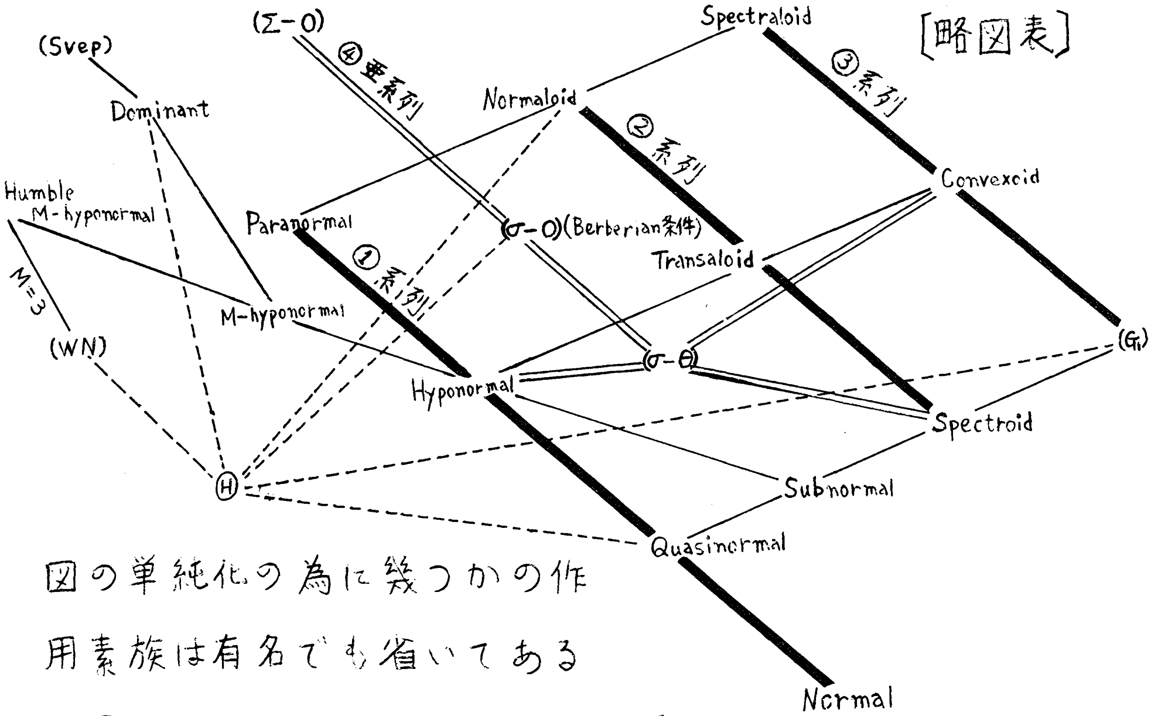
数理解析研究所講究録
399巻 1980年 88-107

Ⓗ作用素族について

桃谷高校　　加藤佳宣

§0. 方針と内容　Ⓗ作用素Tとは複素Hilbert 空間上の(有界線形)作用素でT^*+TとT^*Tが可換であるようなものであ

［略図表］



図の単純化の為に幾つかの作用素族は有名でも省いてある

①：Algebraically definite系列

②：Spectral set系列

③：Growth condition 系列

④：Berberian 条件に関連した系列

る。　この作用素族は5年前にS.L.Campbellにより導入され、その後の作用素論の研究で相当に興味深い性質が発見されてきている。　本稿ではその概略を、最近得た一結果も含め、紹介したい。　Ⓗ作用素族の話題は今後更に急旋回を見せる兆があり、しかも海外研究者の間でも現在までの基本成果の評定にかなりの食い違いが認められるようなので到底、公正なsurveyなどは及ばぬ処である。　そこでむしろ本稿では、大幅に私見を加えて筆者なりの見取り図の提示を試みることにした。　文献の調査不足も手伝い、不徹底な出来上がりになってしまったが、せめてこれをきっかけにⓗ作用素族に関心を持たれる方が多くなればと願っている。

