

Which subdiagonal algebras are nonselfadjoint
crossed products?

新潟大 理 斎藤 吉郎

近年, subdiagonal 環の構造研究は, 関数環の理論の非可換版として, また, 自己共役でない部分環の研究として, 発展してきた。その中での中心課題の一つは不変部分空間の構造研究である。 $L^2(T)$ (T : 単位円) における不変部分空間の研究は, Beurling の定理としてよく知られている。これは $e^{i\theta}me \subsetneq me$ なる $L^2(T)$ の不変部分空間は $gH^2(T)$ ($g \in L^2(T)$ で $|g|=1$ a.e.) の形しかけるということである。この一般化が, weak* Dirichlet 環において, 研究されている。さらに, 非可換 weak* Dirichlet 環として Arveson によって導入された subdiagonal 環において, Beurling 型の定理が考察された ([6], [8], etc). 1977年, McAsey, Muhly と筆者 [3] において subdiagonal 環の典型的な例として, 非共役接合積 (nonself-adjoint crossed products) の概念を導入し, Beurling 型の定理が成り立つことを示した。又, [4] において, 逆の定理が成り立つ

つための必要かつ十分条件を考察した。我々はこの講演ではこの逆を考察する。すなわち, finite maximal subdiagonal 環を与えたとき, Beurling 型の定理が成り立つならば \mathfrak{A} の subdiagonal 環を決定できるか? しかしながら, 驚くべきことに, この subdiagonal 環は, 非共役接合積と同型になることが示される。このから, Beurling 型の定理の研究は非共役接合積の場合だけ意味があることがわかる。

本稿では, まず, §1 で finite maximal subdiagonal 環の不変部分空間の構造を示す。次に, §2 で非共役接合積を定義し, Beurling 型の定理の成り立つための必要十分条件を示す。最後に, §3 で finite maximal subdiagonal 環が Beurling 型の定理が成り立つのは非共役接合積の場合に限ることを示す。

§1. 有限極大 subdiagonal 環と不変部分空間.

\mathfrak{B} を faithful normal tracial state ϕ をもつ von Neumann 環とする。 \mathfrak{B} を ϕ から, Segal [9] による \mathfrak{L}_p (非可換 Lebesgue 空間 $\mathfrak{L}_p(\mathfrak{B}, \phi)$ ($1 \leq p \leq \infty$)) を構成する。 S を $\mathfrak{L}_p(\mathfrak{B}, \phi)$ の部分集合とするとき, $[S]_p$ を \mathfrak{L}_p の閉包とする。

定義 1.1. U を 1 を含む \mathcal{B} の σ -弱閉部分環とし, $\Phi \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{D} \in (U \cap U^*)$ の上への normal expectation とする. Φ のとき, U が $\Phi = \phi$ に関して, finite maximal subdiagonal 環であるとは次の (i)–(iv) が成り立つことである.

- i) $U + U^*$ は \mathcal{B} の σ -弱稠密.
- ii) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ ($\forall x, y \in U$).
- iii) U は i) と ii) を満たす \mathcal{B} の σ -weakly 部分環の中で極大.
- iv) $\phi \circ \Phi = \phi$.

$1 \leq p < \infty$ に対して, $H^p = [U]_p$, $H_0^p = [U_0]_p$ (但し, $U_0 = \{x \in U : \Phi(x) = 0\}$ とおく) とおく. この H^p を非可換 Hardy 空間と呼ぶ. この H^p の性質については, 筆者 ([6], [7]) の研究がある. ここでは不変部分空間の構造を調べる.

定義 1.2. $\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ の閉部分空間とする.

- (i) π が左側不変 $\Leftrightarrow U\pi \subseteq \pi$.
- (ii) π が右側不変 $\Leftrightarrow \pi U \subseteq \pi$.
- (iii) π が両側不変 $\Leftrightarrow \pi$ が左側かつ右側不変.

このとき, 次の定理を得る.

定理 1.3. $1 \leq p < s \leq \infty$ とする.

(1). \mathcal{M} を $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間とするならば,
 $\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)$ は $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間で
 $\mathcal{M} = [\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)]_p$.

(2) $\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)$ が $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間とするならば
 $[\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)]_p$ は $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ の左側 (右側) 不変部分空間で $\mathcal{M} = [\mathcal{M} \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)]_p \cap L^s(\mathcal{B}, \phi)$.

