数理解析研究所講究録
398巻 1980年 71-79

Representations of non-regular semi-direct product groups

阪大 基礎工　河上 哲

非I型群においては、(A)既約表現を決定するのが困難である事、及び (B)表現の既約分解が一意的でなくなる事、が一般に知られている。そこで (A)非I型群の既約表現のうち、Mackeyの方法によっては具体的に求まらない表現の構造を明らかにする事、及び (B)分解の一意性の破れる原因を索す事、の2点を目標にしたい。(A)に関しては、講究録368([4])で述べたので、ここでは主に(B)に関して記述する。

序

H. Yoshizawa と G. W. Mackey が、独立に、ある離散群（2元生成の自由群, $\mathbb{Q} \times_s \mathbb{Q}^*$ ）において、その正則表現が2通りに分解出来る事を示したのに始まり、A. A. Kirillov は、ある単連結なリー群（Mautner群）においても、同様の現象が生ずる事を示している。一方、M. Saito は、$SL(2,\mathbb{Z})$において、正

$R : G \to C^*(G)$ Regular

$C^*(G) \supset R(G)' = \text{Center } C^*(G)$

$\cup$

極大可換 von Neumann環 たち $\longleftrightarrow$ Rのキヤク分解たち

則表現の無限個の異なる分解を与えている。ここでは、ある半直積群の典型的な hyperfinite なⅡ型因子表現の色々な分解を具体的に与えてみる。

F. I. Mautner によって、群 G の表現 π に対し、π の既約分解と π(G)′ の中の極大可換 von Neumann 環とが対応している事が知られている。他方、群の非Ⅰ型性は、位相変換群の "non-smooth" と密接に関係しており、我々は [1] において、"non-smoothness" の1つの指標として、ある種のコホモロジー群を採用した。ここでは、そのコホモロジー群の各元に対応して、全く異なる既約分解が得られる事を示すと同時に、それぞれの分解に対応する極大可換 von Neumann 環を明示する。今迄の知られている例では、異なる分解に対応する可換 von Neumann 環は、互いに代数的に同型でない環だが、ここでの環達は、すべて、互いに spatially に（勿論 代数的にも）同型である点が異なっていると思われる。

non I type ⟷ non smooth
↓
あるcohomology
↓
π′(G)の中の極大可換von Neumann環たち ⟷ いろいろな既約分解たち

準備

N, K は、可算基を持つ局所コンパクト群で可換であると仮定する。$\overset{\mathbb{Z}}{K}$ が $\overset{\mathbb{Z}^2}{N}$ に自己同型群として作用しており、その作用を、$K \ni k$ に対し、$N \ni z \longmapsto k \cdot z \in N$ と記す。$G = N \times_s K$（N と K の半直積群）で、G の元は $(\underset{\underset{N}{\uparrow}}{z}, \underset{\underset{K}{\uparrow}}{k})$ $(z \in N, k \in K)$ と書か

$k\cdot z = \begin{pmatrix} 1 & \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ kn_1+n_2 \end{pmatrix}$

$k\cdot \chi^{(\sigma_1,\sigma_2)}$
$= \chi^{(\sigma_1+k\sigma_2,\ \sigma_2)}$
$= \chi^{(\sigma_1,\sigma_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}}$

れ、群演算は、

$$(z, k)(z', k') = (z + k\cdot z',\ k+k') = (0, 0)$$

で与えられているとする。　$k' = -k$
$k\cdot z' = -z \Rightarrow z' = (-k)\cdot(-z) = k\cdot z$

この時、Kの$\hat{N}$（Nの双対）への作用を、$k \in K$, $\chi \in \hat{N}$ に対して、

$\chi^{\sigma_1\sigma_2}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = e(\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2)$

$$< z,\ k\cdot\chi > \equiv < k\cdot z,\ \chi > = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \chi \right\rangle = e(\sigma_1(n_1) + \sigma_2(kn_1+n_2))$$

for $\forall z \in N$ $= e((\sigma_1 + k\sigma_2)n_1 + \sigma_2 n_2)$

で定義すると、位相変換群（K ; $\hat{N}$）を得る。（K, $\hat{N}$）が"smooth"な時、つまりKの作用による$\hat{N}$上の各軌道がすべて局所閉集合である時、$G = N \times_s K$は"regular"であると云われる。N, K併に可換である今の状況の下では、Gが"regular"である事と、GがI型の群である事とが同値になる。

