の中への写像 $\varphi_P : \mathfrak{a} \mapsto \varphi_P \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_P$ は $\mathfrak{a} \subseteq \varphi_P \mathfrak{a}$ をみたす半群としての準同型写像である. 逆に, 写像 $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{M} ; \mathfrak{a} \mapsto \varphi\mathfrak{a}$ が $\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})' = (\varphi\mathfrak{a}\varphi\mathfrak{b})'$ および $\mathfrak{a} \subseteq \varphi\mathfrak{a}$ をみたすならば $\varphi = \varphi_P$ なる $P \subseteq \mathbb{P}$ が存在する.

以上のことから, 種々の結果が導かれる. たとえば, 最近の Rehm による一連の結果を精しくしたり, さらにそれらの一般化など. しかし, それらについては他の機会にゆずることにする. (1980年7月20日)

文　　献

[1] Asano, K. and Murata, K., Arithmetical ideal theory in semigroups, J. Inst. Polytec., Osaka City Univ., 4 (1953) 9-33.

[2] Asano, K. and Ukegawa, T., Ergenzende Bemerkungen ueber die Arithmetik in Schiefringen, Ibid., Osaka City Univ., 3 (1951) 1-7.

[3] Maury, Guy, La condition "intéglement clos" dans quelques stuctures algébraiques, Ann. scient. Ec. Norn. Sup., 3e série, 78 (1961) 31-100.

[4] Murata, K., On lattice ideals in a conditionally complete lattice-ordered semigroup, Algebra Universalis, 8 (1978) 111-122.

[5] Murata, K., A note on arithmetics in semigroups, Proc. Japan Acad., 56 (1980) 133-135.