数理解析研究所講究録
398巻 1980年 80-88

Normalizers of the diagonal algebras in the von Neumann algebras associated with principal measure groupoids.

愛媛大 理 大内 本夫

1. groupoidの概念はエルゴード理論に対する有効な武器として最初にMackeyによって定義され，測度空間上の変換群の軌道の形状を調べるために使われてきた。更に，Connes-Takesakiはgroupoidをflow of weightsの概念を定式化するために用い，groupoidと作用素環の関係を様々な角度から研究している。また，P. Hahn，A. Connesらによってgroupoidからvon Neumann環を構成する方法が示されている。これらの構成法は群-測度空間構成法やKriegerの構成法を統一的な視点から眺めることができるという意味で重要なものであり，すべてのvon Neumann環がgroupoidから作られる可能性もある。groupoidから作られる作用素環はdiagonal環と呼ばれる特別な極大可換環をもっている。本稿では，diagonal環のnormalizerの構造を調べることにより，groupoidの軌道を決定することを試みる。離散的な可換力学系においては次のことが知られ

ている。可算離散群Hが測度空间(M, m)に自己同型として作用している時，Kriegerの構成法により，von Neumann環$\mathcal{M}$とそのdiagonal環$\mathcal{A}$が得られる。Hのfull group〔H〕の元は$\mathcal{A}$の$\mathcal{M}$におけるnormalizerの元に対応し，$(\mathcal{M}, \mathcal{A})$の同型類はHの弱同値類によって決定される。我々は上の事実を一般の局所コンパクトな変換群から得られるprincipal measure groupoidに拡張することを試みる。またgroupoidの軌道の形状と対応する作用素環の型との関係も考察する。なお，以下P. Hahnの構成法によって議論を進めるが，その場合に現われてくる作用素環とA. Connesによって定義されたものとの関係は，〔1，§IV, Th.10，§V, Th.4〕において明らかにされている。

2.　この章では以下の章で使われる記号の説明をする。特に，〔4，5〕の結果を要約する。Gをanalytic groupoid〔8，p.273〕，$G^{(2)} \subset G \times G$を積$(x, y) \longmapsto xy$の定義域とする。$x \in G$に対して，$x$の左単位元$xx^{-1}$を$r(x)$で，右単位元$x^{-1}x$を$d(x)$で表わす。Gの単位空间$U_G = r(G)$はGの部分集合で，相対Borel構造に関してanalytic空间になる。(G, C)をprincipal measure groupoid〔4，Def. 2.3，8，p.274〕，(ν, μ)を(G, C)のHaar測度とする〔4，Def. 3.11〕．U_Gのμ-conull Borel set Uに対して，$G|U = r^{-1}(U) \cap d^{-1}(U)$とおけば，$(G|U, C)$はmeasure groupoidになる。このようなgroupoidを(G, C)の

inessential reduction (i.r.) と呼ぶ。(ν,μ) の r-分解を $\nu=\int_{U_G}\nu^u d\mu(u)$ によって表わす。$\Pi(G,\nu,\mu)$ を $L^1(G,\nu)$ の部分集合で〔5，§1〕において定義されたものとする。$G^{(2)}$ 上の strict Borel 2-cocycle σ と $f\in\Pi(G,\nu,\mu)$ に対して，$L^2(G,\nu)$ 上の有界線形作用素 $L_\sigma(f)$ を

$$(L_\sigma(f)j\,|\,k)=\iint f(x)\sigma(y^{-1},x)^{-1}j(x^{-1}y)\overline{k(y)}\,d\nu^{r(x)}(y)\,d\nu(x)$$

