数理解析研究所講究録
399巻 1980年 134-142

正規作用素による近似について

富山大 教育 泉野佐一

1. 序. Hilbert空間上の(有界線形)の一つの集合を$\mathfrak{M}$とする。作用素Tに対してこれから$\mathfrak{M}$までの(最短)距離$d(T, \mathfrak{M})$は$\inf\{\|T-M\| : M \in \mathfrak{M}\}$で定義される。また$M_0$が$\|T-M_0\| = d(T, \mathfrak{M})$, $M_0 \in \mathfrak{M}$をみたすときTの最良近似あるいは$\mathfrak{M}$-approximantといわれる。$\mathfrak{M}$が正規作用素の全体$\mathfrak{N}$のとき、あるいはそのsubclass $\mathfrak{N}(\Lambda)$すなわちspectrumが平面集合Λに含まれるような正規作用素全体のときに、距離の評価や最良近似の存在性を考えるのが正規作用素による近似の問題である。Λの特別な場合として、実数$\mathbb{R}$, 正実数$\mathbb{R}^+$, 単位円周$\mathbb{T}$のとき、$\mathfrak{N}(\Lambda)$はそれぞれ自己共役, 正値, Unitary作用素の全体になる。これらの場合についてHalmos, Bouldin, Rogers等のくわしい研究がある。ここではこれらに関連する最近の結果を紹介したい。なお, 講究録338 [14], 377 [15]においても関連する事柄は報告されている。

2. $d(T, \mathcal{N}(\Lambda))$ の評価. 便宜上Hilbert空間Hは可分, またΛは平面上の閉集合とする。特に$\Lambda = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{T}$のときの$\mathcal{N}(\Lambda)$をそれぞれ$\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{U}$とかく。作用素Tに対して,

$$m(T) = \inf \sigma(|T|),\quad m_e(T) = \inf \sigma_e(|T|),\quad \mathrm{ind}\, T = \dim\ker T - \dim\ker T^* \quad (\infty - \infty = 0)$$

とする。次はよく知られている結果である。

命題 2.1. $T = B + iC$ のとき, $d(T, \mathcal{S}) = \|C\|$.

定理 2.2 (Halmos) $d(T, \mathcal{P}) = \inf\{r > 0 : B + (r^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0\}$.

定理 2.3 (Rogers)

$$d(T, \mathcal{U}) = \begin{cases} \max\{\|T\| - 1, 1 - m(T)\} & (\mathrm{ind}\, T = 0) \\ \max\{\|T\| - 1, 1 + m_e(T), 1 + m_e(T^*)\} & (\mathrm{ind}\, T \neq 0). \end{cases}$$

また定理2.3を利用して, 正規作用素全体$\mathcal{N}$に関して

命題 2.4 (i) $\mathrm{ind}\, T = 0$ ならば $d(T, \mathcal{N}) \leq \dfrac{\|T\| - m(T)}{2}$

(ii) $\mathrm{ind}\, T < 0$ ならば $m_e(T) \leq d(T, \mathcal{N}) \leq \dfrac{\|T\| + m_e(T)}{2}$.

が[14]ですでに報告されている。$d(T, \mathcal{N})$ の別の評価として, Tのnumerical range $W(T)$を用いた次が成り立つ。

命題 2.5 $d(T, \mathcal{N}) \leq \inf_L \hat{d}(W(T), L)$.

右辺のLはすべての平面直線にわたって動き, また$\hat{d}(A, B)$は$\sup\{d(x, B) : x \in A\}$を表わす。この不等式は任意の自己共役作用素Sに対してその一次式$\alpha S + \beta \in \mathcal{N}$ということと命題2.1から示される。

$\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$でそれぞれH上の可逆な作用素, Fredholm作用素の

全体を表わすとする。 このとき定理2.3 の証明に使われた方法([13])を用いて次が証明できる。

命題2.6 (i) $T \notin \mathcal{G}$ ならば $d(T, \mathcal{G}) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$.

(ii) $T \notin \mathcal{F}$ ならば $d(T, \mathcal{F}) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$.

index zero の作用素全体を $\mathcal{Z}$, compact 作用素全体を $\mathcal{K}$, $\mathcal{Z}+\mathcal{K} = \{Z+K : Z \in \mathcal{Z},\ K \in \mathcal{K}\}$ とするとき, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ の閉包について次が成り立つ($\overline{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ の閉包)。

命題2.7 ([10]) (i) $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}+\mathcal{K}$.