この定理の証明には分解定理が用いられる。すなわち,
 $k \in \mathcal{B}$ で $k^2 \in L^p(\mathcal{B}, \phi)$ とするならば $k = u_1 a_1 = a_2 u_2$, $a_1, a_2 \in H^2$ とみたす $a_1, a_2 \in \mathcal{H}$ と $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$ が存在する (CT, Proposition 1)。又、この定理から $L^p(\mathcal{B}, \phi)$ と $L^s(\mathcal{B}, \phi)$ の不変部分空間は 1-1 対応が成り立つことがわかる。このことから、不変部分空間 \mathcal{M} については $L^2(\mathcal{B}, \phi)$ の場合だけ p を限定して示せばよいことがわかる。

§2. 非共役乗積.

M を faithful normal tracial state τ をもつ von Neumann 環 \mathcal{M} とし、 M が standard form. であるならば、 M と τ に関する非可

換 Lebesgue 空間 $L^2(M, \tau)$ 上の left multiplication α による von Neumann 環と同一視する. また, α を $\tau \circ \alpha = \tau$ なる M 上の \ast automorphism とする. $\tau \circ \alpha = \tau$,

命題 2.1. $L_0^2 = \{ f: \mathbb{Z} \rightarrow M \mid f(n) = 0 \text{ (有限個以外の } n \text{ に対して)} \}$ とおく. point addition と scalar 乗法 と \ast と L_0^2 の (1) - (3) の演算に関する L_0^2 は Hilbert algebra となる. しかも, $\psi(0) = I_M$, $\psi(n) = 0$ ($n \neq 0$) による τ 定義された ψ は L_0^2 の単位元となる.

$$(1) (f \ast g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \alpha^k(g(n-k)),$$

$$(2) (f^\ast)(n) = [\alpha^n(f(-n))]^\ast,$$

$$(3) (f, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(k), g(k))_{L^2(M, \tau)}.$$

このとき, 簡単に L_0^2 の Hilbert 空間の完備化 L^2 は, 正確に,

$$\{ f: \mathbb{Z} \rightarrow L^2(M, \tau) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(n)\|_{L^2(M, \tau)}^2 < \infty \}$$

と一致する. しかも, $L^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(M, \tau)$ と同一視できる. $f \in L_0^2$ に対して, $L_f g = f \ast g$, $R_f g = g \ast f$ ($g \in L^2$) による L^2 の operator L_f, R_f を定義する. $\mathcal{L} = \{ L_f : f \in L_0^2 \}$, $\mathcal{R} = \{ R_f : f \in L_0^2 \}$ とおく. また, L_0^2 を \mathcal{L} と L^2 の bounded elements の集合とすると L_0^2 は achieved Hilbert algebra となる. すなわち, L_0^2 は $g \mapsto f \ast g$ ($g \in L_0^2$) が L^2 の bounded

operator を拡張できる L^2 の元 f がある。このように f に対して L_f, R_f とおく。 $\Rightarrow \alpha \Rightarrow$, Hilbert algebra の理論 (cf [2, chapter 1, §5]) から, $\mathcal{L} = \{L_f : f \in L^\infty\}$ から, $\mathcal{R} = \{R_f : f \in L^\infty\}$. $\rho \cdot \alpha = \rho$ であるから, α は $L^2(M, \tau)$ 上の unitary operator を一意に拡張できる。また, L^2 の $*$ -operation を拡張して L^2 上の canonical antiunitary involution J は命題 2.1(2) から得られる。