§1．Ⓗ作用素族前史　Ⓗ作用素族の導入は、調べた限りで1975年に文献[2]で行なわれている。　その頃までの、いわゆる非正規作用素の理論についての研究状況は、例えば[10][16]などに詳しい解説が見られる。　取り敢えずここでは、その頃までに非正規な作用素族が大きく三系列に分かれるという図式が固められてきていたことを述べておきたい。その三系列というのは前頁の図にも示したように([14]も参照)

① Algebraically definite 系列

② Spectral set系列

③ Growth condition系列

であり、その他に亜系列としてBerberian condition(後述)を満たす作用素族(σ－0)を含むものが考えられていた。そしてその頃の主な研究テーマというのは「正規作用素で成り立っている種々の性質の成立範囲の見きわめ」ということに集約できるように考えられる。この線に沿いながら種々の非正規な作用素族が開発、研究されてきた訳である。その当時、非常によい性質を示し研究も活発に行なわれたのはhyponormalとconvexoid作用素族周辺のものであったようである。反面、subnormal作用素族は非正規作用素の一般論からは扱いにくく、またquasinormal作用素族は極めて構造のよく判ったものとして、どちらも研究の中心からはやや離れていた。図式的に言えば、normal作用素に近い部分の研究がまだ十分整備されていなかったということである。S.L.Campbellはこの部分に目を向け、quasinormal作用素族とhyponormal作用素族との間に新しく興味深い作用素族を見つけたいと考えたようである。その狙いは結果的に成功したと言えるが、見つかった㈲作用素族は以下に見ていくように、必ずしも彼の思惑通りに振舞うものではなかったのである。

§2. Ⓗ作用素の発見　発見当時のCampbellの問題意識は、どうやら不変部分空間問題の解けるようなうまく制限された作用素族を見つけることにあったらしい。　つまり正規性の概念をうまく一般化していき、不変部分空間予想の成立する範囲をじわじわと広げて、ひとまずhyponormal作用素族にまで至ろう、というのがもくろみであったように見える。　ここでもう少し臆測を許して頂くと、図でhyponormalのすぐ下にはsubnormalがあり、更にその下にquasinormal, normalと続いている。　ここでsubnormalは扱いにくいので除外するとすれば、hyponormalとnormalとの間で残るのはquasinormalしかない。　しかしquasinormal作用素族についての不変部分空間問題は殆んど自明に近い話である。　そこで何とかこのquasinormal作用素族をもう少し広げられないかということになってくる。　この拡張を試みる一つの自然な方法はhyponormal作用素族と比較することである。　勿論以上の考え方の他にも、例えばhyponormal性の条件を少し強めてみるという方法も可能である。　実はCampbellはⒽ作用素族導入の少し前にその方法も試みていて別の作用素族も得ているがこの話題については割愛したい。　さて、或る特定の作用素族が或る演算操作に関して閉じているかど

うかというのは重要な作用素論のテーマの一つである。例えばhyponormal作用素族がscalar倍とscalar和に対して閉じていても*演算に関して閉じていないということが、seminormal作用素族導入の一動機となっている。一方、quasinormal作用素族では、実はscalar倍について閉じてはいてもscalar和でも*演算でも閉じていない。real scalar和でさえ閉じていない実例としてsimple unilateral shift Sを挙げることが出来る。この場合Sはquasinormalであるが$S+1$は$[(S+1)^*(S+1), (S+1)] = 1-SS^* \neq 0$からquasinormalとはならない。これは案外に狭い作用素族なのである。しかし、計算してみると作用素Tが

(*)　$T = A + B$　A: quasinormal　$B = B^*$　$A \backsim B$ (可換)

