数理解析研究所講究録
399巻 1980年 122-133

作用素多項式の factorization

北大 応電研　　高橋 勝利

作用素値関数の factorization は解析学およびその応用の多くの分野で現われる。Wiener－Hopf 積分作用素に対して，その symbol の spectral factorization は逆作用素の存在を保証すると共にその逆作用素の explicit な表現を与える。また system 理論においては，system の transfer function の (minimal) factorization は部分 system の合成に対応する。

ここでは，Gohberg－Lancaster－Rodman の作用素多項式の factorization についての結果を紹介する。

1. 作用素多項式の標準形

$\mathcal{X}$: Banach space ，$\mathcal{L}(\mathcal{X})$: $\mathcal{X}$ 上の有界線形作用素全体とする。 $L(\lambda)$ を monic operator polynomial (m. o. p.) i.e. 次の形の関数とする；

$$L(\lambda) = I\lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j , \qquad A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \quad (j=1,\cdots,\ell-1)$$

I は $\mathcal{X}$ 上の恒等作用素

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell})$ （$\mathcal{X}^{\ell} = \mathcal{X} \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}$ ℓ 個の直和）とする。

Tは次を満たすとき，$L(\lambda)$のlinearizationという；

$$L(\lambda)\oplus I_{\ell-1} = E(\lambda)\,(\lambda-T)\,F(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}$$ （$I_{\ell-1}$は$\mathcal{X}^{\ell-1}$上の恒等作用素）

ここで，$E(\lambda)$，$F(\lambda)$は$\forall\lambda\in\mathbb{C}$でinvertibleな値をとるoperator polynomialで，さらに$E(\lambda)^{-1}$，$F(\lambda)^{-1}$もoperator polynomialである

Tが$L(\lambda)$のlinearizationならば，

$$\sigma(T)=\sigma(L)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ L(\lambda)\ \text{not invertible}\}.$$

次の様にして定義されるoperator $C_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$は$L(\lambda)$のlinearizationである；

$$C_1=\begin{vmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & I & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & & -A_{\ell-1}\end{vmatrix}$$ ，$L(\lambda)$のfirst companion operatorという。

実際，

$$E(\lambda)=\begin{vmatrix} B_{\ell-1}(\lambda) & B_{\ell-2}(\lambda) & \cdots & & B_0(\lambda) \\ -I & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -I & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -I & 0\end{vmatrix}$$ ， $B_0(\lambda)=I$，

$B_{i+1}(\lambda)=\lambda B_i(\lambda)+A_{\ell-i-1}$ （$i=0,1,\cdots,\ell-2$）

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda I & I & 0 & \vdots \\ \lambda^2 I & \lambda I & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \lambda^{\ell-1} I & \lambda^{\ell-2} I & \cdots\ \lambda I & I\end{vmatrix}$$

とすれば $E(\lambda)$，$F(\lambda)$，$E(\lambda)^{-1}$，$F(\lambda)^{-1}$はoperator polynomialで，

$$L(\lambda)\oplus I_{\ell-1}=E(\lambda)\,(\lambda-C_1)\,F(\lambda)\qquad \lambda\in\mathbb{C}.$$

$X\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell,\mathcal{X})$，$T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$が次の条件(a)，(b)を満たすとき，$L(\lambda)$のright standard pairという；

(a) $Q(X,T) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$ は invertible, (b) $\sum_{j=0}^{\ell-1} A_j X T^j + XT^\ell = 0.$

standard pair (X,T) に対し,

(c) $\quad XT^i Y = \begin{cases} 0 & , i = 0,1,\cdots,\ell-2 \\ I & , i = \ell-1 \end{cases}$

なる operator $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\ell)$ が一意的に定まる。実際,

$Y = Q(X,T)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}_\ell$. (X,T,Y) を $L(\lambda)$ の standard triple という。

$X = (I, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell, \mathcal{X})$, $T = C_1$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\ell)$

は $L(\lambda)$ の standard triple である。(X,T,Y) が standard triple for L であるとき, triple (X_1, T_1, Y_1) が次の意味で (X,T,Y) に similar ; $\exists M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$ invertible s.t. $X_1 = XM$, $T_1 = M^{-1}TM$, $Y_1 = M^{-1}Y$, ならば, 明らかに (X_1, T_1, Y_1) も standard triple. 逆に (X_1, T_1, Y_1) が standard triple なら, $M = Q(X,T)^{-1} Q(X_1, T_1)$ とおくと, (X_1, T_1, Y_1) が (X,T,Y) に similar (上の意味で) なことがわかる。