我々は、主に"non-regular"な半直積群（＝非I型群）を扱うが、次の仮定(*)を必要とする。"regular"な場合は、この仮定(*)は、自動的に不要になる。

$\overset{N}{\curvearrowleft\ \curvearrowright}$
$K \subset \mathcal{K}$

$\mathcal{G} = N \rtimes \mathcal{K}$
$\cup$
$G = N \rtimes K$
$\mathcal{G}$ regular

仮定(*) Kを閉部分群として含む大きな可換群$\mathcal{K}$が、次の条件を満たすようにうまくとれる。$\mathcal{K}$もNに自己同型群として作用し、その作用はKの拡大になっている。更に$\mathcal{G} = N \times_s \mathcal{K}$は"regular"な半直積群となる。

離散Mautner群、Mautner群、離散Heisenberg群等は、この仮定を満たす。

$\uparrow \qquad \uparrow$

~~$\mathbb{Z}\oplus$~~ $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}$ のこと

本当の離散Heisenberg群
$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ は(*)みたすか?

$\mathbb{T}^1 \oplus \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Z}\oplus\mathbb{R} \subset (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z} \subset (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{R})\rtimes\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \hat{N} \ni \varphi \arrow[r, mapsto] & \varphi & N \arrow[d] \subset N\rtimes K = G \arrow[drr] & \subset N\rtimes\mathcal{X} = \mathcal{G} \arrow[d, "\operatorname{Ind}_{N\uparrow\mathcal{G}}\varphi"] \\ & & \mathbb{T}^1 & & U(L^2(\mathcal{G}/N \cong \mathcal{X})) \end{tikzcd}$$

$\hat{N} \overset{\wr\wr}{} \cong \mathbb{T}^1\oplus\mathbb{R}$ $\qquad N\backslash G \cong K$

本論

$\mathbb{Z}^2$

今、φ を $\hat{N}$ の勝手な1次表現とした時、 $\mathcal{H}^\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \cancel{f}: \mathcal{G}\to\mathbb{C} \\ f(ng) = \varphi(n) g \end{array}\right.$

$$\pi^\varphi \equiv {}_G\Big|\operatorname{Ind}_{N\uparrow\mathcal{G}}\varphi \;:\; G \to U(\mathcal{H}^\varphi)$$

広義の induced rep from character of subgroup N

によって、G のユニタリー表現 π^φ が得られる。我々は、この π^φ の色々な分解を実行する。π^φ は、表現空間 $L^2(\mathcal{X})$ に、次のように実現出来る。

$\mathcal{H}_\varphi = \langle \phi : \mathcal{G}\to\mathbb{C},\ \phi(g,z) = \varphi(z)\phi(g)\quad z\in N,\ g\in\mathcal{G} \rangle$

$\phi(z,t) = \phi((0,t)^{-1}(tz,0))$

$= \varphi(tz)\phi((0,-t))$

補題 1

Schrodinger 表現

$f(t) = \phi(0,t)$

$L^2(\mathcal{X}) \ni f(t)$ に対して $(\pi^\varphi_{(z,k)}f)(t) = f((z,k)(0,t))$

$= f(z, k+t)$

$$(\pi^\varphi_{(z,k)} f)(t) = \langle \boxed{z}, t\cdot\varphi \rangle f(t+\textcircled{k})$$

$(\pi^{\varphi^{\xi,\eta}}_{([\overset{l}{u}],k)} f)(t) = \langle [\overset{l}{u}], t\cdot\varphi^{\xi,\eta} \rangle f(t+k)$

但し、$(z,k)\in G = N\times_s K$ $\quad // = \langle (\overset{1}{t}\ {}_1)[\overset{l}{u}], \varphi^{\xi,\eta}\rangle f(t+k)$