の形のときでも、Tは$[T^*T, T^* + T] = 0$は満たされていると判る。これがⒽ作用素族の条件である。実はこのⒽ作用素族はやはり*演算については閉じていないが、real scalar倍とreal scalar和について閉じているので十分自然な概念と考えられる。初めCampbellはⒽ作用素Tはすべて(*)の形になると予想していた。(*)の形であれば$[T] = [A] \geq 0$からhyponormalとなる訳で更に都合がいい。残念ながらこの予想はのちに否定される。(§4参照) 彼はこの論文[2]では、不変部分空間問題に関連させてoperator valued inner functionの考察を行ない、特に次の関数、($\|T\|<1$, $|w|<1$)

$$V(w)=(1-T^*T)^{-1/2}(w-T^*)(1-wT)^{-1}(w-T)(1-wT^*)(1-T^*T)^{1/2}$$

がscalar値となるTの十分条件として$T\in$Ⓗを提示している。　その真意はともかく、以後の彼の論文ではⒽ作用素族について$V(w)$との関連を論じたものは姿を消している。そして、このような形で言わば暫定的に導入されたⒽ作用素族に思いがけず深い性質が発見されて新しい発展が始まる訳である。

§3. Ⓗ作用素族研究の基礎技術　その次に出た論文は[1]である。　この論文のテーマは先の(*)についての予想の考察であるが、それと同値な(予想)命題を提示するだけに終わっている。　しかし、この論文が重要なのはⒽ作用素Tに対して(λ: scalar)

$$B_T(\lambda)=(\lambda-T^*)(\lambda-T)=\lambda^2-\lambda(T^*+T)+T^*T$$

という関数が導入されたことにある。　この一風変わった関数は以後の研究に本質的な役割を果たすことになる。Campbell自身によるこの応用の一例を見てみよう。

命題1. $T\in$Ⓗ, $Tx=\lambda x \Longrightarrow T^*x=\lambda^* x$

略証. $\lambda\neq\lambda^*$かつT: 1-1としてよい。　$Tx=\lambda x$より$[T]x=(\lambda-T)T^*x$、そして$T\in$Ⓗより$T^*[T]=[T]T$であることか

ら、$B_T(\lambda)T^*x=(\lambda-T^*)[T]x=[T](\lambda-T)x=0$となる。ここで$T\in$ Ⓗ より$B_T(\lambda)$はnormalとなるので、$B_T(\lambda^*)T^*x$ $=B_T(\lambda)^*T^*x=0$が判り、そして$0=B_T(\lambda^*)T^*\lambda x=B_T(\lambda^*)T^*Tx$ $=T^*T\,B_T(\lambda^*)x$が言える。 Tが1-1から$B_T(\lambda^*)x=0$、そこで$0=B_T(\lambda^*)x=(\lambda-\lambda^*)(\lambda^*-T^*)x$ が示せたが、$\lambda\neq\lambda^*$より証明が終わった。

この命題そのものはそれ程深みのある内容には感じられないが、それでも証明はこれだけかかってしまう。 しかも論証の進め方も何となく異質である。

実は、この命題は一番最後に述べることになる或る事実の一部になっているのだが、その事実の証明には更に以下の論文で展開される Ⓗ 作用素族特有の結果と手法が必要である。

そて、次の[5]でも、まだ Ⓗ 作用素が一般にhyponormalでないことは知られていない。 それは更に次の論文になる。

[5]では Ⓗ 性からhyponormal性にどの程度迫れるかがテーマである。 この中で彼らが発見した最も注目すべき事実というのは次のものと考えられる。

定理2. $4T^*T-(T^*+T)^2\geq 0$ ($T\in$ Ⓗ)

これは Ⓗ のhyponormal性を導こうと試みているうち偶然に得られたものかもしれないが、これが Ⓗ 作用素族に対して更

に独特の研究方法を与えることになる。 この事情をはっきりさせる為に、[13]でexplicit に導入したCampbell同値性 $\overset{\text{Ⓗ}}{\sim}$ の概念を述べる。 作用素S, Tに対して

$$S \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} T \leftrightharpoons \mathrm{Re}\, S = \mathrm{Re}\, T, \ |S| = |T|$$

これも一風変わった感じの同値関係である。 この同値関係もreal scalar 倍とreal scalar 和で保存される。 更に幾つかの性質を挙げてみよう。

命題3. $N \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} N^* \Longleftrightarrow N$: normal (自明)

定理4. $B = B^*$, $A \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} B \Longrightarrow A = B$

