数理解析研究所講究録
398巻 1980年 51-59

Completely positive maps between the operator algebras and their duals with related topics

新潟大 理 富山 淳

§0. C^*環より他のC^*環のdualへのcompletely positive mapの重要性は、Effros-Lanceにより、nuclearityやsemidiscreteの概念の議論の時に示されているがここではそれと対になるdualからC^*環(主としてvon Neumann環)へのcompletely positive mapの重要さを示すと共に最近の関連する話題をとりあげる。Effros-Lanceの時と同様にそれらはテンソル積に関係するものである。

§1. M, Nをそれぞれヒルベルト空間H, K上に作用するvon Neumann環としM$\bar{\otimes}$Nをそのテンソル積とする。このとき各$\varphi \in M_*$に対してσ弱位相で連続なM$\bar{\otimes}$NよりNへの右スライス写像R_φ : $R_\varphi(a \otimes b) = \varphi(a)b$ が定義出来る。更に$\psi \in N_*$について左スライス写像をL_ψとするとき、$\varphi \in M^*$について

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle \qquad x \in M \bar{\otimes} N$$

の形で一般化されたるスライス写像が定義出来る。これらの写像は元の汎関数が正の時 completely positive になる。x を $M\bar{\otimes}N$ の元とする。そのとき x は M_*（および M^*）より N への写像
$$\gamma(x) : \varphi \in M_* (\text{or } M^*) \longrightarrow R_\varphi(x) \in N$$
を定義する。そして $M\bar{\otimes}N$ の positive な部分はこの写像により次のように定められる。

定理 1.（Effros）$x \in M\bar{\otimes}N$ が正であることと $\gamma(x)$ が completely positive map であることは同値である。又 $M\bar{\otimes}N$ の単位球の中の正の部分は、M_* より N への completely positive map で $0 \leq \tau \leq \gamma(1\otimes 1)$（順序も completely positive map の順序）となるものの全体として表現出来る。

上の表現定理は積写像の構成に直ちに応用出来る。即ち τ および σ をそれぞれ von Neumann 環 M_1, N_1 より M_2, N_2 への写像とするとき $M_1\bar{\otimes}N_1$ より $M_2\bar{\otimes}N_2$ への写像 ρ で
$$\rho(a\otimes b) = \tau(a)\otimes\sigma(b)$$
となるものの存在が例えば τ, σ が norm 1 の射影写像であるときなどに要求される。一般の有界線型写像の組についてはそれは望めないことであるが上の場合を一般化した completely positive map の class については求める結果が得られる。

定理 2. τ, ρ を completely positive map とすると、$M_1\bar{\otimes}N_1$ よ

り $M_2\bar{\otimes}N_2$ への completely positive map ρ が存在して

$$\rho(a\otimes b)=\tau(a)\otimes\sigma(b)$$

又 M_2, N_2 がそれぞれ M_1, N_1 の von Neumann 部分環で τ,σ がノルム1の射影写像のときには ρ を $M_2\bar{\otimes}N_2$ への射影写像になるようにつくれる。

一般に von Neumann 環 M, N の間の completely positive map (以下 cp-map と略記する) τ は unital な cp-map τ' と N の正の元 h を用いて $\tau(x)=h^{1/2}\tau'(x)h^{1/2}$

とかけるから上の定理も τ,ρ が unital な時に示せば十分である。そこで ρ を次のようにつくる。x を $M_1\bar{\otimes}N_1$ の正の元とし $\gamma(x)$ を一般スライス写像を用いて M_1^* まで定義域を広げておく。

$$\begin{tikzcd} M_{2*} \arrow[r, "\gamma(\rho(x))"] \arrow[d, "{}^t\tau"'] & N_2 \\ M_1^* \arrow[r, "\gamma(x)"] & N_1 \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

上の diagram に対して $\gamma(\rho(x))$ となる $M_2\bar{\otimes}N_2$ の正の元 $\rho(x)$ の存在は定理1によるものである。$M_1\bar{\otimes}N_1$ の一般の元に対してはあと線形に上の ρ を拡張すれば求める cp-map が得られる。(ρ が cp-map であることは証明が必要である)。さて上の ρ を $\tau\otimes_{\gamma}\sigma$ とかくことにすると、cp-map の構成にはもう1通り

$\tau \otimes_{\ell} \sigma$ とかくべきものがあるが

($N_{2*} \xrightarrow{{}^t\sigma} N_1^* \xrightarrow{\ell(x)} M_1 \xrightarrow{\tau} M_2$)