(X,T,Y) が standard triple for $L(\lambda)$ のとき, pair (T,Y) を left standard pair for $L(\lambda)$ という。left standard pair は次で特徴づけられる:

(a)′ $R(T,Y) \stackrel{\text{def}}{=} (Y, TY, \cdots, T^{\ell-1}Y) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$ invertible

(b)′ $\sum_{j=0}^{\ell-1} T^j Y A_j + T^\ell Y = 0$.

[定理 1.1] (X,T,Y) を standard triple for $L(\lambda)$ とする。

このとき，

(i) $L(\lambda) = I\cdot\lambda^{\ell} - XT^{\ell}(V_1 + V_2\lambda + \cdots + V_{\ell}\lambda^{\ell-1})$,

ここで，$(V_1, \cdots, V_{\ell}) = Q(X,T)^{-1}$, $V_i \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{\ell})$

(ii) $L(\lambda) = I\cdot\lambda^{\ell} - (Z_1 + Z_2\lambda + \cdots + Z_{\ell}\lambda^{\ell-1})T^{\ell}Y$,

ここで，$\begin{vmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{\ell} \end{vmatrix} = R(T,Y)^{-1}$, $Z_i \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell}, \mathcal{X})$

証明．(i)：$C_1 = Q(X,T)\,T\,Q(X,T)^{-1}$ が成り立つことから，

$-A_i = XT^{\ell}V_{i+1}$, $i = 0, 1, \cdots, \ell-1$.

(ii)：$R(T,Y)\begin{vmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{\ell-1} \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{\ell-1} T^j Y A_j = -T^{\ell}Y$ （standard pairの条件(b)'より）

∴ $A_i = -Z_{i+1}T^{\ell}Y$ 」

定理における(i)の表現をL(λ)の right standard form という。
(ii) (left)

定理1.1の逆が成り立つ。

[定理1.2] (i) $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell}, \mathcal{X})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell})$ に対して，

$Q(X,T)$ が invertible ならば，(X,T) は

$L(\lambda) = I\cdot\lambda^{\ell} - XT^{\ell}(V_1 + V_2\lambda + \cdots + V_{\ell}\lambda^{\ell-1})$, $(V_1, \cdots, V_{\ell}) = Q(X,T)^{-1}$

の right standard pair である。((X,T,V_{ℓ}) は standard triple).

(ii) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell})$, $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{\ell})$ に対して，$R(T,Y)$ が invertible

ならば，(T,Y) は

$L(\lambda) = I\cdot\lambda^{\ell} - (Z_1 + Z_2\lambda + \cdots + Z_{\ell}\lambda^{\ell-1})T^{\ell}Y$, $\begin{vmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{\ell} \end{vmatrix} = R(T,Y)^{-1}$

の left standard pair である。((Z_ℓ, T, Y) は standard triple)。

証明は明らか。

[定理 1.3.] (X, T, Y) standard triple for $L(\lambda)$ ならば、

$$L(\lambda)^{-1} = X(\lambda - T)^{-1} Y, \quad \lambda \notin \sigma(L) (= \sigma(T))$$

証明. $L(\lambda)$ の first companion operator C_1 は $L(\lambda)$ の linearization であった;

$$L(\lambda) \oplus I_{\ell-1} = E(\lambda)(\lambda - C_1) F(\lambda)$$

$$\therefore \ L(\lambda)^{-1} = (F(\lambda)^{-1} \text{の第1行}) \times (\lambda - C_1)^{-1} \times (E(\lambda)^{-1} \text{の第1列})$$
$$= (I, 0, \cdots, 0)(\lambda - C_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \qquad \lambda \notin \sigma(L)$$

$(I, 0, \cdots, 0)$, C_1, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}$ は standard triple for $L(\lambda)$ 故に、(X, T, Y) に similar.

$$\therefore \ L(\lambda)^{-1} = X(\lambda - T)^{-1} Y \qquad \lambda \notin \sigma(L)$$

」

2. multiplication と division

[定理 2.1.] L_1, L_2 : monic operator polynomial (m.o.p. と書く)

(X_1, T_1, Y_1), (X_2, T_2, Y_2) はそれぞれ L_1, L_2 の standard triple とする。

もし $L(\lambda) = L_2(\lambda) L_1(\lambda)$ ならば、

(a) $L^{-1}(\lambda) = X(\lambda - T)^{-1} Y$,

ここで、

$$X = (X_1, 0), \quad T = \begin{vmatrix} T_1 & Y_1 X_2 \\ 0 & T_2 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

(b) (X, T, Y) は standard triple for $L(\lambda)$.