略証. $A = B + \mathrm{Im}\, A$ とデカルト分解すれば $B^2 = A^*A = B^2 - i[\mathrm{Im}\, A, B] + (\mathrm{Im}\, A)^2$ だから、$[\mathrm{Im}\, A, B] = (\mathrm{Im}\, A)^2$ となり、Kleinecke-Shirokov の定理から $(\mathrm{Im}\, A)^2$ が quasinilpotent となって $\mathrm{Im}\, A = 0$ が示せる。 すなわち $A = B + \mathrm{Im}\, A = B$

定理5. $T \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} U$: unitary $\Longleftrightarrow T$: isometry

略証. $\Longrightarrow$:はよい。 $\Longleftarrow$:は $U = \mathrm{Re}\, T + i\sqrt{1-(\mathrm{Re}\, T)^2}$ と置けばよい。

次の定理は[15]で初めて指摘された。

定理6. N : normaloid($\leftrightharpoons \|T\| = r(T)$) $T \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} N \Longrightarrow T$: normaloid

これは次の補題から判る。

補題7. $S \overset{\text{Ⓗ}}{\sim} T \Longrightarrow \|S\| = \|T\|$, $r(S) = r(T)$

($w(S) = w(T)$ となるかどうかはまだ知られていないようである)

略証．前半はよい。　後半は、∂を境界、$\hat{\sigma}(T)$を$\{\lambda;\ B_T(\lambda)$が非可逆$\}$としたとき、$\partial\sigma(S)\subset\hat{\sigma}(T)\subset\sigma(S)\cup\sigma(S^*)$ を示せば済む。　この前半の包含関係は $\lambda\in\partial\sigma(S)$ が approximate point spectrum となっていることから $\|(\lambda-S)x_n\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ となる $\|x_n\|=1$ を取ることで、$\|B_T(\lambda)x_n\|\leqq\|\lambda-S^*\|\,\|(\lambda-S)x_n\|\longrightarrow 0$ と出来ると注意すれば判る。　後半も $B_T(\lambda)=\lambda^2-(T^*+T)\lambda+T^*T=(\lambda-S^*)(\lambda-S)$ であることに注意してみればよい。

補題7からは次のことも得られる。

命題8．Q : quasinilpotent　$T\overset{Ⓗ}{\sim}Q\Longrightarrow T$: quasinilpotent

これに関連して直接計算で、

命題9．$Q^2=0$，$T\overset{Ⓗ}{\sim}Q\Longrightarrow T=Q$

命題8と9は[11]にある。　また、次の事実は文献には載っていないが、idempotent $(J^2=J)$ が $\begin{pmatrix}1&A\\0&0\end{pmatrix}$ の形に(適当な基底の取り方で)表せることに注意すれば容易である。

命題10．$J^2=J$，$T\overset{Ⓗ}{\sim}J\Longrightarrow T=J$

このような文脈の中で、彼らの発見した定理2の結果が次のように意味づけられる。

定理11．$T\overset{Ⓗ}{\sim}N$: normal $\Longleftrightarrow T\in$ Ⓗ

略証．$\Longrightarrow$：は明らか。　$\Longleftarrow$：は、$T\in$ Ⓗ ならば定理2より $N=\dfrac{T^*+T+i\sqrt{4T^*T-(T^*+T)^2}}{2}$ と置けて、この N が求める normal と判る。

勿論、定理11から直ちに定理2が出せるから両者は同値な命題である。　この定理11に定理5を組み合わせると

定理12.　$T \in Ⓗ \Longrightarrow T$: normaloid

が得られる。　このように、Ⓗ作用素Tの性質の解明に定理11でのnormal Nの考察が、Campbell 同値を経由して積極的に利用できることになる。　これは命題1の段階では思いもよらなかった展開である。