この両者は一般には一致しない。

上の結果は今迄に知られている積写像についての結果をすべて含んでいる。例えば τ, σ が σ-弱位相で連続であれば $\tau \otimes_{\gamma} \sigma = \tau \otimes_{\ell} \sigma$ も又 σ 弱位相で連続であるし、C^*環のテンソル積についての積写像の存在は、それぞれの C^*環の第二共役空間の von Neumann 環のテンソル積について上の定理を適用し、その結果の ${}^{tt}\tau \otimes_{\gamma} {}^{tt}\sigma$ を元の C^*テンソル積に制限すればよい。

定理1の証明並びに定理2に関する議論については[3], [5]に詳細をゆだねる。

§2. A, B を C^*環とし、$A \otimes B$ をそれらの C^*テンソル積としたとき $A \otimes B$ の derivation は一般には A, B が derivation の立場から非常によい性質のものであっても同じようによい性質をもつとは限らない。しかし対象が von Neumann 環になると状況が違ってくる。Akemann-Johnson [1] はそれについて M, N が von Neumann 環の時にはその C^*テンソル積 $M \otimes N$ の derivation が常に inner になるのではないかと conjecture している。それはまだ[1]でも特殊な場合を除いてとけてはいないが、その過程で、A が可換な C^*環の時には任意の von Neumann 環 N について

$A\otimes N$ の derivation が inner であることが示されている。この結果は更に一般に次の形に拡張出来る。Z を N の中心とする。

定理3. A をその既約表現が有界な有限次元であるような unital C^* 環とする。このとき $A\otimes N$ の derivation δ が inner であるための必要十分条件は $A\otimes Z$ の derivation $1\otimes\varepsilon\circ\delta$ が inner になることである。

ここで ε は N より Z への射影、又 $1\otimes\varepsilon$ は $A\otimes N$ より $A\otimes Z$ への積射影である。

上の定理で δ が常に inner であることは望めないが A を更に制限して n-homogeneous 位にすれば $A\otimes N$ の derivation は常に inner になる。A が可換というのはここでは 1-homogeneous なことである。定理の証明の詳細は[4] にゆだねるが着想の基本は $\tilde{A}$ を A の第二共役空間の von Neumann 環としたとき $\tilde{A}\bar{\otimes}N$ への δ の拡張の生成元の中で定理1での写像

$$r(c):\varphi\in A^*\longrightarrow R_\varphi(c)\in N$$

が A^* の単位球上で弱*位相―ノルム位相で連続になるものがとれるということである。このようなものがとれれば A は approximation property をみたすから λ-ノルムのテンソル積 $A\otimes_\lambda N$ の中に $R_\varphi(c)=R_\varphi(a)$ $(\varphi\in A^*)$ となるような元 a が

存在する。そして $A\otimes N \cong A\otimes_{\lambda} N$ が今の場合成り立つから a の逆像として C が実際 $A\otimes N$ に入ることがわかる。ここで von Neumann 環 M については $M\otimes N$ の derivation は常に上の性質をもつような元 $C\in M\bar{\otimes} N$ をもつことが同様な議論で示せるので、R_φ の上のような連続性が一般に $M\bar{\otimes} N$ の元が $M\otimes N$ に属するための判定条件を与えるのであればよいのであるが、それは定理3での場合以外には殆んど望めないことが Johnson によって最近示された（[2]）。それを少し modify した形で次に示すことにする。

§3. n 次元のヒルベルト空間 H_n での基を $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots \xi_{nn}$, それについての matrix units を e^n_{ij} とする。

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=1}^{n} e^n_{p1}\otimes e^n_{p1} \qquad \text{とおく。}$$

定義から c_n は射影 $c_n^* c_n = e^n_{11}\otimes e^n_{11}$ と

$$c_n c_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i,j} e^n_{ij}\otimes e^n_{ij}$$

を結ぶ partial isometry である。H を無限次元のヒルベルト空間とし、$H = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus H_{2^n}$ と分解すると、$H\otimes H$ 上で弱位相の収束で有界作用素 $c = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2^n}$ が定義出来る。この c が前述の判定条件の反例を与える。即ち $Y(c)$ は $\mathcal{L}(H)^*$ の単位球上では弱*位相—ノルム位相で連続であるが c は $\mathcal{L}(H)\otimes\mathcal{L}(H)$ に属さな