M は $\{x \in M\}$ と同一視でき, L_x, R_x を $x \in M$ での L_x, R_x とおく。 $\Rightarrow \alpha \Rightarrow L(M) = \{L_x : x \in M\}, R(M) = \{R_x : x \in M\}$ とおく。 \mathcal{S} と一般に \mathcal{S} を L^∞ の部分集合とする。 $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \{L_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}, \mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{R_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}$ とおく。 また, $\delta(1) = I_M, \delta(n) = 0$ ($n \neq 1$) かつ δ を定義する。 $\Rightarrow \alpha \Rightarrow$ 明らかに $\mathcal{L} = \{L(M), L_\delta\}''$, $\mathcal{R} = \{R(M), R_\delta\}''$ が成り立つ。 また, L^2 は単項元 $\psi \in \mathcal{A}$ があるから, \mathcal{L} は finite von Neumann algebra であり $\phi(L_f) = (f, \psi) = \tau(f\psi)$, $f \in L^\infty$ とする ϕ は \mathcal{L} 上の faithful normal tracial state になる。 $\Rightarrow \alpha \Rightarrow L^2 = L^2(\mathcal{L}, \phi)$ $L^\infty = L^\infty(\mathcal{L}, \phi)$ と同一視できる。 さらに, $(W_t f)(n) = e^{2\pi i n t} f(n)$, $f \in L^2$ なる unitary 群 $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を定義し, $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\beta_t(L_f) = W_t L_f W_t^*$ ($\beta_t(R_f) = W_t R_f W_t^*$) と定義すると $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ 上の periodic automorphism group になる。 $\Rightarrow \alpha \Rightarrow$

$$\varepsilon_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \beta_t dt$$

と定義する. ε_n は σ -弱連続な linear map であり, 特に関 ε_0 は ϕ を preserve する L 上の $L(M)$ の ± 1 の faithful normal expectation である.

次に, $H^2 = \{ f \in L^2 : f(n) = 0 \ (n < 0) \}$, $H^{(0)} = L^{(0)} \cap H^2$ と定義する. α は $H^{(0)}$ 上の M と α による非共役積を呼ぶ. また $L_+ = \{ L_f : f \in H^{(0)} \}$, $\mathcal{R}_+ = \{ R_f : f \in H^{(0)} \}$ とおく. $n \geq 1$,

定理 2.2. L_+ (resp. \mathcal{R}_+) は ε_0 を ϕ に関して finite maximal subdiagonal 環である. また, L_+ (resp. \mathcal{R}_+) は $L_f \in L(M)$ (resp. $R_f \in R(M)$) による, 生成した L (resp. R) の σ -弱閉部分環である.

定義 2.3. \mathcal{M} を L^2 の部分空間とする.

- (1) \mathcal{M} が左側不変 $\Leftrightarrow L_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (2) \mathcal{M} が右側不変 $\Leftrightarrow \mathcal{R}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (3) \mathcal{M} が両側不変 $\Leftrightarrow (L_+ + \mathcal{R}_+) \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.
- (4) \mathcal{M} が pure $\Leftrightarrow \bigcap_{n \geq 0} L_+^n \mathcal{M} = \{0\}$.
- (5) \mathcal{M} が full $\Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} L_+^n \mathcal{M}$ が L^2 に稠密.

我々は Beurling 型の定理が成り立つとは L^2 の \mathcal{M} の pure で左側不変部分空間 \mathcal{M} が $R_V H^2$ (V は $L^{(0)}$ の partial isometry) の形

K におけるとき K かつ。この節の目的は Beurling 型の定理が成り立つための必要十分条件を求めよとである。[3] K におけるように M が factor ならば Beurling 型の定理は成り立つ。しかしながら、その逆は必ずしも成り立たない。 $\mathfrak{Z}(M)$ を M の中心, $\mathfrak{Z}(\mathcal{L})$ (resp. $\mathfrak{Z}(\mathcal{R})$) を \mathcal{L} (resp. \mathcal{R}) の中心とする。今 $C = \{z \in \mathfrak{Z}(M) : \alpha(z) = z \text{ (} z \text{ おく. } = \alpha z \text{)}$ とし、次の補助定理を得る。

補助定理 2.4. (1) $\forall z \in C$ に対して, $L_z = R_z$.

$$(2) \mathfrak{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}(M) = \mathfrak{Z}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}(M) = L(C).$$

まず、次の定理を得る。

定理 2.5. 次の 3 つの条件は同値。

- (1). α は M の中心 $\mathfrak{Z}(M)$ 上で自明, すなわち, $\alpha(z) = z$ ($\forall z \in \mathfrak{Z}(M)$).
- (2). L^2 の \mathcal{H}^2 の pure 右側不変部分空間は $R\mathcal{H}^2$ (V は L^2 の partial isometry) の \mathcal{H}^2 における。
- (3). H^2 の \mathcal{H}^2 の左側不変部分空間は $R\mathcal{H}^2$ (V は L^2 の partial isometry) の \mathcal{H}^2 における。

証明 (1) \Rightarrow (2). α は $\mathfrak{Z}(M)$ 上で自明とする。 \mathcal{H}^2 を L^2 の pure 右