しかしながら定理11や2の成立する根拠というものはもう一つはっきりしない。　現在知られている証明は技術的にうますぎて感覚がついて行けない気がする。　そこで証明は略すことにし、代わりに一つのSpeculationのようなものを述べてみたい。　そのSpeculationの出発点はⒽ作用素がhyponormal作用素と奇妙に似た振舞いをするというところにある。　hyponormal作用素については最近、構造の完全決定が成され、[6]に発表されているがそこで重要な役割を演じた道具の一つに$(A=A^*)$

$$S_A^{\pm}(T) = \text{strong-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itA}Te^{-itA}$$

という作用素がある。　これは常に存在する訳ではないが存在するときには $A \backsim S_A^{\pm}(T)$ となる。　$A = \mathrm{Re}\,T$のときには従って $S_A^{\pm}(T) = A + iS_A^{\pm}(\mathrm{Im}\,T)$ はnormalとなるが、実際hyponormal Tについてはこれが成立している。　そてT∈Ⓗ

に対しては $A = \mathrm{Re}\,T$ として

$$(e^{itA}Te^{-itA})^* + (e^{itA}Te^{-itA}) = e^{itA}(T^*+T)e^{-itA} = T^*+T$$
$$(e^{itA}Te^{-itA})^*(e^{itA}Te^{-itA}) = e^{itA}(T^*T)e^{-itA} = T^*T$$

から、$T \overset{Ⓗ}{\sim} e^{itA}Te^{-itA}$ が判る。ここで右辺を $t \to \pm\infty$ としてみる。hyponormal作用素からの類推で、$T \overset{Ⓗ}{\sim} S_A^{\pm}(T)$ が成り立ってもよさそうである。このとき $S_A^{\pm}(T)$ はnormalであるから定理11が直ちに得られることになる。かなり粗雑な議論であるが、せめて $S_A^{\pm}(T)$ の片方だけの存在でも自然な論法で示せるなら、この筋書きが遂行できるかもしれない。勿論、$S_A^{\pm}(T)$ の存在が示されたとすれば、これを利用してhyponormalの議論に並行させて、Ⓗ作用素の構造の決定を行なう見込みも生まれてくる。そうなれば、最終的にⒽ作用素とhyponormal作用素との奇妙な類似性の根拠も明らかになることだろう。

§4．Hyponormal性との関連　実は既に、或る種のⒽ作用素についてはその構造の完全決定が(hyponormal の場合とは全く異なった形で)行なわれている。それは次の文献[4]にある。[4]ではまず、$\sigma(T) \cap \mathbb{R}$(実数)$= \phi$ であるⒽ作用素 T の構造決定が成され、その応用として懸案だったhyponormalではないⒽ作用素の実例が作られている。今、$T \in$ Ⓗを、

$\sigma(T)\cap\mathbb{R}=\phi$であるようなものとする。　そのようなTであれば$\sigma(T)$は$\mathbb{R}$で分割(片方は空かもしれないが)されるからその上半開平面内で$\sigma(T)$を囲むようにJordan曲線Γを取り$J=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-T)^{-1}d\lambda$と置けばidempotent Jが得られる。更に定理11のNを取ってやれば、

定理13．このようなJとNは次を満たす

(0)　$T=NJ+N^*(1-J)$

(i)　$JN^*(1-J)=0$

(ii)　$(1-J)NJ=0$

(iii)　$J^*(N-N^*)(1-J)=0$

しかも逆に、

定理14．　idempotent J，normal Nが定理13(i)－(iii)の条件を満たしていれば、$T=NJ+N^*(1-J)$は$T\in$Ⓗとなる

これに関連して、実は次の事実も示されている。

定理15．Nがnormalで$\sigma(N)$が上半開平面に含まれるものとし$\mathfrak{M}_1$をNの不変部分空間、$\mathfrak{M}_2=(N-N^*)\mathfrak{M}_1^\perp$、Jを$\mathfrak{M}_1$上への$\mathfrak{M}_2$に沿うidenpotentとすればNとJは定理13(i)－(iii)の条件を満たす