(ii) $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{G}}$.

なお、ついでながら最近 R. Lange は $\mathcal{Z}+\mathcal{K}$ の subclass である $\mathcal{U}_\infty = \{T : T^*T - 1 \in \mathcal{K},\ \sigma(T)$ は 0 の近傍を含まない$\}$ を考え, これの特徴づけとして次の結果を示している。

定理2.8 ([11]) (i) $T \in \mathcal{U}_\infty$,

(ii) $T \in \mathcal{U}+\mathcal{K}$, T は SVEP (single valued extension property) をもつ,

(iii) $T \in \mathcal{U}+\mathcal{K}$, $\sigma(T)$ は nowhere dense.

T が正規のときは, $d(T, \mathcal{N}(\Lambda))$ は $\sigma(T)$ の言葉で評価できる。次は Halmos のいわゆる距離公式として知られているもの。

定理2.9 ([9]) T を正規とすると,

$$d(T, \mathcal{N}(\Lambda)) = \hat{d}(\sigma(T), \Lambda) \quad (= \sup\{d(z, \Lambda) : z \in \sigma(T)\})$$

この証明には Borel 可測な関数 $F : \mathbb{C} \to \Lambda$ で $|z - F(z)| \leqq d(z, \Lambda)$

を満たすいわゆる distance minimumizing retraction が使われる。このような関数Fの存在はΛが閉集合ということから保証される。Λが convex のときは unique なることもいえる。いま

$$F(T)=\int_{\sigma(T)} F(z)\,dE(z) \qquad \left(T=\int_{\sigma(T)} z\,dE(z)\right)$$

とすると $F(T)\in\mathcal{N}(\Lambda)$，かつ $d(T,\mathcal{N}(\Lambda))=\|T-F(T)\|=\hat{d}(\sigma(T),\Lambda)$ となるわけである。

3. $\mathcal{N}(\Lambda)$-approximant の存在性. $N\in\mathcal{N}(\Lambda)$, $\|T-N\|=d(T,\mathcal{N}(\Lambda))$ が T の $\mathcal{N}(\Lambda)$-appr. である。T が正規のときは，先の Halmos の結果からこれの存在はわかる。一般の場合については次が知られている。

定理 3.1 ([12]). (i) $\Lambda\subset\mathbb{R}$ が compact のとき，任意の T に対して $\mathcal{N}(\Lambda)$-appr が存在する, i.e. $\mathcal{N}(\Lambda)$ は proximinal

$\Longleftrightarrow$ Λ は1点または有界閉区間。

(ii) Λ が convex のとき，$\mathcal{N}(\Lambda)$ が proximal $\Leftrightarrow$ Λ は1点，または一次変換 ($\lambda\to{}^{\exists}\alpha\lambda+{}^{\exists}\beta$) に関して閉区間と同型。

また，$\mathcal{N}(\Lambda)$-appr. の一意性については，

定理 3.2 ([7]). Λ を convex，T を正規とする。このとき T の $\mathcal{N}(\Lambda)$-appr. が unique $\Longleftrightarrow$ $\forall z\in\sigma(T)$ $d(z,\Lambda)=\hat{d}(\sigma(T),\Lambda)$.

次に $\mathcal{A}(\Lambda,T)$ で T の $\mathcal{N}(\Lambda)$-appr. の全体を表わすことにする。

$\mathcal{A}(\Lambda, T)$ の大きさを知る目安としてその次元 real linear dimension が考えられる。これについては次の結果がある。

定理 3.3 ([6]). T は正規, $\Lambda \subset \mathbb{R}$ は閉区間, $\delta = d(T, \mathcal{N}(\Lambda))$,

$$H_0 = \overline{(\delta - |T - F(T)|)H} \qquad (F(\cdot) \text{は定理2.9と同じ})$$

とすれば $\quad \dim \mathcal{A}(\Lambda, T) = (\dim H_0)^2.$

上の部分空間 H_0 はまた T の spectral measure を $E(\cdot)$, $\Gamma = \{z \in \sigma(T) : d(z, \Lambda) = \delta\}$ として $H_0 = E(\Gamma^c)$ とも表わされる。$(\dim H_0)^2$ は H_0 上の自己共役作用素全体のつくる実線形空間の次元であり, 上の定理は $\mathcal{A}(\Lambda, T)$ の次元がこれと一致することを示している。