側不変部分空間, P を L^2 上 $M \ominus L_2 M$ の \perp の projection, P_0 を L^2 上 $H^2 \ominus L_2 H^2$ の \perp の projection とする. $\Rightarrow \Leftarrow$, [3, Theorem 3.2] から, $P, P_0 \in L(M)$. 射影作用素の比較定理 (cf. [2, P218, Théorème 1]) から, $L_2 P < L_2 P_0$ から $(1-L_2)P > (1-L_2)P_0$ を満たす $\mathfrak{Z}(M)$ の射影作用素 Z が存在する. 補助定理 2.4 から, $L_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}) \cap L(M)$. $L_2 M$ と $L_2 H^2$ はともに L^2 の pure な左側不変部分空間であるから, [3, Theorem 3.2] から, $L_2 M = R_{V_1} L_2 H^2$ を満たす \mathcal{R} の partial isometry R_{V_1} がある. 同様 $R_2, (1-L_2)H^2 = R_{V_2} (1-L_2)M$ を満たす \mathcal{R} の partial isometry R_{V_2} がある. H^2 は pure であるから $R_{V_2}^* R_{V_2} = R_{V_2} R_{V_2}^* = 1 - L_2$. $Z = Z'$, $R_V = R_{V_1} L_2 \oplus R_{V_2}^* (1-L_2)$ とおくと, $M = R_V H^2$ を得る.

(2) \Rightarrow (3). 明らか.

(3) \Rightarrow (1). α は $\mathfrak{Z}(M)$ 上 Z' 自明であるとする. $\Rightarrow \Leftarrow$, $\alpha(e) = 0$ を満たす零 Z' projection M がある. $M = \{f \in H^2 : e|_{f(0)} = f(0)\}$ とおくと M は容易に, pure, full な左側不変部分空間で $LeL_2^* M \subseteq M$ を満たす. $M = R_V H^2$ の形に書けるとすると, M は full から R_V は unitary operator になる. $V \in \mathcal{R}$, Z_1

$$LeL_2^* H^2 = LeL_2^* R_V^* M = R_V^* LeL_2^* M \subseteq R_V^* M = H^2$$

これは \mathcal{R} の Z_1 , $LeL_2^* \in \mathcal{L}_+$. $\therefore M$ は矛盾.

次に, Beurling 型の定理が成り立ち, L_+ を含む L の σ -弱閉部分環 \mathcal{A} の決定, また, L^2 の pure な両側不変部分空間 \mathcal{A} の決定は次のよう K による.

定理 2.6. 次の条件は定理 2.5 の各条件と同値である.

(4) もし \mathcal{B} が L_+ を含む L の σ -弱閉部分環とするならば,
 $\mathcal{B} = (1 - Le) L \oplus Le L_+$ となる C の射影作用素 e がある.

(5) もし $\mathcal{M} \in H^2$ の両側不変部分空間ならば, \mathcal{M} は $R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry かつ $V^*V = VV^* \in C$) \mathcal{A} による.

証明. (2) \Rightarrow (5). $\mathcal{M} \in H^2$ の両側不変部分空間とする. 定理 2.5 によ, $\mathcal{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry) \mathcal{A} による. もし, $e = V^*V$ とすると [3, Proposition 4.5] の証明のよう K , $R_e \in \mathcal{Z}(\mathcal{R}) \cap R(\mathcal{M}) = L(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) = L(C)$. $Le = R_e$ であるから, $\mathcal{M} = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry かつ $V^*V = VV^* \in C$) による.

(5) \Rightarrow (4). \mathcal{B} を L_+ を含む L の σ -弱閉部分環とするならば, $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ とき, $[\mathcal{B}]_2$ は L^2 の両側不変部分空間である. [3, Corollary 1.5] によ $K = L^2 \ominus [\mathcal{B}]_2$ かつ JK は H^2 の両側不変部分空間であるから, $JK = R_V H^2$ (V は L^∞ の partial isometry かつ $V^*V = VV^* \in C$) \mathcal{A} による. $e = V^*V$ とおくと, \mathcal{M} と定理 1.3 を用いる $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ より, $\mathcal{B} = (1 - Le) L \oplus Le L_+$ による.