証明. (a) $(\lambda - T)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - T_1)^{-1} & (\lambda - T_1)^{-1} Y_1 X_2 (\lambda - T_2)^{-1} \\ 0 & (\lambda - T_2)^{-1} \end{pmatrix}$

$$\therefore \ X(\lambda - T)^{-1} Y = X_1 (\lambda - T_1)^{-1} Y_1 X_2 (\lambda - T_2)^{-1} Y_2 = L_1(\lambda)^{-1} L_2(\lambda)^{-1} = L(\lambda)^{-1},$$

(b):先ず $Q(X,T)$ が invertible なることを示す。$L_1(\lambda), L_2(\lambda)$ の次数をそれぞれ k_1, k_2 とする。そして $k_1+k_2=\ell$ とする。

$$T^i = \begin{vmatrix} T_1^i & \sum_{j=0}^{i-1} T_1^j Y_1 X_2 T_2^{i+1-j} \\ 0 & T_2^i \end{vmatrix} \qquad i=1,2,\cdots$$

$$Q(X,T) = \begin{vmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{\ell-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 0 \\ X_1T_1 & (X_1Y_1)X_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_1T_1^{\ell-1} & \sum_{j=0}^{\ell-2}(X_1T_1^jY_1)X_2T_2^{\ell-2-j} \end{vmatrix}$$

standard triple の条件(c)より，$X_1T_1^jY_1 = \begin{cases} 0, & j=0,1,\cdots,k_1-2 \\ I, & j=k_1-1 \end{cases}$

$$\therefore\ Q(X,T) = \left|\begin{array}{c:c} X_1 & 0 \\ X_1T_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ X_1T_1^{k_1-1} & 0 \\ \hdashline X_1T_1^{k_1} & X_2 \\ X_1T_1^{k_1+1} & \sum_{i=0}^{1}(X_1T_1^{i+k_1-1}Y_1)X_2T_2^{1-i} \\ \vdots & \vdots \\ X_1T_1^{\ell-1} & \sum_{i=0}^{k_2-1}(X_1T_1^{i+k_1-1}Y_1)X_2T_2^{k_2-1-i} \end{array}\right|$$

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_1T_1 \\ \vdots \\ X_1T_1^{k_1-1} \end{vmatrix} = Q(X_1,T_1) \quad \text{invertible}$$

$$\begin{vmatrix} X_2 \\ \sum_{i=0}^{1}(X_1T_1^{i+k_1-1}Y_1)X_2T_2^{1-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{k_2-1}(X_1T_1^{i+k_1-1}Y_1)X_2T_2^{k_2-1-i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_1T_1^{k_1}Y_1 & I & 0 & \cdots & 0 \\ X_1T_1^{k_1+1}Y_1 & X_1T_1^{k_1}Y_1 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ X_1T_1^{\ell-2}Y_1 & X_1T_1^{\ell-3}Y_1 & \cdots & X_1T_1^{k_1}Y_1 & I \end{vmatrix} \cdot Q(X_2,T_2)$$

は invertible.

$\therefore$ $Q(X,T)$ も invertible。

$\Gamma = \{|z|=\rho\}$ 十分大：Γの内部 $\supseteq \sigma(L)$ をとる。

$L(\lambda) = I\cdot\lambda^\ell + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j\lambda^j$ とする。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^j L^{-1}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{j-\ell}(I+A_{\ell-1}\lambda^{-1}+\cdots+A_0\lambda^{-\ell})^{-1}d\lambda$$

$$= \begin{cases} 0 & j=0,1,\cdots,\ell-2 \\ I & j=\ell-1 \end{cases}$$

一方，$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{j}(\lambda-T)^{-1}d\lambda = T^{j}$ ，$j=0,1,2,\cdots$ ．従って，定理の(a)より，