T が正規の仮定がないとき, $\Lambda = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{T}$ に対しては approximant の存在について次のような結果 (定理 3.4—3.5) がある。

定理 3.4 ([5]). $\quad T = B + iC, \quad H_1 = \overline{(\|C\|^2 - C^2)H}$ として,

(i) $S \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, T)$ ならば $B - (\|C\|^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \leqq S \leqq B + (\|C\|^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}.$

(ii) $\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}, T) = (\dim H_1)^2.$

(iii) $H_1 \subset \overline{\mathrm{span}}\,[\max(T - S), \max(T^* - S)]$ ならば, S は $\mathcal{A}(\mathbb{R}, T)$ の端点。 $\quad (\max A = \{x : \|Ax\| = \|A\|\|x\|\})$.

定理 3.5 ([2]). $\quad T = B + iC, \quad \delta = d(T, \mathcal{P})$ として,

(i) $P \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, T)$ ならば $B - (\delta^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \leqq P \leqq B + (\delta^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} = P_0.$

(ii) $\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, T) \leqq (\dim \mathcal{M})^2, \quad \mathcal{M} = \mathrm{ran}(\delta^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \cap \mathrm{ran}\, P_0^{\frac{1}{2}}.$

定理 3.6 ([13]). (i) $\mathrm{ind}\,T=0$, $T=V|T|$, V は unitary のときこの V は T の $\mathcal{U}$-appr., i.e. $V\in\mathcal{A}(\mathbb{T},T)$.

(ii) $\mathrm{ind}\,T<0$, $d(T,\mathcal{U})>1$ のとき

(a) $\|T\|-1>1+m_e(T)$.

(b) $\dim E([0,m_e(T)])H=\infty$.

(c) $m_e(T)$ が $\sigma_e(|T|)$ の集積点

のいずれか一つが成り立つとき, T の $\mathcal{U}$-appr. が存在する。

(iii) $\mathrm{ind}\,T\neq 0$, $d(T,\mathcal{U})=1$ ならば T の $\mathcal{U}$-appr. は存在しない。

4. normal-error, C_p-error をもつ approximant. $T-N$ が正規となるような $N\in\mathcal{A}(\Lambda,T)$ は normal-error をもつ appr. という。T が正規ならばこのような N の存在は明らか。
$\Lambda=\mathbb{R}$ のとき次が成り立つ。

定理 4.1 ([5]). $T=B+iC$, $T-S\in\mathcal{N}$ とするとき,

(i) $S\in\mathcal{A}(\mathbb{R},T) \iff B-(\|C\|^2-C^2)^{\frac{1}{2}}\leqq S\leqq B+(\|C\|^2-C^2)^{\frac{1}{2}}$.

(ii) S は $\mathcal{A}(\mathbb{R},T)$ の端点 $\iff (S-B)^2+C^2=\|C\|^2$

$\iff \max(T-S)=\max(T^*-S)=H$.

$\mathcal{A}(\mathbb{R}^+,T)$ については

命題 4.2 $T-P\in\mathcal{N}$, $\delta=d(T,\mathcal{P})$ として,

$$P\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^+,T) \iff P\geqq 0,\ B-(\delta^2-C^2)^{\frac{1}{2}}\leqq P\leqq B+(\delta^2-C^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Bouldin [3] は作用素 $T=B+iC$ に対して新しいノルムを $|||T|||=\|B^2+C^2\|^{\frac{1}{2}}$ によって定義している。$P\geqq 0$ のときは $|||T-P|||\geqq d(T,\mathcal{P})$ であり，また $P\in \mathcal{A}(\mathbb{R}^+,T)$ のとき

$$\|T-P\|=|||T-P|||=d(T,\mathcal{P}) \quad ([8])$$

という事実から，$|||T-P|||=d(T,\mathcal{P})$ をみたす $P\geqq 0$ を T の $\mathcal{P}$-near-approximant と呼んでこれについていろいろ調べている。$T-P$ が normaloid のときは P が $\mathcal{P}$-near-appr. なることと $P\in \mathcal{A}(\mathbb{R}^+,T)$ は同値なことが容易にわかる。