示せる。

(A) \Rightarrow (1). α が $\mathcal{B}(M)$ 上 自明でないとする。定理 2.5 の (3) \Rightarrow (1) の証明と同様で、 H^2 の pure な full な左側不変部分空間 \mathcal{M} をとる。 $\mathcal{B} \in L_e L_f^* \in \mathcal{L}_+$ に対し、 \mathcal{L} を生成した \mathcal{L} の σ -弱閉部分環をとると、 $\mathcal{L}_+ \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ が示せる。仮定から、 $\mathcal{B} = (1 - L_p)\mathcal{L} \oplus L_p\mathcal{L}_+$ (P は \mathbb{C} 上の projection で $0 < P < 1$) の形に可分する。 $L_p\mathcal{B} = L_p\mathcal{L}_+ \neq \{0\}$, $L_p L_e L_f^* \in L_p\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ に対し $L_p L_e L_f^* = 0$. \mathcal{L} は \mathcal{M}^n 上、 \mathcal{L} , $(1 - L_p)\mathcal{L}$ は $L_e L_f^* \in (1 - L_p)\mathcal{L}_+$ に対し、 \mathcal{L} を生成した σ -弱閉部分環である。 $(1 - L_p)L_f^2 \in (1 - L_p)\mathcal{B}$ に対し $((1 - L_p)L_e L_f^*)^2 = 0$ であるからこれは矛盾。

次に、定理 2.6 の条件 (5) を弱めたものを考えるが、実際、それは同値になる。

命題 2.7. 次の条件は 定理 2.5, 2.6 の (1) - (5) と同値。

(6). \mathcal{M} (\mathcal{M} が L^2 の pure な両側不変部分空間とするならば), \mathcal{M} は $R_v H^2$ (V は L^2 の partial isometry で $V^*V = VV^* \in \mathbb{C}$) の形に可分する。

証明. (6) \Rightarrow (5) は明らか。

(1) \Rightarrow (6). \mathcal{M} を L^2 の pure な両側不変部分空間とすると、定理 2.5 から $\mathcal{M} = R_v H^2$ (V は L^2 の partial isometry) の形に可分する。

$\exists e = v^*v$ とする $e = R_e = R_v R_v^*$ で $R_e L^2 = R_v L^2 = R_v(\bigvee_{n \leq 0} L^n H)$
 $= \bigvee_{n \leq 0} L^n R_v H^2 = \bigvee_{n \leq 0} L^n M$ は両側不変部分空間であるから,
 [3, Corollary 4.4] から $e \in \mathfrak{Z}(L^2)$. L は finite 故,
 $vv^* = e$. $\mathfrak{B} = \{x \in L : xM \subseteq M\}$ とおくと \mathfrak{B} は L_+ 上
 含意 L の固有な σ -弱閉部分環であることは明らか. 定理 2.6
 から, $\mathfrak{B} = (1-L_p)L \oplus L_p L_+$ (p は Ca projection) の形になる
 かつ $(1-L_p)M \subseteq M$ は L -不変で $(1-L_p)M \subseteq M$ であるから
 $(1-L_p)M = \{0\}$. $\exists z = z'$, $R_{1-p} R_e L^2 = L_{1-p} R_e L^2 =$
 $\bigvee_{n \leq 0} L^n L_{1-p} M = \{0\}$. $L \notin \mathfrak{B}$ と, $(1-p)e = 0$. $R_e \in \mathfrak{Z}(L)$
 故 $R_e = L_e$. $\exists z = z'$ $L_e M \subseteq M$ であるから, $L_e \in \mathfrak{B}$.
 $L \notin \mathfrak{B}$ と $L_e = L_e L_p \in L_p L_+ \subset L_+$. したがって, L_e
 $\in \mathfrak{Z}(L) \cap L(M) = L(C)$. //

定理 2.5, 2.6 と命題 2.7 からおいて, factor reduction
 theory を用いていける. $L \notin \mathfrak{B}$ と, [3] の結果を併せて
 得る.

例 2.8. 次の条件は同値.

- (1) M は factor である.
- (2) $C = \{C1\}$ で L^2 の各 pM は左側不変部分空間 $\subseteq R_v H^2$
 (v は L の partial isometry) を満たす.