$$XT^{j}Y=\begin{cases}0 & j=0,1,2,\cdots,\ell-2\\ I & j=\ell-1\end{cases}.$$

最後に，(X,T) が standard pair の条件(b)を満たすことを示す。$k=0,1,2,\cdots$ に対し，

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{k}L(\lambda)L(\lambda)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{k}L(\lambda)X(\lambda-T)^{-1}Y\,d\lambda$$
$$=(XT^{\ell}+\textstyle\sum_{j=0}^{\ell-1}A_jXT^{j})T^{k}Y,$$

$R(T,Y)$ は invertible であるから，$XT^{\ell}+\sum_{j=0}^{\ell-1}A_jXT^{j}=0$ ．」

［定理 2.2.］ $L(\lambda)$ を次数 ℓ の m.o.p.，(X,T,Y) をその standard triple とする。もし T-invariant subspace $\mathcal{L}$ が存在して，$Q_k(X,T)|\mathcal{L}:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{X}^{k}$ が invertible ならば，次が成立する。ここで，$Q_k(X,T)\overset{def}{=}\begin{vmatrix}X\\XT\\ \vdots\\XT^{k-1}\end{vmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell},\mathcal{X}^{k})$．

(i) $\mathcal{X}^{\ell}=\mathcal{L}\oplus \mathrm{Im}\,R_{\ell-k}(T,Y)$，ここで，$R_{\ell-k}(T,Y)\overset{def.}{=}$
$=(Y,TY,\cdots,T^{\ell-k-1}Y)\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^{\ell-k},\mathcal{X}^{\ell})$．

(ii) $L(\lambda)=L_2(\lambda)L_1(\lambda)$，

$L_1(\lambda)$ は right standard pair $\tilde{X}_1=(X|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1}$
$\tilde{T}_1=(Q_k(X,T)|\mathcal{L})(T|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1}$

をもち，$L_2(\lambda)$ は left standard pair

$\tilde{T}_2=R_{\ell-k}^{-1}(T,Y)(PT|\mathrm{Im}\,R_{\ell-k}(T,Y))R_{\ell-k}(T,Y)$，$\tilde{Y}_2=R_{\ell-k}^{-1}(T,Y)(PY)$

をもつ m.o.p. である。ここで，$R_{\ell-k}^{-1}(T,Y)$ は $R_{\ell-k}(T,Y)$ の

left inverse, P は $\mathcal{X}^l$ の $\mathcal{L}$ に沿っての $\mathrm{Im}\, R_{l-k}(T,Y)$ への projection である。

証明. (i) $Q_k(X,T)|\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \mathcal{X}^k$ invertible より,
$\mathcal{X}^l = \mathcal{L} \oplus \mathrm{Ker}\, Q_k(X,T)$. 従って, $\mathrm{Ker}\, Q_k(X,T) = \mathrm{Im}\, R_{l-k}(T,Y)$ を示せばよい。それは standard triple の条件(c)より従う。

(ii) $Q(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1) = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_1\tilde{T}_1^{k-1} \end{pmatrix} = (Q_k(X,T)|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1} = I_{\mathcal{X}^k}$

$R(\tilde{T}_2, \tilde{Y}_2) = I_{\mathcal{X}^{l-k}}$.

定理 1.2. より, standard triple $(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1, E_k)$ をもつ k 次の m.o.p. $L_1(\lambda)$ と, standard triple $(F_{l-k}, \tilde{T}_2, \tilde{Y}_2)$ をもつ $(l-k)$ 次 m.o.p. $L_2(\lambda)$ が存在する。ここで, $E_k = Q(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}_{(k}$,

$$F_{l-k} = (0 \cdots 0 \overset{l-k}{I})\, R(\tilde{T}_2, \tilde{Y}_2)^{-1} = (0 \cdots 0 \overset{l-k}{I}).$$

定理 2.1. より,

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_1, 0), \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & E_k F_{l-k} \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_2 \end{pmatrix}$$

は $L_2(\lambda) L_1(\lambda)$ の standard triple である。$L(\lambda) = L_2(\lambda) L_1(\lambda)$ を示すためには $(\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y})$ と (X, T, Y) が similar であることを示せばよい。(定理 1.1. より)。 $\mathcal{X}^l = \mathcal{L} \oplus \mathrm{Im}\, R_{l-k}(T,Y)$ に関して, X, T, Y は次のように表現される; $X = (X_1, 0)$ ($\because \mathrm{Im}\, R_{l-k}(T,Y) = \mathrm{Ker}\, Q_k(X,T) \subseteq \mathrm{Ker}\, X$), $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$.