$(j,k\in L^2(G,\nu))$ によって定義する。作用素環 $\mathcal{M}_\sigma=\{L_\sigma(f);f\in\Pi(G,\nu,\mu)\}'$ を (G,ν) と σ に対応する作用素環とよぶ。$L^2(G,\nu)$ 上の modular involution J_σ が存在して，$J_\sigma\mathcal{M}_\sigma J_\sigma=\mathcal{M}_\sigma'$ となる。$\sigma=1$ の時，$\mathcal{M}_\sigma$ のかわりに $\mathcal{M}$ と書くことにする。$\alpha\in L^\infty(U_G,\mu)$ に対して，有界線型作用素 $\hat{\alpha}$ を $(\hat{\alpha}j)(x)=\alpha(d(x))j(x)$ $(j\in L^2(G,\nu),x\in G)$ によって定義する。diagonal 環 $\mathcal{A}=\{\hat{\alpha};\alpha\in L^\infty(U_G,\mu)\}$ は $\mathcal{M}_\sigma$ の極大可換環になっている。$\mathcal{A}$ の $\mathcal{M}_\sigma$ に関する normalizer を $\mathcal{N}(\mathcal{M}_\sigma,\mathcal{A})$ と表わす。

測度空間 (M,m) の自己同型とは，M から M 上への Borel isomorphism で m の measure class $[m]$ を不変にするものである。(M,m) の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(M,m)$ で表わす。$T\in\mathrm{Aut}(M,m)$，$\alpha\in L^\infty(M,m)$ に対して，$L^\infty(M,m)$ の元 $T\alpha$ を $(T\alpha)(x)=\alpha(T^{-1}x)$ $(x\in M)$ によって定義する。M_i $(i=1,2)$ を Borel 空間，φ を M_1 から M_2 への Borel map とする。M_1 上の測度 m の φ による像 $\varphi_*(m)$ とは，M_2 上の測度で $\varphi_*(m)(E)=$

$m(\varphi^{-1}(E))$によって定義されるものである。$T \in Aut(M, m)$に対して，$T_*(m) = Tm$とおく。

3.　(G, C)を測度空間と考えた時の(G, C)上の自己同型全体の集合を$Aut(G, C)$で表わす。この章では$N(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$を$Aut(G, C)$の部分群によって特徴づける。

定義 3.1.　$V \in Aut(G, C)$は次の条件を満足するC-零集合Nが存在する時，軌道的であると呼ばれる；

(i)　$r(Vx) = r(x)$　for $x \in G - N$,

(ii)　$d(Vx) = d(Vy) \iff d(x) = d(y)$　for $x, y \in G - N$.

すべての軌道的自己同型全体の集合を$Aut_0(G, C)$で表わす。

$V \in Aut_0(G, C)$に対して，$L^2(G, \nu)$上のunitary作用素$\hat{V}$を

$$(\hat{V}f)(x) = (dV\nu/d\nu)^{\frac{1}{2}}(x)\, f(V^{-1}x)$$

$(f \in L^2(G, \nu),\ x \in G)$によって定義する。

定理 3.2.　$V \in Aut_0(G, C)$に対して，unitary作用素$\hat{V}_\sigma$を

$$(\hat{V}_\sigma f)(x) = \sigma((V^{-1}x)^{-1}, x)\, \sigma(x^{-1}, x)^{-1} (\hat{V}f)(x)$$

$(f \in L^2(G, \nu),\ x \in G)$によって定義する。この時，$\hat{V}_\sigma$は$N(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$の元であり，更に，任意の$W \in N(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$に対して，$\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$と$V \in Aut_0(G, C)$が存在して$W = \hat{\alpha}\hat{V}_\sigma$と書ける。

4.　この章ではgroupoidのfull groupに対応するものを考察する。これは〔3, §2〕において定義されたものの拡張になっている。$Aut(U_G, \mu)$の部分群$[G]$を次のように定義する；

$$[G] \equiv \{ T \in \mathrm{Aut}(U_G, \mu) \,;\ {}^{\exists} W \in \mathcal{N}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \text{ such that}$$
$$W\hat{\alpha}W^* = (T\alpha)^\wedge \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in L^\infty(U_G, \mu) \}.$$