り、それを示すにはまず C_n の λ-ノルムを求めると(作用素ノルムは1である) H_n の単位ベクトル ξ_i について

$$\|C_n\|_\lambda = \sup_{\xi_i} |(C_n(\xi_1\otimes\xi_2),\ \xi_3\otimes\xi_4)|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\xi_i} \Big|\sum_p (\xi_1, \xi_{n1})(\xi_{np}, \xi_3)(\xi_2, \xi_{n1})(\xi_{np}, \xi_4)\Big|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\xi_i} \Big|\Big(\sum_p y_{np}\xi_{np},\ \xi_3\Big)\Big| \qquad y_{np} = (\xi_{np}, \xi_4)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\xi_i} \Big\|\sum_p y_{np}\xi_{np}\Big\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

そこで $\mathfrak{L}(H\otimes H)$ の元について λ-ノルムに対応するノルム $N(x)$ を H の単位ベクトルの組 $\{\xi_i\}$ についての上限として

$$N(x) = \sup |(x(\xi_1\otimes\xi_2),\ \xi_3\otimes\xi_4)|$$

と定義する. 定義から $N(x)$ は弱位相について下半連続である. ゆえに

$$N\Big(\sum_{n=k}^{\infty} C_{2^n}\Big) \le \underline{\lim}_{l}\, N\Big(\sum_{n=k}^{l} C_{2^n}\Big) \le \lim_{l} \sum_{n=k}^{l} N(C_{2^n}) = \sum_{n=k}^{\infty} N(C_{2^n})$$

から C は $\mathfrak{L}(H)\otimes_\lambda\mathfrak{L}(H)$ に属すると言ってもよい. 従って $r(C)$ は連続条件をみたしている. この C が $\mathfrak{L}(H)\otimes\mathfrak{L}(H)$ に入らないことの判定には次のことを用いる.

Lemma 4. $\eta_1, \cdots, \eta_s$ を H の直交する単位ベクトルとする. このとき t-次元の H の部分空間 E について

$$\sum_{i=1}^{s} \mathrm{dist}(\eta_i, E)^2 \ge s - t$$

これは直接計算でたしかめればよいがこれから任意の元

$T=\sum_{i=1}^{\ell} a_i\otimes b_i$ について、(p_n を H より H_{2^n} への射影として)

$$\|c-T\|^2 \geqq \|p_n\otimes p_n(c-T)(\xi_{n1}\otimes\xi_{n1})\|^2$$

$$=\Big\|\sum_p\Big(\sqrt{2}^{-n}\xi_{np}-\sum_i(b_i\xi_{n1},\xi_{np})p_n a_i\xi_{n1}\Big)\otimes\xi_{np}\Big\|^2$$

$$=\sum_p\Big\|\sqrt{2}^{-n}\xi_{np}-\sum_i(b_i\xi_{n1},\xi_{np})p_n a_i\xi_{n1}\Big\|^2$$

$$\geqq \frac{1}{2^n}\sum_p \mathrm{dist}(\xi_{np},E_n)^2$$

$$\geqq \frac{1}{2^n}(2^n-\ell)=1-\frac{\ell}{2^n}\qquad \forall n$$

(ただし E_n は ℓ ケのベクトル $p_n a_i\xi_{n1}$ で張られた部分空間)
したがって c は $\mathfrak{L}(H)\otimes\mathfrak{L}(H)$ に属さない。又上式中 ξ_{np} は $\xi_{2^n p}$ の略記である.

上の計算からわかるようにこのような c は無限次元の von Neumann 環 M, N について $M\otimes N$ の中に常に構成出来る。さてこの c が $\mathfrak{L}(H)\otimes\mathfrak{L}(H)$ の derivation をひき起せば Akemann-Johnson の conjecture も成立しないわけであるが、c はそのような derivation をひき起さない。それは q_n を $\xi_{n2},\xi_{n3},\cdots\xi_{n2^n}$ で張られる空間への射影, $q=\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ として

$$(1\otimes q)c-c(1\otimes q)$$

を考えると c の時と殆んど同じ計算でこれが $\mathfrak{L}(H)\otimes\mathfrak{L}(H)$ に入らないことが示せるからである.

文 献

[1] C. A. Akemann & B. E. Johnson, Derivations of non-separable C^*-algebras, Journal of Functional Analysis, 33 (1979), 311–331

[2] B. E. Johnson, The failure of the slice map criterion, preprint

[3] M. Nagisa & J. Tomiyama, Completely positive maps in the tensor product of von Neumann algebras, Journal of Math. Soc. Japan に掲載予定

[4] J. Tomiyama, Inner derivations in the tensor products of operator algebras, Tôhoku Math. J. 32 (1980), 91–97

[5] J. Tomiyama, Complete positivity in operator algebras, 京大数理研レクチャーノート No 4