従って, 分解 $\mathcal{X}^l = \mathcal{X}^k \oplus \mathcal{X}^{l-k} = \mathcal{L} \oplus \mathrm{Im}\, R_{l-k}(T,Y)$ に関して,

$M \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} (Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1} & 0 \\ 0 & R_{l-k}(T,Y) \end{pmatrix}$ とすれば, $\tilde{X} = XM$,

$\tilde{T} = M^{-1}TM$, $\tilde{Y} = M^{-1}Y$ となることがわかる。 」

上の定理で、ある条件を満足する T-invariant subspace から $L(\lambda)$ の right divisor を得ることができたが、実際すべての L の right divisor はこの方法で得られる。

[定理 2.3] $L(\lambda)$：次数 ℓ の m.o.p. , (X,T,Y) をその standard triple , $L_1(\lambda)$：次数 k の $L(\lambda)$ の monic right divisor とする。そのとき、次を満たす T-invariant subspace $\mathcal{L}$ が一意的に存在する： $Q_k(X,T)|\mathcal{L} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{X}^k$ は invertible かつ,

$$(X|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1},\ (Q_k(X,T)|\mathcal{L})(T|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1}$$

は $L_1(\lambda)$ の right standard pair である。

証明. $L(\lambda)=L_2(\lambda)L_1(\lambda)$, L_1, L_2 の standard triple の1つを、それぞれ (X_1,T_1,Y_1) , (X_2,T_2,Y_2) とする。定理 2.1. より、

$$\tilde{X}=(X_1,0)\ ,\quad \tilde{T}=\begin{pmatrix} T_1 & Y_1X_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}\ ,\quad \tilde{Y}=\begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

は $L(\lambda)$ の standard triple である。(X,T,Y) はまた $L(\lambda)$ の standard triple であるから、ある invertible な operator $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$ が存在して、$\tilde{X}=XM$, $\tilde{T}=M^{-1}TM$, $\tilde{Y}=M^{-1}Y$.

$\mathcal{L} \overset{def}{=} M(\mathcal{X}^k \oplus \{0\})$ は T-invariant で、

$$Q_k(X,T)|\mathcal{L} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1T_1 \\ \vdots \\ X_1T_1^{k-1} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}|\mathcal{L}$$

より、$Q_k(X,T)|\mathcal{L}$ は invertible.

また、$(X|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1} = X_1 \cdot Q(X_1,T_1)^{-1}$

$$(Q_k(X,T)|\mathcal{L})(T|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1} = Q(X_1,T_1)\,T_1\,Q(X_1,T_1)^{-1}$$

より、pair $\left((X|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1},\ (Q_k(X,T)|\mathcal{L})(T|\mathcal{L})(Q_k(X,T)|\mathcal{L})^{-1}\right)$ は

L_1 の standard pair (X_1, T_1) に similar であるから，それらはまた right standard pair for L_1 である。$\mathcal{L}$ の一意性は，L_1 の right standard pair (X_1, T_1) をとるとき，

$$\mathcal{L} = \mathrm{Im}\left[Q(X,T)^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{\ell-1} \end{pmatrix} \right]$$

を示すことにより証明される。」

3. Spectral divisors

$L(\lambda)$: m.o.p.，Γ を $\Gamma \cap \sigma(L) = \phi$ なる Cauchy contour とする。$L(\lambda)$ の right (left) divisor $L_1(\lambda)$ は次を満たすとき，Γ-spectral right (left) divisor と呼ばれる；

$\sigma(L_1) \subseteq \Gamma$ の内部，$\sigma(L \cdot L_1^{-1}) \subseteq \Gamma$ の外部
$(\sigma(L_1^{-1} L) \subseteq \Gamma$ の外部$)$