$\lambda \in C$ を確率測度でその r-分解が $\lambda = \int \lambda^u d\mu(u)$ であるとする。$\tilde{\lambda}^u = d_*(\lambda^u)$ は a.a. $u \in U_G$ に対して，U_G 上の確率測度である。

<u>定理</u>4.1. $T \in \mathrm{Aut}(U_G, \mu)$ に対して，T が $[G]$ の元であるための必要十分条件は μ-a.a. $u \in U_G$ に対して，$T\tilde{\lambda}^u$ が $\tilde{\lambda}^u$ と同値であることである。

<u>命題</u>4.2. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{M}_{\sigma'}$ で semi-regular になるような G の Borel 2-cocycle σ' が存在するなら，すべての G の Borel 2-cocycle σ に対して，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{M}_\sigma$ で semi-regular である。

上の命題の条件を満足するような measure groupoid を semi-regular であると呼ぶ。

5. 次の定理は，(G, C) が ergodic の時には[5, Th. 5.4]において証明されている。

<u>定理</u>5.1. principal measure groupoid (G, C) が有限 Haar測度を持つための必要十分条件は $\mathcal{M}_\sigma$ が I 型であることである。

<u>系</u>5.2. (G, C) の任意の strict Borel 2-cocycle σ に対して次の条件は同値である；

(i) $\mathcal{M}_\sigma$ は連続，

(ii) (G, C) の Haar 測度 (ν, μ) が存在して，任意の U_G の Borel 集合 F に対して，$\{ u \in U_G \,;\ 0 < \nu^u(d^{-1}(F)) < +\infty \}$ は μ-零集合で

ある，

(iii) $(G, \mathcal{C})$ の任意の Haar 測度 (ν, μ) と U_G の任意の Borel 集合 F に対して，$\{u \in U_G ; 0 < \nu^u(d^{-1}(F)) < +\infty\}$ は μ-零集合である。

〔5, §5〕の結果と factor 分解を用いると次のことがわかる。$(G, \mathcal{C})$ の strict Borel 2-cocycle σ' で $\mathcal{M}_{\sigma'}$ が I 型（又は，II 型，III 型，連続，semi-finite）になるものが存在すれば，すべての $(G, \mathcal{C})$ の Borel cocycle σ に対して，$\mathcal{M}_\sigma$ は I 型（又は，II 型，III 型，連続，semi-finite）になる。上のような条件を満足する measure groupoid $(G, \mathcal{C})$ を I 型（又は，II 型，III 型，連続，semi-finite）と呼ぶことにする。

6．　この章では groupoid の間の関係について調べる。2つの groupoid の弱同値を次に定義するが，この関係は groupoid の代数構造の間の関係を explicit には含まない。しかし後で見るように semi-finite の場合は，弱同値から代数構造の同型が導かれる（定理 6.5）。以下 $(G_1, \mathcal{C}_1)$，$(G_2, \mathcal{C}_2)$ を principal measure groupoid であるとする。

定義 6.1．　$(G_1, \mathcal{C}_1)$ と $(G_2, \mathcal{C}_2)$ が弱同値であるとは，$(G_i, \mathcal{C}_i)$ $(i=1,2)$ の inessential reduction (i.r.) $(G_i', \mathcal{C}_i)$ と同型 φ ; $(U_{G_1'}, \tilde{\mathcal{C}}_1) \longrightarrow (U_{G_2'}, \tilde{\mathcal{C}}_2)$ が存在して $\varphi \circ [G_1'] \circ \varphi^{-1} = [G_2']$ となることである。

次のことに注意しておく。$(G_i, \mathcal{C}_i)$ $(i=1,2)$ の i.r. $(G_i', \mathcal{C}_i)$

と同型 ψ ; $(G_1', C_1) \longrightarrow (G_2', C_2)$ が存在して，ψ はまた代数的同型でもある時，(G_1, C_1) と (G_2, C_2) は *measure groupoid* として同型であると言われる。明らかに2つの *measure groupoids* が同型なら，それらは弱同値である。