注意。T の numerical radius を $w(T)$ とすれば一般に $w(T)\leqq |||T|||\leqq \|T\|$ である。最近，加藤佳宣氏により $|||T|||\leqq \sqrt{2}\, w(T)$ が得られている。

次に C_p $(p\geqq 1)$ をいわゆる Schatten の p-class とする。$A\in C_p$ に対して $\|A\|_p=(\sum_j \lambda_j^p)^{\frac{1}{p}}$ をその p-norm という。ここで λ_j は $\sigma(|A|)$ の元で重複度分だけとられる。次は Aiken et al. による近似定理である。

定理 4.3 ([1]) $T\geqq 0$ は可逆とする。$T-U\in C_p$ $(p>1)$ となる unitary U が存在するとき，$T-1\in C_p$ かつ

$$\|T-U\|_p\geqq \|T-1\|_p,$$

等号は $U=1$ のときに限る。

Aiken et al. によれば，上の定理は量子化学の問題に関連して考えられるものであるという。Fréchet 微分を使って証明

されている。 次の二定理は Bouldin による上の定理の一種の一般化といえる。

定理 4.4 ([4]) T は正規, $p \geqq 2$ とする。$T-N \in C_p$ となる $N \in \mathcal{N}(\Lambda)$ が存在する。$\Longleftrightarrow$ $\sigma(T) \setminus \Lambda$ は高々可算 $(= \{\alpha_j\})$
かつ

(i) 各 α_j は isolated eigenvalue で重複度有限,

(ii) $\sum_j d(\alpha_j, \Lambda)^p < \infty$.

定理 4.5 ([4]) T は正規, $p \geqq 2$ とする。

$$\mathcal{N}_p(\Lambda, T) = \{ N \in \mathcal{N}(\Lambda) : T-N \in C_p \}$$

が空集合でないとき, $T - F(T) \in C_p$ ($F(\cdot)$ は定理2.9のもの)
かつ

$$(*) \qquad \| T - F(T) \|_p \leqq \| T - N \|_p \quad \forall N \in \mathcal{N}_p(\Lambda, T).$$

しかも (*) で等号が成り立つとき

$$N = F(T) \Longleftrightarrow \forall z \in \sigma(T) \text{ に対して } d(z, \Lambda) = |z - \lambda|$$

となる $\lambda \in \Lambda$ は unique.

References

[1] J.G.Aiken, J.A.Erdos and J.A.Goldstein; Unitary approximation of positive operators, Illinois J. Math., 24 (1980), 61-72.

[2] T.Ando, T.Sekiguchi and T.Suzuki: Approximation by positive operators, Math. Z., 131(1973), 273-281.

[3] R.Bouldin: Operators with a unique positive near-approximant, Indiana Un.

Math. J,, 23(1973), 421-427.

[4] R.Bouldin: Best approximation of a normal operator in the Schatten p-norm, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[5] ———— : Self-adjoint approximants, Indiana Un. Math. J., 27(1978), 299-307.

[6] ———— : Spectral approximations of a normal operator, Proc. Amer. Math. Soc., 76(1979), 279-284.

[7] C.K.Chui, P.W.Smith and J.D.Ward: Approximation with restricted spectra, Math. Z., 144(1975), 289-297.

[8] P.R.Halmos: Positive approximants of operators, Indiana Un. Math. J., 21 (1972), 951-961.

[9] ———— : Spectral approximants of normal operators, Proc. Edinburgh Math. Soc., 19(1974), 51-58.

[10] S.Izumino: Inequalities on operators with index zero, Math. Japon., 23 (1978), 565-572.

[11] R.Lange: A class of essentially unitary operators, (to appear).

[12] D.D.Rogers: On proximinal sets of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 61 (1976), 44-48.

[13] ———— : Approximation by unitary and essentially unitary operators, Acta Sci. Math. Szeged, 39(1977), 141-151.

[14] 泉野佐一：Rogers の近似定理の拡張について，数理解析研究所講究録 338 (1978).

[15] ————：作用素に関する不等式と Gohberg-Krein の定理の応用について，数理解析研究所講究録 377 (1980).