(3) $C = \{C1\}$ で H^2 の右側不変部分空間は RvH^2 (v は L^∞ の partial isometry) の形に示す。

(4) L_+ は L の maximal σ -weakly closed subalgebra である。

(5) もし M が H^2 の両側不変部分空間とするならば, $M = RvH^2$ (v は L^∞ の unitary operator) に示す。

(6) もし M が L^2 の両側不変部分空間で $L \cap M \neq M$ ならば, $M = RvH^2$ (v は L^∞ の unitary operator) の形に示す。

§3. Which subdiagonal algebras are crossed products?

非共役積合積において Beurling 型の定理が成り立つことは驚くべきことであり, また, これは強い結果である。一般に finite maximal subdiagonal 環において, 不変部分空間の形を決定する問題は非常に興味のある問題であるが, Beurling 型の定理が成り立つ finite maximal subdiagonal 環は何かという問題が生じてくる。ここでは, このような subdiagonal 環は非共役積合積以外にはないことを示す。§1 の記号をここではそのまま用いることにする。 \mathcal{B} を faithful normal tracial state (を τ) von Neumann algebra で U を finite maximal subdiagonal algebra とする。 $D = U \cap U^*$ とおく。また, $x \in \mathcal{B}$ とすると,

$L_x f = x f, R_x f = f x$ ($f \in L^2(\mathcal{B}, \phi)$) かつ L_x, R_x を定義する. $\alpha \neq \beta, \mathcal{L} = \{L_x : x \in \mathcal{B}\}, \mathcal{R} = \{R_x : x \in \mathcal{B}\}$ とおくと, \mathcal{B} は finite achieved Hilbert algebra かつ $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ は \mathcal{B} の ~~left~~ ^{right} von Neumann $\overline{\text{環}}$ である. かつ, $\mathcal{L}_+ = \{L_x : x \in \mathcal{U}\}$ ($\mathcal{R}_+ = \{R_x : x \in \mathcal{U}\}$) とおくと,

[3]において, H^2 のある中点零でない両側不変部分空間は RH^2 (U は \mathcal{B} の unitary operator) の形に書けることを示す. $\phi \circ \alpha = \phi$ なる D の $*$ -automorphism が存在して, \mathcal{B} は $D \circ \alpha$ による接合積と同型な対称 \mathcal{U} は H^2 と同型になる. したがって D が factor になることを示す. ここでは, 少し緩い条件で考へる. $C = \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap D$ とおくと明らか, $C \subset \mathcal{Z}(D)$ である.

定義 3.1. \mathcal{U} を $\mathcal{B} = \phi$ に関する finite maximal subdiagonal 環とする. $\alpha \neq \beta, \mathcal{U}$ が pure ではない $\mathcal{U}P = (\mathcal{B}P)$ なる C の零でない projection P が存在しないことをいう.

一般に, \mathcal{U} が finite maximal subdiagonal 環とするとき \mathcal{U} は pure ではない. 例として $\mathcal{B} = L^{\infty}(T) \oplus L^{\infty}(T)$ とする. $\mathcal{U} = H^{\infty}(T) \oplus L^{\infty}(T), \phi(f \oplus g) = (\int f dm) \oplus g, (f, g \in L^{\infty}(T))$ とおくと, \mathcal{U} は \mathcal{B} に関する finite maximal subdiagonal 環 であり pure ではない.

定理3.2. H^2 の \mathcal{B} による両側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は \mathcal{B} の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) の形にかけるとする. U が pure ならば, $\phi \circ \alpha = \phi$ を満たす D の $*$ -automorphism α が存在し, 次の性質 (*) をもつ.

(*) \mathcal{B} は $D = \alpha$ による積乗積に同型で U は H^2 に対応する.

これと定理2.5, 2.6 から次の系を得る.

系3.3. (1) $C = \{ z \in \mathcal{B}(D) : \alpha(z) = z \}$.

(2) α は $\mathcal{B}(D)$ 上 2-自明.

(3) H^2 の \mathcal{B} による左側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は \mathcal{B} の partial isometry) の形にかけるとする.

定理3.2 を証明するため, いくつかの補題定理を必要とする. 今 H^2 の \mathcal{B} による両側不変部分空間は $R_V H^2$ (V は \mathcal{B} の partial isometry で $V^*V = VV^* \in C$) の形にかけ, U は pure と仮定する.

補題定理3.4. $H_0^2 = R_V H^2$ なる \mathcal{B} の unitary operator V が存在する.