$= e(\xi(l)+\eta(tl+u)) f(t+\underline{k})$

$\varphi = \varphi^{(\xi,\eta)}$ のとき

$t.\varphi^{(\xi,\eta)}$

$= \varphi^{(\xi+t\eta,\eta)}$

$= \varphi^{(\xi,\eta)}(t\cdot)$

$t\in H_{\varphi^{\xi,\eta}}$

$\Updownarrow$

$t\eta\in\mathbb{Z}$

$t\in\frac{1}{\eta}\mathbb{Z}$

$\varphi\in\hat{N}$ における $\mathcal{X}$ の固定群を H_φ と記す。$\mathcal{X}$ 上の $\mathbb{T}$ー値ボレル関数 $a(t)$ が、次の条件を満足する時、$(K;\mathcal{X};H_\varphi)$ のコサイクルと呼ぶ。但し $\mathbb{T}$ はトーラス。

$$\begin{tikzcd} H_{\varphi^{(\xi,\eta)}} \overset{\shortparallel}{} & K < \mathcal{X} \supset H_\varphi \arrow[d, "a"] \\ & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd}$$

$$(**)\ a(\underline{k}+\boxed{t}+\underline{\underline{h}}) = a(\underline{k}+\textcircled{t})\,\overline{a(\textcircled{t})}\ a(\textcircled{t}+\underline{\underline{h}})$$

$$\text{for } \forall k\in \underset{\mathbb{Z}}{K},\ \forall t\in\underset{\mathbb{R}}{\mathcal{X}},\ \forall h\in H_\varphi$$

$Z^1(K:\mathcal{X}:H_\varphi)$
$\ni a$
$\downarrow$
λ^a

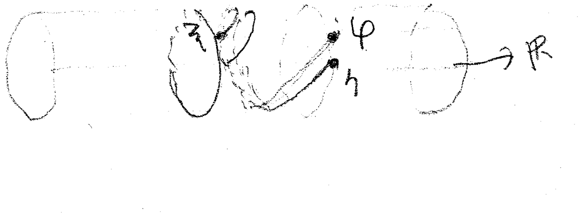
このコサイクル a に対して、H_φ のユニタリー表現 λ^a を

$Z(K,\mathcal{X},H_\varphi)$
Ψ
$a \longmapsto \lambda^a$

$$(\lambda^a_h f)(t) = \overline{a(t)}\,a(t+\textcircled{h})\,f(t+\textcircled{h})$$

$$h\in H_\varphi,\quad f\in L^2(\underset{\mathbb{R}}{\mathcal{X}})$$

で定め、$\lambda^a(H_\varphi)$ で生成する可換 von Neumann 環を $\mathfrak{A}^{a,\varphi}$ と記す。



この時、

$$\mathfrak{B}(L^2(\mathcal{H}))=\mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\varphi})$$

補題2

$$\cup$$

任意のコサイクル a に対し、$\pi^{\varphi}(G)' \supset \mathfrak{A}^{a,\varphi}$ //

を得る。表現の分解に関する次の一般論は、よく知られている。

補題3（F. I. Mautner）　$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

可算基を持つ局所コンパクト群 G の可分ヒルベルト空間へのユニタリー表現を π とする。今、$\pi(G)'$ の中の可換 von Neumann 環 $\mathfrak{A}$ が与えられた時、この $\mathfrak{A}$ に対応して、$\mathfrak{A} \underset{\text{代数的}}{\cong} L^{\infty}(\Omega,\mu)$ となる "standard" な測度空間 (Ω,μ) が存在して、π は

$$\pi=\int_{\Omega}^{\oplus} \pi^{\omega}\, d\mu(\omega)$$

と分解される。//

$$G \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

$\begin{cases} \mathfrak{A} \subset \pi(G)' \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \\ \mathfrak{A} \text{ は可換 Von Neumann} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$\exists(\Omega,\mu)$ s.t $\begin{cases} \mathfrak{A} \cong L^{\infty}(\Omega,\mu) \\ \pi=\int_{\Omega}^{\oplus}\pi^{\omega}\, d\mu(\omega) \end{cases}$

一方、我々は、$G=N\times_s K$ の既約表現に関して、いくらかの考察がすでにある。（[1] 参照　[4] 参照）　$G_{\varphi}=N\times_s H_{\varphi} \subset G$