これで$\sigma(T)\cap\mathbb{R}=\phi$であるような$T\in$Ⓗの構造決定ができた。　そしてこのようなTについては、

定理16．$\sigma(T)\cap\mathbb{R}=\phi$である$T\in$Ⓗがnormalでなければ

hyponormalでもない

こうしていよいよ懸案となっていたhyponormalでないⒽ作用素の例が得られる。

実例17. Hilbert空間をHardy空間H^2とみて、$\mathbb{T}$が単位円周、Nを$L^2(\mathbb{T})$上の作用素で$Nf(\theta)=(e^{i\theta}+2i)f(\theta)$と置く。$J$は$H^2$上への$(2+\sin\theta)^{-1}H^{2\perp}$（⊥は直交補空間）に沿うidempotentとし$T=NJ+N^*(1-J)$と置けば、$T$が求めるものである。

これでⒽ作用素が一般にhyponormal性を持ち得ないことが判った。しかし既に定理12で見たようにhyponormal性を弱めたnormaloid性は持っている訳である。[4]では更に次の事実を示している。

定理18. $T\in$ Ⓗ $\Longrightarrow T\in(G_1)$ すなわち、$\|(\lambda-T)^{-1}\|\leqq dist(\lambda,\sigma(T))^{-1}$

それでは例えばⒽ作用素がparanormal性を持つかどうかということも問題になってくる。$\sigma(T)\cap\mathbb{R}=\phi$である$T\in$ Ⓗについて調査して見当がつけられればかなりはっきりする筈であるが、残念ながら定理15や実例17でのJの与え方は余り計算し易い形ではないようである。もう少しこのJの形が、2×2行列表示などで具体的に出来るなら反例の発見が相当楽になると思われる。

[4]ではまた、$T\in$ Ⓗがhyponormalであっても(*)の形ではないという実例を示している。そのほかに興味深い結果も述

べられているが、やや散発的と見えるので略すことにしたい。

[3]では更に次の結果が示されている。

定理19. T ∈ Ⓗ が hyponormal $\Longrightarrow$ T : subnormal

これには大変な証明が必要で、非有界擬逆作用素などが使われる。　そして証明の同じ文脈で次も示されている。

定理20. T, T^* ∈ Ⓗ $\Longrightarrow$ T : normal

これはⒽ作用素族の代わりにhyponormal作用素族の話であれば自明な結果にあたるが、この場合はこれ程難解な定理となる。　しかし、それにもかかわらずともかくも、hyponormal作用素族と並行した結果が成立しているというのが特に定理19の結果と併せて考えてみるとき、相当に意味深長と思える。

なお、Campbellには他にもⒽ作用素族に触れた論文があるが、本稿ではその性格上省略することにした。

§5. Ⓗ作用素族の位置づけ　ここでⒽ作用素族の図式上の位置づけを検討してみたい。　まずⒽ作用素族は明らかに

① Algebraically definite 系列

に属する。　反面、定理12からⒽ作用素族はnormaloid性を持つから

② Spectral set 系列

にも属している。 更に定理18から$T \in$ Ⓗは(G_1)となるので

③ Growth condition 系列

ともつながってくる。 ところが実はⒽ作用素族は残りの亜系列とも関わっているのである。

定理21. $T \in$ Ⓗ $\Longrightarrow$ TはBerberian 条件を満たす((σ − 0))

すなわち $\mathrm{Re}\,\sigma(T) = \sigma(\mathrm{Re}\,T)$

これは[13]にある。 こうしてみるとⒽ作用素族は全部の系列に加わっている訳で、これまでの図式ではうまく分類し切れない。 そうすると、Ⓗ作用素族を位置づけようとすれば、その図式を再検討する必要が生ずる。 [8]はそうした方向を目指した試みのように見える。 この論文では彼らは

$$T \in (WN) \Longleftrightarrow |T|^2 \geq (\mathrm{Re}\,T)^2$$

という新しい作用素族を導入してくる。 (WN)作用素族は定理2から明らかにⒽ作用素族を含むが、同時にhyponormal作用素族も含んでいることが判る。 すなわち彼らはⒽ作用素族とhyponormal作用素の奇妙な並行性の根拠を(WN)のレベルで捉えようと試みているのである。 彼らの指摘した重要な事実として