証明. H_0^2 は H^2 の両側不変部分空間で $H_0^2 \neq \{0\}$ かつ $H_0^2 = R_V H^2$

$(V \text{ は } \mathcal{B} \text{ の partial isometry かつ } V^*V = UV^* \in \mathcal{C}) \text{ のとき } K \text{ は } H^2 \text{ 上}$
 $V^*V = 1 - p \text{ とおくと, } \langle x, z \rangle = \langle Vx, Vz \rangle, \forall x \in H_0^2, \forall z \in \mathcal{B} \text{ に対して,}$
 $\langle (p \times p)x, y \rangle = 0. \text{ } L \text{ は } \mathcal{B} \text{ の } \tau \text{ [1, Corollary 2.2.4] かつ } \mathcal{B} p$
 $= \mathcal{U}p. \text{ } U \text{ は pure 故 } p = 0. \text{ 従って, } V \text{ は unitary operator}$
 $K \text{ 上の } //$

補助定理 3.5. $V \text{ は } R_V H^2 = H_0^2 \text{ なる } \mathcal{B} \text{ の unitary operator なら}$
 $z \text{ に対して, } \forall n \in \mathbb{Z} \text{ に対して, } R_V^n H^2 = L_V^n H^2.$

証明. $H^2 = L^2 \ominus JH_0^2 = L^2 \ominus J R_V H^2 = L^2 \ominus L_V^* J H^2 = L_V^* (L^2 \ominus JH^2)$
 $= L_V^* H_0^2. \text{ } z = z', \text{ } R_V H^2 = H_0^2 = L_V H^2. \text{ } n \geq 1 \text{ として } R_V^n H^2 = L_V^n H^2 \text{ なる}$
 $z \text{ に対して, } R_V^{n+1} H^2 = R_V (R_V^n H^2) = R_V (L_V^n H^2) = L_V^n (R_V H^2) = L_V^n (L_V H^2)$
 $= L_V^{n+1} H^2. \text{ } L \text{ は } \mathcal{B} \text{ の } \tau, \text{ } \forall n \geq 0 \text{ に対して, } L_V^n H^2 = R_V^n H^2.$
 $L \text{ の } \tau, \text{ } n < 0 \text{ なる } z \text{ に対して, } R_V^n H_0^2 = R_V^{*n} H^2 = L_V^{*(n-1)} H^2 = L_V^{*n} H_0^2.$
 $よって, R_V^n H^2 = J^2 R_V^n H^2 = J (L_V^{*n} (JH^2)) = J (L_V^{*n} (L^2 \ominus H_0^2))$
 $= J (L^2 \ominus L_V^{*n} H_0^2) = J (L^2 \ominus R_V^{*n} H_0^2) = J (R_V^{*n} (JH^2)) = L_V^n H^2.$
 $よって かつ 全ての } n \text{ に対して成立する。$

補助定理 3.6. $\mathcal{C} \text{ は } J \text{ を含む } \mathcal{U} \subset J \subset \mathcal{B} \text{ なる } \sigma\text{-弱閉部分環と}$
 $するならば, J = (1-p)\mathcal{B} \oplus p\mathcal{U} \text{ と表す projection } p \in \mathcal{C} \text{ がある}$
 $ある。$

証明. 定理 1.3 によれば, $K = L^2 \ominus [J]_2 \neq \{0\}. \text{ } \langle x, z \rangle = \langle Vx, Vz \rangle,$

JK は H^2 の両側不変部分空間である。仮定から $JK = R_W H^2$ (W は \mathcal{B} の partial isometry かつ $W^*W = WU^* \in \mathcal{C}$) の形に可化する。
 定理 2.6 (5) \Rightarrow (4) の証明のようく, $J = (1-p)\mathcal{B} \oplus PU$ ($P = W^*W$) が成り立つ。

補助定理 3.7. $V \in H_0^2 = R_V H^2$ なる \mathcal{B} の unitary operator とする。 $\alpha \in \mathcal{K}$, $VDV^* = D$.