とし、$\chi \in \hat{H}_{\varphi}$ に対し、$L^{(\varphi,\chi)}_{\hat{N}\ \hat{H}_{\varphi}}$ を、　$L^{(\chi,\varphi)}:=\varphi * \chi \in \varphi\cdot\hat{H}_{\varphi}$

$$(\varphi*\chi)(z,h):=L^{(\varphi,\chi)}_{(z,h)\atop N\ H_{\varphi}}=\langle \overset{N}{z},\underset{\hat{N}}{\varphi}\rangle\langle \overset{H_{\varphi}}{h},\underset{\hat{H}_{\varphi}}{\chi}\rangle \qquad (z,h)\in G_{\varphi} \qquad \widehat{N\ltimes H_{\varphi}}$$

で定まる G_{φ} の一次表現とする。（K；$\mathcal{X}$；H_{φ}）の各コサイクル a に対応して、[1] において、Mackey の誘導表現の一般化として、

$$\begin{aligned}
&(\varphi*\chi)((z,h)(z',h'))\\
&=(\varphi*\chi)(z+h\cdot z',h+h')\\
&=\langle\varphi,z+hz'\rangle\langle\chi,h+h'\rangle\\
&=\langle\varphi,z\rangle\underset{\langle\varphi,z'\rangle}{\underset{\shortparallel}{\langle\varphi,h\cdot z'\rangle}}\langle\chi,h\rangle\langle\chi,h'\rangle
\end{aligned}$$

$h\in H_{\varphi}$

N
$\cap$
$N \rtimes K = G$
$\cap$
$N \rtimes \mathcal{K} = \mathcal{G}$ 76

$$\hat{N} \ni \varphi \Longrightarrow \pi^{\varphi} : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathcal{K}))$$
$$\Downarrow$$
$$H_{\varphi} \subset \mathcal{K}$$
$$\Downarrow$$
$$Z(K, \mathcal{K}, H_{\varphi}) \ni a \Longrightarrow \lambda^{a} : H_{\varphi} \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathcal{K})) \Longrightarrow \overset{\lambda^{a}(H_{\varphi})}{\hat{\mathfrak{A}}^{a}} \subset \pi(G)'$$

$$\mathcal{U}^{(a,\varphi,x)} \equiv \operatorname*{Ind}_{\mathcal{G}_{\varphi} \xrightarrow[a]{} G} L^{(\varphi,x)} :$$

$\Downarrow$
$\exists (\Omega, \mu)$
$\begin{cases} ① \ L^{\infty}(\Omega,\mu) \cong \mathfrak{A}^{a} \\ ② \ \pi^{\varphi} = \int^{\oplus}_{\Omega} \pi^{\omega} d\mu(\omega) \end{cases}$

を定義した。

そこで我々は、上記のπ^{φ}を$\mathfrak{A}^{a,\varphi}$に関して具体的に分解を実行してみると、次の結果を得た。

定理4 $\mathfrak{A}^{a,\varphi} \cong L^{\infty}(\hat{H}_{\varphi}, \mu)$

とくに
$L^{\infty}(\hat{H}_{\varphi}, \mu) \cong \mathfrak{A}^{a}$

π^{φ}の$\mathfrak{A}^{a}$に関する分解は、

$$\pi^{\varphi} = \int^{\oplus}_{\hat{H}_{\varphi}} \mathcal{U}^{(a,\varphi,x)} d\mu(x) = \int^{\oplus}_{x \in \hat{H}_{\varphi}} T^{(a,x,\varphi)} d\mu(x)$$

但し、μは$\hat{H}_{\varphi}$のHaar測度であり、$\mathcal{U}^{(a,\varphi,x)}$は上に定義した$G$のユニタリー表現である。//

二つのコサイクルa、a'に対して、K−不変なコサイクルbとH_{φ}−不変なコサイクルcが存在して、

$$a(t)\,\overline{a'(t)} = b(t)\,c(t) \qquad a.a.\ t \in \mathcal{K}$$

となっている時、aとa'はコホモロガスであるといい、$a \cong a'$と書く事にする。そこでコホモロジー群を、

$$\mathcal{H}^{\varphi} \equiv \{(K; \mathcal{K}; H_{\varphi})\text{のコサイクル全体}\} / \cong$$
$$\mathcal{H}^{\varphi}_{0} \equiv \hat{\mathcal{K}} / \cong \; = \hat{\mathcal{K}} / K^{\perp} + H^{\perp}_{\varphi} \quad (K^{\perp}, H^{\perp}_{\varphi}\text{は零化群})$$