<u>命題</u>6.2．　(G_i, C_i) $(i=1, 2)$ が *semi-regular* であり互いに弱同値であるとする。(G_1, C_1) がI型（又は，連続）なら (G_2, C_2) もI型（又は，連続）である。

(M_i, m_i) $(i=1, 2)$ を測度空間とする。H を $Aut(M_1 \times M_2, m_1 \times m_2)$ の部分群，H_i を $Aut(M_i, m_i)$ の部分群とする。$H \cap (Aut(M_1, m_1) \times Aut(M_2, m_2)) = H_1 \times H_2$ となる時，$H_1 \times H_2$ は H の十分大きい部分群であると呼ぶ。

<u>命題</u>6.3．　*groupoid* (G, C) に対して次のことを仮定する；

(i)　測度空間 (U_i, μ_i) $(i=1, 2)$ が存在して，$(U_G, \tilde{C}) = (U_1 \times U_2, [\mu_1 \times \mu_2])$，

(ii)　$Aut(U_1, \mu_1)$ の部分群 H が存在して，$H \times Aut(U_2, \mu_2)$ は $[G]$ の十分大きい部分群である，

(iii)　H と $Aut(U_2, \mu_2)$ はそれぞれ (U_1, μ_1)，(U_2, μ_2) 上にエルゴード的に作用している。

(G_2, C_2) を測度空間 $(U_2 \times U_2, \mu_2 \times \mu_2)$ 上の本質的に推移的な *groupoid* とする。この時，*groupoid* (G_1, C_1) が存在して，$[G_1] = H$ で，(G, C) と $(G_1 \times G_2, C_1 \times C_2)$ は同型になる。

以下 (G_i, C_i) $(i=1,2)$ は semi-regular orbitally concrete (O. C.) principal ergodic measure groupoid であると仮定する。groupoid が O. C. であるとは [2, Def. 5.4] において導入された概念であり，semi-regular O. C. principal ergodic groupoid 全体の集合は，測度空間にエルゴード的に作用している局所コンパクト群から作られる principal measure groupoid 全体の集合と同型を除いて一致する。

補題 6. 4. (G_i, C_i) $(i=1,2)$ は互いに弱同値であり，(G_1, C_1) は semi-finite であると仮定する。もし，(G_1, C_1) が離散軌道を持つなら，(G_2, C_2) も離散軌道を持つ。

定理 6. 5. (G_i, C_i) $(i=1,2)$ は互いに弱同値であり，(G_1, C_1) が semi-finite であると仮定する。この時，(G_1, C_1) と (G_2, C_2) は同型である。

系 6. 6. (G_i, C_i) $(i=1,2)$ は互いに弱同値であると仮定する。もし (G_1, C_1) が III 型なら，(G_2, C_2) も III 型である。

文献

1. A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, Springer Lecture Notes in Math., 725 (1979), 19–143.
2. J. Feldman, P. Hahn and C. C. Moore, Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups, Advances in Math. 28 (1978), 186–230.

3. A. Guichardet, Automorphismes et type de certaines algèbres de von Neumann, Proc. London Math. Soc. 35 (1977), 555-576.

4. P. Hahn, Haar measure for measure groupoids, Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978), 1-33.

5. P. Hahn, The regular representations of measure groupoids, Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978), 35-72.

6. P. Hahn, Reconstruction of a factor from measures on Takesaki's unitary equivalence relation, J. Functional Analysis 31 (1979), 263-271.

7. W. Krieger, On constructing non $*$-isomorphic hyperfinite factors of type III, J. Functional Analysis 6 (1970) 97-109.

8. A. Ramsay, Virtual groups and group actions, Advances in Math. 6 (1971), 253-322.

9. M. Takesaki, On the unitary equivalence among the components of decompositions of representations of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras, Tôhoku Math. J. 15 (1963), 365-393.