証明. 補助定理 3.5 から, $H_0^2 = L_V H^2$ かつ $L(D) \subset \mathcal{L}_+$ かつ, $L^* L(D) L_V H^2 \subset H^2$. ($\mathcal{K} \in \mathcal{H}^*$, \mathcal{L} , $L_V^* L(D) L_V \subset \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^* = L(D)$.)
 一方, $\underbrace{VDV^* H_0^2 \subset H_0^2}_{\text{定理 3.5}} \subset \mathcal{B} \cap H^2 = \mathcal{U}$. $VDV^* \subset D$. ($\mathcal{K} \in \mathcal{H}^*$, \mathcal{L} , $VDV^* = D$.)

定理 3.2 の証明. $\forall d \in D$ に対し $\alpha(d) = VdV^*$ を \mathcal{K} 上 α は D の \ast -automorphism α を定義する。 $\alpha \in \mathcal{K}$ 明らかく, $\phi \circ \alpha = \phi$ である。 \mathcal{B} は $D = \mathcal{U}$ により生成された部分環である (任意に $D \cup \{V^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の有限個の積の一次結合からなる)。 \mathcal{B} は \mathcal{B} の sub-Hilbert algebra となる。 L_0 は \mathcal{L}_2 におけるように, $D = \alpha$ による Hilbert 環となる。 $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k V^k \in \mathcal{B}$ に対し $f \in L_0$ ($f(k) = d_k$) を対応させる。 α 対応 W とする。 $\alpha \in \mathcal{K}$, W は well-defined かつ isometry であることは示そう。 まず, $L_0^* \subset H_0^2 \subset [D]_+^\perp$ ($\forall n \geq 0$)

\mathcal{D} があるから, $[D]_2$ は L_V に対する wandering subspace である.

今, $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k v^k \in \mathcal{B}$ の Hilbert space norm は $\|x\|^2 = \phi(x^*x)$

であるから

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_k \sum_l \phi(v^{k-l} d_l^* d_k v^k) = \sum_k \sum_l \phi(v^{k-l} d_l^* d_k) \\ &= \sum_k \phi(d_k^* d_k) = \sum_k \|d_k\|^2 = \|Wx\|^2 \end{aligned}$$

$l \in \mathbb{N}$, τ は W に対して well-defined τ isometric τ である. τ は K ,

W に対して \mathcal{B} の L^2 の L^∞ の Hilbert algebra isomorphism τ である

ことを示せる. 証明は完全なため K , $[\mathcal{B}]_2 = L^2$ τ

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_V^n [D]_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [V^n D]_2 = H^2 \text{ である } \Rightarrow \tau \text{ は } \tau^* \text{ かつ } \tau. \tau$$

のため K , τ は, $\mathcal{M} = \bigcap_{n \geq 0} L_V^n H^2 = \{0\}$ を示そう. $\mathcal{M} \subset H^2$ である

から, τ は $\mathcal{M} \neq \{0\}$ ならば $L_V \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. $\tau = \tau^*$, τ は

$\mathcal{M} \neq \{0\}$ ならば, $J = \{x \in \mathcal{B} : L_V x \in \mathcal{M}\} \subsetneq \mathcal{B}$ である.

補助定理 3.6 から, $J = (1-p)\mathcal{B} \oplus pU$ なる projection

$p \in \mathcal{C}$ がある. $L_V \mathcal{M} = \mathcal{M}$ 故, $V^* \in J$. $\tau = \tau^*$,

$pV^* \in pU \subset U$. 一方, $H_0^2 = L_V H^2$ であり, $pV \in U_0 = \{0\}$

から, $pV = 0$. V は unitary 故 $p = 0$. L は $\mathcal{M} \neq \{0\}$, τ

$J = \mathcal{B}$. \mathcal{M} は矛盾. したがって, $H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_V^n [D]_2$. τ は K ,

$L^2 = H^2 \oplus JH_0^2$ であるから, $[\mathcal{B}]_2 = L^2$. //

H^2 の \mathcal{M} での零でない両側不変部分空間が $R_V H^2$ (V は \mathcal{B} の unitary operator) の開き K における τ である. τ の τ^* であり, 明らか

か K , $C = \{C1\}$ であるから U は \oplus pure K になる。 L からも、 ζ , 定理 3.2 から [3] の Theorem 6.1 を用いて得る。

References

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.
- [2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [3] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.
- [4] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products II, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [5] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.
- [6] K. -S. Saito, On noncommutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J.

29(1977), 585-595.

- [7] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 348-352.
- [8] K. -S. Saito, Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Pacific J. Math.
- [9] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., 57(1953), 401-457.