で定める。$\mathcal{H}^{\varphi}_{0}$は$\mathcal{H}^{\varphi}$の部分群になっているから、

$$\tilde{\mathcal{H}}^{\varphi} = \mathcal{H}^{\varphi} / \mathcal{H}^{\varphi}_{0}$$

を更に定義する。この時、$U^{(a,\varphi,\chi)}$ に関し、

命題5（[1]）

二つのコサイクル a と a' に対し、$\hat{\mathcal{H}}$ の元として、$[a]\neq[a']$ ならば、任意の $\chi, \chi' \in \widehat{H_\varphi}$ に対し、$U^{(a,\varphi,\chi)}$ と $U^{(a',\varphi,\chi')}$ は決して、ユニタリー同値にならない。//

つまり、定理4は、π^φ の $\hat{\mathcal{H}}$ 通りの全く異なる分解を与えている。しかし、対応する可換 von Neumann 環 $\mathfrak{A}^a$ は、a が自由に動いても、すべて spatially に同値になっている点に注意しておこう。ここで $\hat{\mathcal{H}}^\varphi=\{0\}$ では、"色々な分解" を与えた事にならない。そこで、いつ $\hat{\mathcal{H}}^\varphi\neq\{0\}$ か、いつ π^φ は非I型かを調べておく必要がある。

命題7

π^φ が非I型表現である。$\Longleftrightarrow$ $K+H_\varphi$ は $\mathfrak{X}$ の中で閉集合でない。

命題8（[1]）

$K+H_\varphi$ が $\mathfrak{X}$ の中で閉集合の時、$\mathcal{H}^\varphi=\mathcal{H}_0^\varphi$、即ち $\hat{\mathcal{H}}=\{0\}$ //

等は、容易に判る。更に、C.C. Moore 氏のコメントによると、

命題9（C.C. Moore）

$K+H_\varphi$ が $\mathfrak{X}$ の中で閉集合でない時、$\hat{\mathcal{H}}^\varphi\neq\{0\}$ //

つまり、π^φ が非I型表現である時は、"必ず" 2通り以上の分解が存在している。具体的な簡単な幾つかの例において

は、$\tilde{\mathfrak{R}} \supset \mathbb{Q}$ ={有理数全体} である事が判っており、([1]参照) $\tilde{\mathfrak{R}}$ は$\mathbb{Q}$よりはるかに巨大である事も予想されるが、その決定は極めて困難であり、未解決である。

最後に、$U^{(a,\varphi,\mathfrak{X})}$ 及び π^{φ} に関しては、次の事が判る。

命題9 ([1])

$K+H_{\varphi}$ が$\mathfrak{X}$の中で稠密なら、$U^{(a,\varphi,\mathfrak{X})}$ は既約表現。//

命題10

$K+H_{\varphi}$ が$\mathfrak{X}$の中で稠密で、$K \cap H_{\varphi} = \{0\}$ なら、π^{φ} は因子表現。更にこの仮定の下で、$K+H_{\varphi} \neq \mathfrak{X}$ である事と π^{φ} が hyperfinite なII型因子表現である事が同値。//

余談

以上は、主に論文[2]の紹介である。講演後の富山氏のコメントに従って、C^*-群環の表現として、とらえ直してみると、$\pi^{\varphi}(G)'$ の正体及び $\mathfrak{a}^{\varphi}$ の極大性等が、より鮮明になった。これについては[3] を参照されたい。

参考文献

[1] S. Kawakami ; Irreducible representations of non-regular semi-direct product groups (Preprint)

[2] ________ ; On decompositions of some factor representations (Preparation)

[3] S. Kawakami & T. Kajiwara ; Representations of non-type I C^*-crossed products. (Preparation)

[4] 河上　哲 ; Mautner群の既約表現について（数解研講究録368）