命題22. (i) T : hyponormal $\Longleftrightarrow |T|^2 \geq (\mathrm{Re}\,T)^2 + (\mathrm{Im}\,T)^2$

(ii) T^*: hyponormal $\Longleftrightarrow |T|^2 \leq (\mathrm{Re}\,T)^2 + (\mathrm{Im}\,T)^2$

定理23. $T = T^* \Longleftrightarrow |T|^2 \leq (\mathrm{Re}\,T)^2$

命題22は計算だけの話だが、定理23はそうではない。 そして前者はⒽ作用素族とhyponormal族との奇妙な関連を暗示しているし、後者は(WN)作用素が"co-selfadjoint"といった性格のものであると表明している。 このことに関連して最近[9]で次が示された。

定理24. $|T| \leq \mathrm{Re}\,T \Longrightarrow T \geq 0$

証明は見かけの簡明さに反して全く簡単ではない。 このような斬新なテーマが発展して行くことで、Ⓗ作用素族を核とした図式の再編成が進んで来るように感じられる。

勿論、Ⓗ作用素族の今後の研究方向がこのような方向だけに限られるべきだとは思えない。 研究を十分に進める為には更に様々の方向を探ってみる必要がある筈である。 そこで最後の章では、その一つの試みとして、Ⓗ作用素族をsingle valued extension property の方向から眺めてみたい。

§6. Single valued extension property((Svep)) ここ数年来、hyponormal作用素族周辺の研究はめざましく、その成果の一つが§3でも触れた通りhyponormal作用素の構造の完全決定である。 そして、hyponormal 作用素で成り立っている種々

の性質の成立範囲の見きわめ、という線に沿いながらM-hyponormalやdominantといった新しい作用素族が導入されてきた。

T : M-hyponormal $\Longleftrightarrow M\|(T-\lambda)x\| \geqq \|(T-\lambda)^*x\|$ $\forall\lambda, \forall x$ (Mはscalar)

T : dominant $\Longleftrightarrow$ $\forall\lambda$に対して$\exists M_\lambda$で$M_\lambda\|(T-\lambda)x\| \geqq \|(T-\lambda)^*x\|$ $\forall x$

また、M-hyponormalの定義でλをreal scalarに弱めたものを、humble M-hyponormalと呼ぶことにする。　このような研究で重要になってくるのがSvep (Single valued extension property)の概念である。　詳細は[6], [17]などを参照して頂きたい。

$T\in$(Svep) $\Longleftrightarrow$ $\forall\mathcal{O}$：複素平面内の開集合に対し、$\mathcal{O}$上の正則なvector値関数fが$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv 0$を満たせば$f\equiv 0$となる

Svepは基本的な概念であり、今回の研究集会でも幾つもの話題の中に出現している。　そうした事情については、それぞれの方の論説を参照して頂きたい。　ここでは蛇足ながら、今回の研究集会では触れられなかった方向の一つとして[7]だけを挙げて置く。　さて、ここでの文脈では、Svepの重要性はdominant作用素が(従ってhyponormal作用素が)Svepを持つことにある。　もしTがSvepを持てば、Tのlocal spectrum $\sigma_f(T)$ (fはvector)をlocal resolvent $f_T(\lambda)=(T-\lambda)^{-1}f$ を最大元解析接続したそのdomainの補集合として

定めることが出来る。　この概念にも様々な応用があるがここではこれを用いて次の(G_1)のlocal versionを定義する。

$$T \in (l.G_1)\ (\textit{local growth condition}) \Longleftrightarrow \|f_T(\lambda)\| \leqq \frac{\|f\|}{dist(\lambda, \sigma_T(f))} \quad {}^{\forall}\lambda \notin \sigma_T(f),\ {}^{\forall}f$$

$(l.G_1)$が重要であるというのは次の定理が知られているからである。

定理25.　$T \in (l.G_1)$であれば${}^{\forall}\delta$：複素平面内の閉集合に対し、

$$(\#) \quad \bigcap_{\lambda \notin \delta} Ran(T-\lambda) = \{f : \sigma_T(f) \subset \delta\}$$