[定理 3.1] $L(\lambda)$: $\overbrace{\text{m.o.p.}}^{\ell次}$，$(X, T, Y)$ は $L(\lambda)$ の standard triple，$L_1(\lambda)$: $\overbrace{\Gamma}^{k次}$-spectral right divisor of $L(\lambda)$ $(\Gamma \cap \sigma(L) = \phi)$ もし $\mathcal{L}$ が $L_1(\lambda)$ に対応する T-invariant subspace とする（定理 2.3）ならば，$\mathcal{L} = \mathrm{Im}\, P_\Gamma$，ここで，$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} d\lambda$。

証明．定理 2.2，2.3．より

$$T = \begin{vmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{vmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{X}^\ell = \mathcal{L} \oplus \mathrm{Im}\, R_{\ell-k}(T, Y)$$

$$\sigma(T_1) = \sigma(L_1), \quad \sigma(T_2) = \sigma(L_2) \quad (L_2 = L \cdot L_1^{-1})$$

L_1 : Γ-spectral divisor より，$\sigma(T_1) \subseteq \Gamma$ の内部，$\sigma(T_2) \subseteq \Gamma$ の外部

$\therefore\ P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \begin{vmatrix} (\lambda-T_1)^{-1} & (\lambda-T_1)^{-1}T_3(\lambda-T_2)^{-1} \\ 0 & (\lambda-T_2)^{-1} \end{vmatrix} d\lambda = \begin{vmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

$\therefore\ \mathrm{Im}\,P_\Gamma = \mathcal{L}$

┘

[定理 3.2.] $L(\lambda)$：l 次 m.o.p.，(X, T, Y)：$L(\lambda)$ の standard triple,

$$X = (X_1, X_2)\ ,\quad T = \begin{vmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{vmatrix}\ ,\quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

を $\mathfrak{X}^l = \mathrm{Im}\,P_\Gamma \oplus \mathrm{Ker}\,P_\Gamma$ に関する表現とする。ここで，

$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-T)^{-1}d\lambda$.　このとき，

i) $L(\lambda)$ が Γ - spectral right divisor of degree k をもつための必要十分条件は，

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_1T_1 \\ \vdots \\ X_1T_1^{k-1} \end{vmatrix} ;\ \mathrm{Im}\,P_\Gamma \to \mathfrak{X}^k$$

が invertible であることである。

ii) $L(\lambda)$ が Γ - spectral left divisor of degree k をもつためには，$(Y_1, T_1Y_1, \cdots T_1^{k-1}Y_1)$; $\mathfrak{X}^k \longrightarrow \mathrm{Im}\,P_\Gamma$ が invertible であることが必要十分である。

証明．(i) 必要性は定理2.3．と定理 3.1 より従う。十分性：定理 2.2 より，$L(\lambda) = L_2(\lambda)L_1(\lambda)$，$(X_1, T_1)$；right standard pair of L_1，(T_2, X_2)：left standard pair of L_2，とできる。このとき，$\sigma(L_1) = \sigma(T_1) \subseteq \Gamma$ の内部，$\sigma(L_2) = \sigma(T_2) \subseteq \Gamma$ の外部となり，L_1 は L の Γ-spectral right divisor となる。

$//$.

(ii) は次の補題と (i) よりわかる。

[補題 3.3.] (X, T, Y) は ℓ 次 m.o.p. $L(\lambda)$ の standard triple, $P \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^\ell)$: projection s.t. $TP = PTP$. このとき次は同値;

(i) $\begin{pmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{k-1} \end{pmatrix}\Big|_{\mathrm{Im}P} : \mathrm{Im}P \longrightarrow \mathcal{X}^k$ が invertible $(k < \ell)$

(ii) $\mathcal{X}^\ell = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Im}\,(Y, TY, \cdots, T^{\ell-k-1}Y)$

(iii) $(1-P)(Y, TY, \cdots, T^{\ell-k-1}Y) : \mathcal{X}^{\ell-k} \longrightarrow \mathrm{Im}\,(1-P)$ が invertible.

文献

I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman :

1. Spectral analysis of matrix polynomials, I. Canonical forms and divisors, Linear Algebra Appl. 20 (1978), 1-44

2. Spectral analysis of matrix polynomials, II. The resolvent form and spectral divisors, Linear Algebra Appl. 21 (1978), 65-88

3. Representations and divisibility of operator polynomials Canad. J. Math. 30 (1978), 1045-1069