(#)はそれ自体としても興味深い式であるが、不変部分空間問題との関連もある。　しかしながらM－hyponormalが、果たして$(l.G_1)$であり(#)を満たしているかについては現在不明のようである。　dominantについては残念ながら或る種のquasinilpotent作用素がdominantになっていて、(G_1)にさえならず(#)も満たしてくれない。　このような文脈にⒽ作用素をうまく載せてみたいというのが目標なのであるが余り進展していない。　ただ、どうもはっきり断言はできないのであるが、こうした文脈でdominantについての研究は相当の水準で行なわれていながら、その具体的で自然な実例となるともとのhyponormal作用素の他にはかなり乏しいのではないかと感じられる。　もしそうであるとすれば次の結果は幾分かⒽ作用素についての興味を増すかもしれない。　これが一番最後の定理であり、予告の通り明らかか

に命題1導く。　これは[12]にあるものである。

定理26. $T \in$ Ⓗはdominantである　従ってSvepを持ち$\sigma_f(T)$が定められる

略証. $$M_\lambda = \begin{cases} 3 & (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{2\|T^* - \lambda\|}{|\lambda - \lambda^*|} & (\lambda \neq \lambda^*) \end{cases}$$

と置く。　$T \in$ Ⓗがhumble 3-hyponormalであることは[8][13]に見られる通り簡単な計算から出せる。　そこでλ : real scalarの場合が判ったから、以下$\lambda \neq \lambda^*$と仮定する。　そして定理11でのnormal Nを取ってくると

$$\begin{aligned} M_\lambda \|(T-\lambda)x\| &\geqq \frac{2}{|\lambda-\lambda^*|}\|B_N(\lambda)x\| + \|(T-\lambda)x\| \\ &= \frac{1}{|\lambda-\lambda^*|}(\|B_N(\lambda)x\| + \|B_{N^*}(\lambda)x\|) + \|(T-\lambda)x\| \\ &\geqq \frac{1}{|\lambda-\lambda^*|}\|(\lambda-\lambda^*)\mathrm{Re}(N-\lambda)x\| + \|(T-\lambda)x\| \\ &\geqq \|\mathrm{Re}(T-\lambda)\| + \|(T-\lambda)\| \geqq \|(T-\lambda)^* x\| \end{aligned}$$

となり示せた。

しかしながら目下の処、Ⓗ作用素がM-hyponormalであるかどうかも判らないし、$(l. G_1)$や(#)についての調査も進んでいない。

この方向に限らずⒽ作用素族については、だんだんと判らないことが増えていくようで、更に新しいbreakthroughの起きるのを待っている状態である。

主要参考文献表(本文に引用した文献に限定)

1. S.L.Campbell, Pacific J. Math., 61(1975), 53-57.
2. ----, Pacific J. Math., 60(1975), 37-50.
3. ----, Linear operators for which T*T and T + T* commute, III.(preprintのものしか入手していない)
4. S.L.Campbell and R.Gellar, Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 305-319.
5. ---- and ----, Proc. Amer. Math. Soc., 60(1976), 53-58.
6. K.Clancey, Springer Lecture Notes in Math., 742(1979).
7. M.J.Conway and R.G.Douglas, Acta Math., 141(1978), 187-261.
8. C.-K.Fong and V.I.Istrăţescu, Proc. Amer. Math. Soc., 76(1979), 107-112.
9. C.-K.Fong and S.-K.Tsui, A note on positive operator, preprint.
10. T.Furuta, 数学, 25(1973), 20-37.
11. Y.Kato, Math. Japon., 23(1978), 123-126.
12. ----, Operators in Ⓗ are dominant, preprint.
13. Y.Kato and N.Moriya, Math. Japon., 22(1978), 233-238.
14. F.Kubo, Math. Japon., 21(1976), 23-35.
15. R.Nakamoto, Math. Japon., 22(1977), 379-382.
16. T.Saito, Springer Lecture Notes in Math., 247(1972).
17. ----, 数理解析研究所講究録, 377(1980), 23-49.